Jan Voráček

Poznámka o jistých nelineárních diferenciálních rovnicích 3. a 4. řádu

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 9 (1968), No. 1, 93--101

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/119896

1968 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 27

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: Mř. prof. RNDr. Miroslav Laitoch, kandidát věd

POZNÁMKA O JISTÝCH NELINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNICÍCH 3. A 4. ŘÁDU

JAN VORÁČEK

(Došlo 12. 6. 1967)

Věnováno p. prof. dr. O. Borůvkovi k 70. narozeninám

V této poznámce je uvedeno několik vět o vlastnostech řešení diferenciálních rovnic

$$x''' + ax'' + g(x') + h(x) = Q(t), \tag{1}$$

$$x'''' + ax''' + bx'' + h(x') + k(x) = Q(t), \tag{2}$$

kde a, b jsou kladné konstanty.

Úvahy se opírají o obecnou větu, uvedenou v odstavci 1., která je zobecněním známé věty (sr. např. [1]) na případ, že funkce V závisí jen na některých složkách řešení uvažované soustavy.

1. Buď dána soustava diferenciálních rovnic

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

kde f_i jsou funkce spojité v E_{n+1}. Dále buď $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ k-tice ($k \leqq n$) přirozených čísel z intervalu $\langle 1, n \rangle$. Je-li $V(x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_k})$ funkce k proměnných, pak dosazením složek $x_{p_1}(t), x_{p_2}(t), \ldots, x_{p_k}(t)$ řešení $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ soustavy (3) za proměnné $x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_k}$ do funkce V vznikne složená funkce proměnné t. Tuto složenou funkci označíme stručně $V_x(t)$. Pro výraz $\sum_{i=1}^{k} |x_{p_i}|$ budeme užívat symbolu $\|x\|_k$.

Věta 1: *Nechť existují spojité funkce $V(x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_k})$, $u(x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_k})$ k proměnných a kladná konstanta P tak, že $u(x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_k}) > 0$ pro $\|x\|_k \geqq P$. Nechť dále $V(x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_k})$ má v E_k spojité parciální derivace podle všech proměnných a splňuje vztahy*

$$\lim_{\|x\|_k \to +\infty} V(x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_k}) = +\infty, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial V}{\partial x_{p_i}} f_{p_i} \leqq -u(x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_k}) \qquad \text{při} \qquad \|x\|_k \geqq P. \tag{5}$$

Potom pro každé řešení soustavy (3), *které existuje na intervalu neomezeném zprava platí*

$$\limsup_{t \to +\infty} \|x(t)\|_k \leqq D. \tag{6}$$

kde konstanta D je společná pro všechna uvažovaná řešení soustavy (3). *Je-li $k = n$, pak všechna řešení existují na intervalu neomezeném zprava (a platí* (6)).

Důkaz: Zvolme číslo $Q > P$ a označme

$$M(Q) = \underset{\|x\|_k \leqq Q}{\mathrm{Max}} V(x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_k}). \tag{7}$$

Podle vlastnosti (4) funkce V existuje $R(Q) > Q$ tak, že platí

$$\underset{\|x\|_k \geqq R(Q)}{\mathrm{Min}} V(x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_k}) > M(Q). \tag{8}$$

Uvažujme nyní řešení $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ soustavy (3), existující na intervalu $\langle t_0, +\infty)$, pro které platí $\| x(t_0) \|_k \leqq Q$. Kdyby existovalo $t_2 > t_0$ tak, že $\| x(t_2) \|_k = R(Q)$, existovalo by i $t_1 > t_0$, $t_1 < t_2$ tak, že

$$\| x(t_1) \|_k = Q, \quad Q < \| x(t) \|_k < R(Q) \tag{9}$$

pro všechna $t \in (t_1, t_2)$ (předpokládáme, že $t_2 > t_0$ je nejmenší z čísel, pro která platí $\| x(t_2) \|_k = R(Q)$). Pro všechna t z intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ pak platí podle (5), (3) a (9)

$$\frac{\mathrm{d} V_x(t)}{\mathrm{d}t} \leqq -u(x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_k}) < 0,$$

takže $V_x(t)$ je v tomto intervalu klesající. To je ovšem ve sporu s tím, že podle (7), (8), (9) a definice čísla t_2 platí

