František Machala

O množině středů křivek konstantní křivosti hyperbolické roviny, které se dotýkají dané přímky a procházejí daným bodem

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 9 (1968), No. 1, 103--110

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/119897`

1968 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 27

Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: Doc. RNDr. Josef Šimek

O MNOŽINĚ STŘEDŮ KŘIVEK KONSTANTNÍ KŘIVOSTI HYPERBOLICKÉ ROVINY, KTERÉ SE DOTÝKAJÍ DANÉ PŘÍMKY A PROCHÁZEJÍ DANÝM BODEM

FRANTIŠEK MACHALA
(Došlo 22. 5. 1967)

I

V reálné rozšířené eukleidovské rovině je dána kružnice k a přímka p, procházející jejím středem O (obr. 1). Na kolmici q k přímce p, vedené bodem O, zvolme vnitřní bod $M \neq O$ kružnice k a na přímce p libovolný bod Z. Průsečíky T, T' resp. A, A' přímek p resp. MZ s kružnicí k určují úplný čtyrroh, vepsaný této kružnici. Jeho diagonály, procházející bodem Z, označme u, v.

Věta 1. *Jestliže bod Z probíhá přímku p, pak přímky u, v obalují kuželosečku l.*

Důkaz: Tečny v bodech T, T', A, A' ke kružnici k označme postupně t, t', a, a'. Dále označme $X \equiv a.t$, $Y \equiv a'.t$, $X' = a.t'$, $Y' \equiv a'.t'$. Z vlastností úplného čtyrrohu $TT'AA'$ vyplývá, že je $u \equiv XY'$, $v \equiv X'Y$. Svazek přímek MZ o středu M vytíná na kružnici k dvě soumístné involutorní kvadratické soustavy bodové $k(A\ A', \ldots) \barwedge k(A', A, \ldots)$. Soumístné svazky přímek $T(TA, TA', \ldots)$, $T(TA', TA, \ldots)$ jsou také involutorní. Póly přímek těchto svazků vytvářejí dvě soumístné involutorní řady bodové $t(X, Y, \ldots) \barwedge t(Y, X, \ldots)$. Tečny a, a' kružnice k vytínají na tečnách t, t' projektivní řady bodové $t(X, Y, \ldots) \barwedge t'(X', Y', \ldots)$. Porovnáním předcházejících vztahů obdržíme $t(Y, X, \ldots) \barwedge t'(X', Y', \ldots)$. Přímky u, v vytínají na přímkách t, t' projektivní řady bodové a obalují proto kuželosečku l.

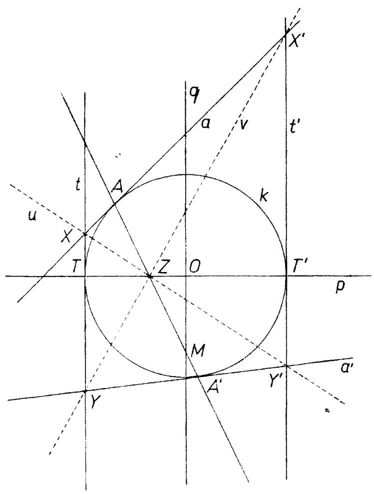
Úmluva. Nechť jsou dány dva různé vnitřní body U, V kružnice k. Jestliže body X, Y oddělují harmonicky jak body U, V, tak průsečíky přímky UV s kružnicí k, budeme psát $[XYUV]$.[1])

Věta 2. *Kuželosečka l je elipsa o osách $q \equiv \alpha\beta$, $m \equiv \gamma\delta$, kde m je polára bodu M ke kružnici k. Pro vrcholy α, β elipsy l platí $[\alpha\beta MO]$, velikost druhé osy $\gamma\delta$ je rovna průměru kružnice k.*

Důkaz: Přímé řady bodové $t(Y, X, \ldots) \barwedge t'(X', Y', \ldots)$ nejsou perspektivní a proto je kuželosečka l jednoduchá. Z konstrukce tečen u, v této kuželosečky plyne, že přímka q je její osa. Zvolme na přímce p nevlastní bod Z_∞ a veďme

[1]) Za daných podmínek existují vždy právě dva body X, Y této vlastnosti.

jím podle věty 1 tečny u, v kuželosečky l (obr. 2). Přímky u, v jsou kolmé k ose q a proto ji protínají ve vrcholech α, β. Protože je $AA' < TT'$, jsou body α, β vlastní. Z vlastností úplného čtyrrohu $TT'AA'$ plyne $[\alpha\beta OM]$.