$$V_x(t_1) \leqq M(Q) < V_x(t_2).$$

Z toho tedy usuzujeme, že pro všechna $t \geqq t_0$ platí nerovnost

$$\| x(t) \|_k < R(Q).$$

Předpokládejme nyní, že na intervalu $J = \langle t_0, +\infty)$ existuje řešení $x_1(t)$, $x_2(t), \ldots, x_n(t)$ soustavy (3), pro které platí nerovnost

$$\| x(t) \|_k \geqq P \tag{10}$$

pro všechna $t \in J$. Označme

$$u = \mathrm{Min}\, u(x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_k}) \quad \text{na množině } R(\| x(t_0) \|_k) \geqq \| x \|_k \geqq P. \tag{11}$$

Pro všechna $t \geqq t_0$ platí podle (10), (5), (11) nerovnost

$$\frac{\mathrm{d} V_x(t)}{\mathrm{d}t} \leqq -u < 0$$

a tedy $\lim_{t \to +\infty} V_x(t) = -\infty$. To je ovšem spor, neboť funkce V je podle (4) zdola omezená.

Pro každé řešení soustavy (3), které existuje na intervalu neomezeném zprava tedy je

$$\liminf_{t \to +\infty} \| x(t) \|_k \leqq P,$$

takže pro ně musí platit i (6), kde $D = R(P)$. Věta je tím dokázána, neboť tvrzení pro $k = n$ je obsahem již zmíněné věty z [1].

2. Nyní si všimneme diferenciální rovnice (1). V celém tomto odstavci předpokládáme, že $g(y)$, $h(x)$ a $Q(t)$ jsou spojitými funkcemi svých proměnných na intervalu $(-\infty, +\infty)$.

Věta 2. *Nechť existují kladné konstanty H, Q, G, ε, tak, že platí nerovnosti*

$$|h(x)| \leqq H, \quad |Q(t)| \leqq Q \quad \textit{pro všechna } x, t, \tag{12}$$

$$g(y) \operatorname{sgn} y \geqq 4(H + Q) + \varepsilon \quad \textit{pro } |y| \geqq G. \tag{13}$$

Potom všechna řešení diferenciální rovnice (1) *existují na intervalu neomezeném zprava a existuje kladná konstanta D tak, že pro všechna řešení platí*

$$\limsup_{t\to+\infty} |x'(t)| \leqq D, \quad \limsup_{t\to+\infty} |x''(t)| \leqq D. \tag{14}$$

Důkaz: Převeďme rovnici (1) v ekvivalentní soustavu

$$x' = y, \quad y' = z, \quad z' = -az - g(y) - h(x) + Q(t) \tag{15}$$

a uvažujme funkci

$$2V(y, z) = z^2 + 2\int_0^y g(s)\,\mathrm{d}s + \frac{2\eta yz}{(1 + \alpha|y|)(1 + |z|)},$$

kde α a η jsou kladné konstanty. Z (13) snadno plyne, že platí $\lim V(y, z) = +\infty$ pro $|y| + |z| \to +\infty$ a stejně jako v [2] lze ukázat, že při vhodné volbě parametrů α a η je možno nalézt $\delta > 0$ a $P > 0$ tak, že pro $|y| + |z| \geqq P$ platí

$$\frac{\partial V}{\partial y} z + \frac{\partial V}{\partial z}(-ay - g(y) - h(x) + Q(t)) \leqq \frac{-\delta}{(1 + \alpha|y|)(1 + |z|)}.$$

Podle věty 1 a podle (15) je tím (14) dokázáno pro všechna řešení, která existují na intervalu neomezeném zprava.

Uvažujme nyní řešení $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ soustavy (15), které existuje na intervalu $\langle t_0, t_1\rangle$. Podle existenční věty ([3], str. 125, věta 3), užité na soustavu (15), platí při $t_1 < +\infty$ aspoň jeden ze vztahů

$$\limsup_{t\to t_1-} |x(t)| = +\infty, \tag{16}$$

$$\limsup_{t\to t_1-} |y(t)| = +\infty, \quad \limsup_{t\to t_1-} |z(t)| = +\infty. \tag{17}$$

Položme nyní $U = |y(t_0)| + |z(t_0)| + P$. Z důkazu věty 1 víme, že na $\langle t_0, t_1)$ musí být $|y(t)| + |z(t)| < R(U)$, takže nemůže platit (17). Užitím (15) a věty o střední hodnotě však potom dostáváme pro všechna $t \in \langle t_0, t_1)$:

$$|x(t) - x(t_0)| = |y(\Theta)|(t - t_0) < R(U)(t_1 - t_0), \quad t_0 < \Theta < t,$$

takže nemůže platit ani (16). Z toho plyne, že všechna řešení soustavy (15) a tedy i rovnice (1) existují na intervalu neomezeném zprava a vše je dokázáno.

Věta 3. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 2 a navíc předpokládejme, že existují kladné konstanty* c, m, h_1, Q_1 *tak, že*

$$| g(y) - cy | \leqq m \qquad \textit{pro všechna } y, \tag{18}$$

$$\left| \int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}s \right| \leqq Q_1 \qquad \textit{pro všechna } t, \tag{19}$$

$$h(x) \operatorname{sgn} x \geqq m \qquad \textit{při} \quad | x | \geqq h_1 . \tag{20}$$

Potom jsou všechna řešení rovnice (1) *omezená. Platí-li místo* (20) *dokonce*

$$\liminf_{|x| \to +\infty} h(x) \operatorname{sgn} x > m, \tag{21}$$

pak existuje konstanta D_1 *tak, že pro všechna řešení rovnice* (1) *platí vztahy*

$$\limsup_{t \to +\infty} | x(t) | \leqq D_1 , \qquad \limsup_{t \to +\infty} | x'(t) | \leqq D_1 , \tag{22}$$

$$\limsup_{t \to +\infty} | x''(t) | \leqq D_1 .$$

Důkaz: Poznamenejme nejprve, že za našich předpokladů platí tvrzení věty 2. Zvolíme-li tedy pevně řešení $x(t)$ rovnice (1), existuje T tak, že pro všechna $t \geqq T$ platí nerovnosti

$$| x'(t) | \leqq D + 1, \qquad | x''(t) | \leqq D + 1. \tag{23}$$

Položme nyní $\alpha(y) = g(y) - cy$ a pišme (1) ve tvaru

$$cx'(t) = Q(t) - x'''(t) - ax''(t) - \alpha(x'(t)) - h(x(t)).$$

Z této identity ($x(t)$ znamená zvolené řešení) vychází integrací v mezích t_1, $t > t_1$ a násobením funkcí $\operatorname{sgn} x(t)$

$$c(x(t) - x(t_1)) \operatorname{sgn} x(t) = \int_{t_1}^{t} Q(s)\,\mathrm{d}s \operatorname{sgn} x(t) - \int_{t_1}^{t} [h(x(s)) + \alpha(x'(s))]\,\mathrm{d}s \operatorname{sgn} x(t) +$$
$$+ [x''(t_1) - x''(t) + a(x'(t_1) - x'(t))] \,.\, \operatorname{sgn} x(t). \tag{24}$$

Buď $t_1 \geqq T$ a předpokládejme, že pro všechna $t \geqq t_1$ je $| x(t) | \geqq h_1$ a tedy $\operatorname{sgn} x(t) = \text{konst.}$ Z (24) pak plyne užitím (23) nerovnost

$$c \, | x(t) | \leqq c \, | x(t_1) | + 2Q_1 - \int_{t_1}^{t} [h(x(s)) + \alpha(x'(s))]\,\mathrm{d}s + 2(a + 1)(D + 1).$$

Protože platí $| \alpha(y) | \leqq m$ pro všechna y, dostáváme nakonec užitím (20)

$$c \, | x(t) | \leqq c \, | x(t_1) | + 2[Q_1 + (a + 1)(D + 1)]. \tag{25}$$

Z toho již plyne, že pro všechna řešení rovnice (1) platí pro všechna $t \geqq t_1$ buď (25), nebo nerovnost

$$c \, | x(t) | \leqq ch_1 + 2[Q_1 + (a + 1)(D + 1)],$$

nebo dokonce nerovnost $|x(t)| \leqq h_1$. Tím je dokázáno první tvrzení věty.