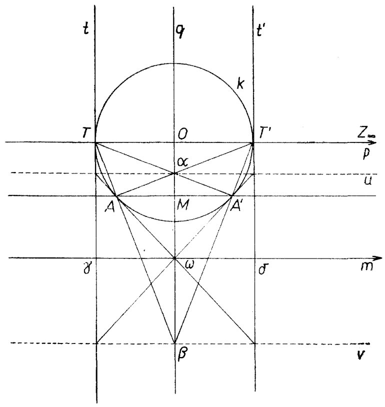


Obr. 1.

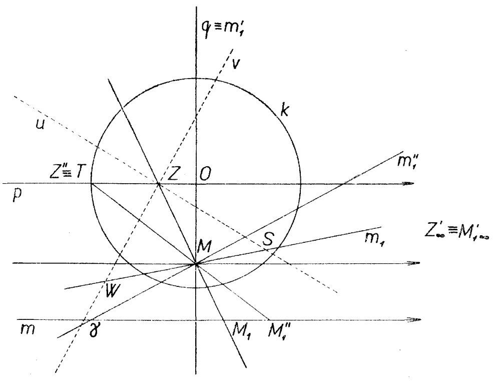
Jestliže sestrojíme k bodům α, β, O, M na přímce q body polárně sdružené, snadno zjistíme vzhledem k $[\alpha\beta OM]$, že je bod $\omega \equiv q \,.\, m$ středem úsečky $\alpha\beta$. Přímka m je druhou osou kuželosečky l. Přímky t, t' jsou tečny kuželosečky l kolmé k ose m a protínají ji tedy ve vrcholech γ, δ. Přitom je $\gamma\delta = TT'$.

Věta 3. *Zvolme libovolný bod Z přímky p a označme M_1 průsečík přímek MZ, m. Polára m_1 bodu M_1 ke kružnici k je současně polárou bodu Z k elipse l.*

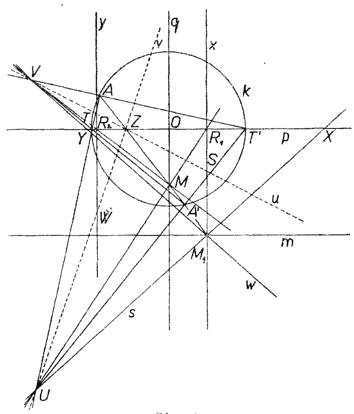
Důkaz: Uvažujme involuci sdružených polár v bodě M vzhledem ke kružnici k a vzhledem k elipse l: Přímka p je polárou bodu M k elipse l, neboť platí $[\alpha\beta OM]$. Zvolme nevlastní bod Z'_∞ přímek p, m (obr. 3). Platí $Z'_\infty \equiv M'_{1\infty}$. Polára m'_1 bodu Z'_∞ ke kružnici k je současně polárou tohoto bodu k elipse l. Přímky m'_1, $MM'_{1\infty}$ jsou polárně sdruženy současně k oběma kuželosečkám k, l. Zvolme dále bod $Z'' \equiv T$. Přímka $m''_1 \equiv M\gamma$ je polára bodu Z'' k elipse l. Přímka $Z''M$ je však polára bodu γ ke kružnici k. Přímky m''_1, MZ'' jsou proto polárně sdruženy k oběma kuželosečkám k, l. Protože involuce sdružených polár v bodě M je jednoznačně určena dvěma páry sdružených polár, indukují kuželosečky k, l v bodě M tutéž involuci sdružených polár. Z toho již vyplývá tvrzení věty.



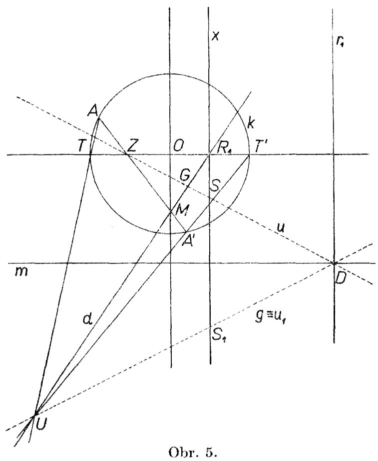
Obr. 2.



Obr. 3.


y
q
v
x
V
k
A
T
R2
Z
O
R1
T'
p
X
Y
S
M
u
A'
W
m
M1
w
s
U

Obr. 4.


x
r1
A
k
T
Z
O
R1
T'
G
S
M
u
A'
m
D
d
g ≡ u1
S1
U

Obr. 5.

Poznámka. Průsečíky S, W přímky m_1 s přímkami u, v jsou body dotyku tečen u, v k elipse l.

Věta 4. *Označme U, V póly přímek u, v a R_1, R_2 průsečíky přímek UM, VM s přímkou p. Přímky $x \equiv R_1S$, $y \equiv R_2W$ jsou kolmé k přímce p.*

Důkaz: Bod U resp. V je průsečík přímek AT, A' T' resp. AT', A' T (obr. 4). Polára bodu S resp. W je přímka $s \equiv UM_1$ resp $w \equiv VM_1$. Platí $(AA'MM_1) = -1$. Protože jsou čtveřice bodové T, T', R_1, $X = s \,.\, p$ a T', T, R_2, $Y = w \,.\, p$ se čtveřicí A, A', M, M_1 perspektivní o středech U, V perspektivnosti, platí také $(TT'R_1X) = -1$, $(TT'R_2Y) = -1$. Bod X resp. Y leží proto na poláře bodu R_1 resp. R_2 a je proto pólem přímky R_1S resp. R_2W. Protože body X, Y leží na přímce p, jsou jejich poláry R_1S, R_2W kolmé k přímce p, c. b. d.

Druhý bod S_1 elipsy l na přímce x sestrojíme jako bod souměrně sdružený k bodu S podle přímky m. Přímka u_1 souměrně sdružená k přímce u podle přímky m je pak tečna elipsy l v bodě S_1 (obr. 5). Označme G průsečík přímek u, $d \equiv MR_1$. Body M, R_1, G, U jsou průsečíky přímky d se stranami a diagonálami úplného čtyrrohu $TT'AA'$, procházejícími bodem Z. Platí tedy $(GUMR_1) = -1$. Protože G, U jsou sdružené póly vzhledem ke kružnici k, platí $[GUMR_1]$.

Poláry g, u, m, r_1 bodů G, U, M, R_1 procházejí pólem D přímky d a platí $(gumr_1) = -1$. Kromě toho jsou přímky r_1, m kolmé. Přímky r_1, m jsou pak osami souměrnosti přímek u, g. To ovšem znamená, že je $u_1 \equiv g$.

Platí tedy: Jestliže zvolíme na přímce p libovolný vnitřní bod R_1 kružnice k a sestrojíme na kolmici x v bodě R_1 k přímce p body S, S_1 elipsy l, pak tečny u, u_1 v těchto bodech k elipse l se protínají v pólu D přímky $d \equiv MR_1$ a protínají přímku d v bodech G, U, pro které je $[GUMR_1]$.

II

Nechť je v rozšířené eukleidovské rovině dán Beltrami—Kleinův model hyperbolické roviny o absolutní kružnici k.[1])

Buďte dány dva různé L-body A, B. Označme D pól přímky $d \equiv AB$ k absolutní kružnici k a sestrojme body U, U_1, pro které platí $[UU_1AB]$.

Věta 5. *Množinou L-středů křivek Φ konstantní křivosti, které procházejí L-body A, B, jsou přímky $u = DU_1$, $u_1 \equiv DU$.*

Důkaz: a) Dokážeme nejdříve, že každý bod přímek u, u_1 je L-středem křivky Φ^*.[2]) Přímo z definice křivek Φ vyplývá, že body U, U_1 jsou L-středy křivek Φ^*, bod D je L-středem složené křivky Φ^*. Zvolme na přímce u bod $S \neq D$, U_1, jeho poláru označme s. (obr. 6) Průsečíky přímek SA, SB s přímkou s označme 1, 2 a s absolutní kružnicí A', A''; B', B'' tak, aby platilo: Dvojice bodů S, 1 a A, A'; S, 2 a B, B' se oddělují stejným způsobem. Uvažujme úplný čtyrroh $A'A''B'B''$ vepsaný absolutní kružnici k. Bod S je jeho diagonálním bodem a přímka s jeho diagonálou. Protože je $[UU_1AB]$, jsou přímky

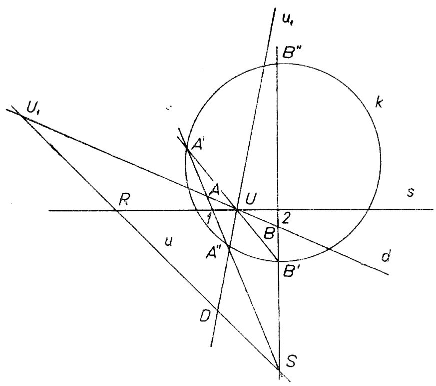
---

[1]) Základní pojmy o Beltrami—Kleinově modelu včetně definice křivky Φ konstantní křivosti viz lit. [4].