Abychom dokázali i druhé tvrzení uvažme, že z (21) vyplývá existence kladných konstant h_2, δ tak, že platí

$$h(x) \operatorname{sgn} x > m + \delta \qquad \text{jakmile} \qquad |x| \geqq h_2. \tag{26}$$

Kdyby existovalo $t_2 \geqq T$ tak, že řešení $x(t)$ by pro všechna $t \geqq t_2$ splňovalo nerovnost $|x(t)| \geqq h_2$, dostali bychom z (24) (kde místo t_1 píšeme t_2) užitím (26) vztah

$$c\,|x(t)| \leqq c\,|x(t_1)| + 2[Q_1 + (a+1)(D+1)] - \delta(t - t_2), \tag{27}$$

z čehož plyne nesprávný vztah $\lim\limits_{t\to+\infty} c\,|x(t)| = -\infty$. Pro každé řešení rovnice (1) tedy platí

$$\liminf_{t\to+\infty} |x(t)| \leqq h_2. \tag{28}$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle (28) mohou nastat pro $x(t)$ jen dva případy:

1. Existuje $\bar{t}$ tak, že pro všechna $t \geqq \bar{t}$ je $|x(t)| \leqq h_2 + \varepsilon$.

2. Ke každému N existuje $t > N$ tak, že $|x(t)| > h_2 + \varepsilon$. Potom můžeme vytvořit rostoucí a divergentní posloupnost $\{\bar{t}_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, jejímiž členy jsou právě všechna čísla $\bar{t}_k \geqq T$, pro která je $|x(\bar{t}_k)| = h_2 + \varepsilon$. Uvažujme libovolné $t \geqq \bar{t}_1$. Je-li $|x(t)| > h_2 + \varepsilon$, existuje index k_1 tak, že $\bar{t}_{k_1} \leqq t < \bar{t}_{k_1+1}$ a $\operatorname{sgn} x(t) =$ $=$ konst. pro všechna t z intervalu $\langle \bar{t}_{k_1}, \bar{t}_{k_1+1} \rangle$; z (24) (kde místo t_1 píšeme t_k) potom dostáváme nerovnost

$$c\,|x(t)| \leqq c(h_2 + \varepsilon) + 2[Q + (a+1)(D+1)].$$

Tím je vše dokázáno.

Věta 4. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 2 a nechť dále existují kladné konstanty c, m, Q_1, δ, h_3 tak, že platí* (18), (19) *a funkce $h(x)$ splňuje vztah*

$$h(x) \operatorname{sgn} x < -m - \delta \qquad \textit{pro všechna} \qquad |x| \geqq h_3. \tag{29}$$

Potom existují řešení rovnice (1), *pro která platí*

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = +\infty. \tag{30}$$

Důkaz: Užijeme konstanty P a funkce $R(U)$ z důkazu věty 2 a funkce $\alpha(y)$ z důkazu věty 3. Buďtež x_0' a x_0'' dvě libovolná reálná čísla a označme $R = R(|x_0'| + |x_0''| + P)$. Dále buď ještě $\varepsilon > 0$ a

$$S = \operatorname{Max}\left(\frac{1}{c\delta}\left(Q_1(H + m) + R(H + am)\right) + \varepsilon,\ h_3\right). \tag{31}$$

Všimněme si funkce $V(x, y, z, t)$, definované vztahem

$$2cV(x, y, z, t) = 2a\int_0^x h(s)\,\mathrm{d}s + \left(z + ay + cx - \int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}s\right)^2 + 2\int_0^y \alpha(s)\,\mathrm{d}s. \tag{32}$$

Snadno vidíme, že při $|y| \leqq R$, $|z| \leqq R$ platí

$$\lim_{|x|\to+\infty} V(x, y, z, t) = +\infty, \tag{33}$$

neboť $\int_0^x h(s)\,\mathrm{d}s$ roste nejvýš lineárně, zatímco druhý sčítanec v (32) roste kvadraticky v x. Dále označme symbolem Sup (k) supremum funkce $V(x, y, z, t)$ na množině $|x| \leqq k$, $|y| \leqq R$, $|z| \leqq R$ $-\infty < t < +\infty$. Z (33) plyne, existence čísla $h(S) > S$ takového, že pro všechna x, y, z, t, pro která platí nerovnosti $|x| \geqq h(S)$, $|y| \leqq R$, $|z| \leqq R$, $-\infty < t < +\infty$, platí také

$$V(x, y, z, t) > \mathrm{Sup}\,(S). \tag{34}$$

Uvažujme nyní řešení $x(t)$ rovnice (1), splňující počáteční podmínky $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_0'$, $x''(t_0) = x_0''$. Dokážeme, že platí-li pro x_0, x_0', x_0'' vztah

$$|x_0| > S, \tag{35}$$

pak pro $x(t)$ platí (30).