[2]) Křivkou Φ^* rozumíme takovou křivku Φ, která splňuje požadavky věty.

SU, u další diagonály tohoto čtyrrohu a protínají diagonálu s v diagonálních bodech U, R. Pak strany $A'B'$, $A''B''$ čtyrrohu procházejí diagonálním bodem U.

Uvažujme křivku $\Phi(S, A)$, která odpovídá absolutní kružnici k v perspektivní kolineaci $\psi(S, s, A' \to A)$. Z předchozího je zřejmé, že bodu B' odpovídá v kolineaci ψ bod B. Křivka $\Phi(S, A)$ prochází bodem B a je proto křivkou Φ^*.



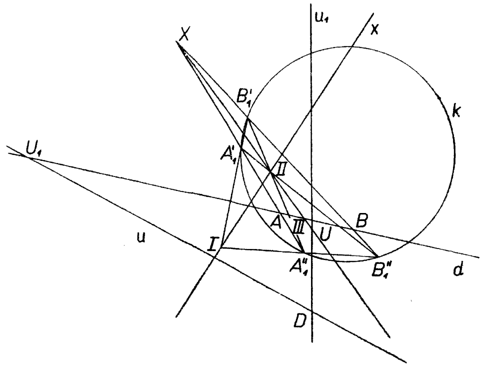
Obr. 6.

Stejně ukážeme, že každý bod $S_1 \neq D$, U přímky u_1 je L-středem křivky Φ^*.

b) Dokážeme, že v dané rovině neexistuje další L-střed křivky Φ^*. Zvolme bod X, který neleží na žádné z přímek u, u_1, d (obr. 7). Průsečíky přímek XA, XB s absolutní kružnicí k označme A_1', A_1''; B_1', B_1'' a I, II označme průsečíky přímek $A_1'B_1'$ a $A_1''B_1''$; $A_1'B_1''$ a $A_1''B_1'$. Přímka $x \equiv$ I II je polárou bodu X k absolutní kružnici k. Předpokládejme, že křivka $\Phi(X, A)$ je křivkou Φ^*. Uvažujme proto kolineaci $\psi(X, x, A_1' \to A)$. Z této kolineace vyplývá, že buď přímky $A_1'B_1'$, $A_1''B_1''$, AB, x nebo přímky $A_1'B_1''$, $A_1''B_1'$, AB, x procházejí jedním bodem. To znamená, že buď bod I nebo bod II leží na přímce d. Předpokládejme, že na přímce d leží bod I. To znamená, že přímka X II, polára bodu I, prochází pólem D přímky d. Průsečík přímky X II s přímkou d označme *III*. Z vlastností úplného čtyrrohu plyne, že je $[AB$ I III$]$. Tuto vlastnost však mají na přímce d jen body U, U_1. To znamená, že je buď $U \equiv$ I nebo $U_1 \equiv$ I, což odporuje předpokladu, protože pak by bod X ležel buď na přímce u nebo na přímce u_1. Bod I tedy nemůže ležet na přímce d. Stejně dokážeme, že ani bod II nemůže ležet na přímce d. Bod B nemůže proto odpovídat v kolineaci $\psi(X, x, A_1' \to A)$ žádnému z bodů B_1', B_1'' a proto neleží na křivce $\Phi(X, A)$. Křivka $\Phi(X, A)$ není křivkou Φ^*. To, že na přímce d neleží kromě bodů U, U_1 další L-střed křivky Φ^*, plyne z definice křivky Φ. Tím je věta dokázaná.

Nyní využijeme výsledků paragrafu I, přičemž kružnici k považujeme za absolutní kružnici Beltrami—Kleinova modelu. Označení a zadání všech uvažovaných útvarů ponecháme stejná jako v paragrafu I. Pak platí:

Věta 6. *Množina L-středů křivek Φ konstantní křivosti, které procházejí L-bodem M a dotýkají se L-přímky p, je elipsa l.*



Obr. 7.

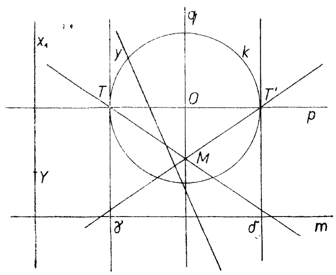
Důkaz: a) Zvolme libovolný L-bod R_1 na přímce p. Z definice křivky Φ plyne, že přímka p je tečna každé křivky $\Phi(X, R_1)$, jejíž L-střed X leží na kolmici x v bodě R_1 k přímce p. Každá křivka Φ^*, jejíž L-střed leží na přímce x, prochází tedy body M, R_1. Průsečíky S, S_1 přímky x s elipsou l sestrojíme podle paragrafu I takto (obr. 5): Na přímce $d \equiv MR_1$ sestrojíme body G, U, pro které platí $[GUMR_1]$. Průsečíky přímek $u \equiv DG$, $u_1 \equiv DU$ s přímkou x jsou hledané body. Podle věty 5 jsou právě tyto body přímky x L-středy křivek Φ, které procházejí body M, R_1 a tedy L-středy křivek Φ^* na přímce x.

b) Veďme body T, T' přímky kolmé k přímce p. Pak můžeme tětivy absolutní kružnice k, ležící na přímkách MT, MT', považovat za složené křivky Φ^* o L-středech γ, δ (obr. 8).

c) Zvolme na přímce p libovolný vnější bod absolutní kružnice k a veďme jím přímku x_1, kolmou k této přímce (obr. 8). Na přímce x_1 zvolme libovolný bod Y. Pak polára y tohoto bodu protíná přímku p ve vnitřním bodě absolutní kružnice k. Podle definice křivky Φ, nemůže být přímka p tečnou žádné křivky Φ o L-středu Y. Na přímce x_1 neexistuje žádný L-střed křivky Φ^*.

Body elipsy l a jen tyto body jsou L-středy křivek Φ^*, čímž je věta dokázaná.

Poznámka. Jestliže jsou dány základní útvary, t.j. L-přímka p a L-bod M. v obecné poloze, pak je můžeme L-pohybem převést do takové zvláštní polohy. ve které byly zkoumány v celé práci. Každým L-pohybem se zachovává inci-



dence útvarů, druh L-kuželosečky a tím i druh křivky Φ. Elipsa l protíná absolutní kružnici k ve dvou různých bodech. Takováto kuželosečka se nazývá L-polohyperbola. Větu 6 je tedy možno zobecnit pro libovolnou L-přímku p a L-bod M, který na ní neleží: Množinou L-středů křivek Φ, které procházejí L-bodem M a dotýkají se L-přímky p, je L-polohyperbola.

Obr. 8.

LITERATURA

[1] *Hlavatý V.:* Projektivní geometrie 2. Útvary dvojparametrické. Praha 1945.
[2] *Kagan V. F.:* Osnovanija geometrii. Část 1. Moskva 1949.
[3] *Kagan V. F.:* Osnovanija geometrii. Část 2. Moskva 1956.
[4] *Machala F.:* O geometričeskom městě centrov krivych postojannoj krivizny v ploskosti Lobačevskogo, kotoryje kasajutsja dannoj okružnosti i prjamoj. Acta Univ. Pal. Olomucensis, 1964.

Резюме

О МНОЖЕСТВЕ ЦЕНТРОВ КРИВЫХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ, КОТОРЫЕ КАСАЮТСЯ ДАННОЙ ПРЯМОЙ И ПРОХОДЯТ ЧЕРЕЗ ДАННУЮ ТОЧКУ

Франтишек Махала

В настоящей работе открыто множество центров кривых постоянной кривизны гиперболической плоскости, которые касаются данной прямой и проходят через данную точку. Все рассуждения проводятся на модели Бельтрами—Клейна при помощи синтетического метода.

Zusammenfassung

ÜBER DIE MENGE DER MITTELPUNKTE VON KURVEN KONSTANTER KRÜMMUNG DER HYPERBOLISCHEN EBENE DIE EINE GEGEBENE GERADE BERÜHREN UND EINEN GEGEBENEN PUNKT DURCHGEHEN

František Machala

In der vorliegenden Arbeit wird die Menge der Mittelpunkte von Kurven konstanter Krümmung der hyperbolischen Ebene gefunden, die eine gegebene Gerade berühren und einen gegebenen Punkt durchgehen. Alle Betrachtungen werden synthetisch am Beltrami-Klein-Modell durchgeführt.