Za tím účelem dosaďme do $V(x, y, z, t)$ za x, y, z funkce $x(t)$, $x'(t)$, $x''(t)$. Vznikne tak složená funkce t, kterou označíme stručně $V_x(t)$ a pro jejíž derivaci podle t platí

$$\frac{\mathrm{d}V_x(t)}{\mathrm{d}t} = -x(h(x) + \alpha(x')) + \frac{1}{c}\int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}s(h(x) + \alpha(x')) -$$
$$- \frac{a}{c}\,x'\alpha(x') - \frac{1}{c}\,x''h(x).$$

Z důkazu věty 1 víme, že pro všechna $t \geqq t_0$ platí $|x'(t)| \leqq R$, $|x''(t)| \leqq R$. Můžeme tedy derivaci odhadnout takto:

$$\frac{\mathrm{d}V_x(t)}{\mathrm{d}t} \geqq -x(hx) + \alpha(x')) - \frac{1}{c}\,(Q_1(H + m) + R(H + m)) \geqq$$
$$\geqq -x(h(x) + \alpha(x')) - (\delta S - \varepsilon).$$

Z (35), (31) a (29) plyne $-x_0(h(x_0) + \alpha(x_0')) \geqq -|x_0|\,(\mathrm{sgn}\,x_0 h(x_0) + m) > \delta S$, takže je $\dfrac{\mathrm{d}V_x(t_0)}{\mathrm{d}t} > \varepsilon > 0$. Ze spojitosti uvažovaných funkcí vyplývá, že nerovnost

$$\frac{\mathrm{d}V_x(t)}{\mathrm{d}t} > \varepsilon > 0 \tag{36}$$

zůstane zachována ještě v intervalu $\langle t_0, t_1)$, v němž platí

$$|x(t)| > S. \tag{37}$$

Předpokládejme nyní, že je $t_1 < +\infty$ a že $|x(t_1)| = S$. Potom z (35), (34) a z definice čísla Sup (S) dostáváme nerovnost

$$V_x(t_1) \leqq \mathrm{Sup}\,(S) < V_x(t_0),$$

což je ve sporu s nerovností (36), která platí pro všechna t z intervalu $\langle t_0, t_1)$. Nerovnost (37) tedy platí pro všechna $t \geqq t_0$ a pro stejná t platí i (36). Z toho plyne $\lim_{t \to +\infty} V_x(t) = +\infty$ a z toho opět (30) uvážíme-li, že v (32) jsou y, z i $\int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}s$ omezené.

Závěrem ještě vyslovíme větu o existenci periodických řešení.

Věta 5. *Nechť rovnice* (1) *splňuje předpoklady pro platnost vztahů* (22) *(sr. větu 3). Jsou-li navíc řešení* (1) *určena počátečními podmínkami jednoznačně a funkce $Q(t)$ je periodická, pak existuje aspoň jedno periodické řešení rovnice* (1).

Důkaz této věty je možno provésti známou metodou pomocí Levinsonovy topologické transformace T (viz např. [4]).

3. V tomto odstavci si všimneme diferenciální rovnice (2). V celé této části předpokládáme, že $h(y)$, $k(x)$, $Q(t)$ jsou spojité pro všechny hodnoty proměnných. Protože důkazy vět 2', 3', 4', vyslovených v tomto odstavci jsou zcela analogické důkazům vět vět 2, 3, 4 z odstavce 2, nebudeme tyto důkazy již podrobně provádět a upozorníme jen na odlišné věci.

Věta 2'. *V diferenciální rovnici* (2) *nechť $h(y)$ má spojitou derivaci $h'(y)$ pro všechna y a tyto další vlastnosti:*

$$\lim_{|y|\to+\infty} |h(y)| = +\infty, \qquad h(y) \operatorname{sgn} y > 0 \qquad pro \qquad |y| \geqq 1,$$

$$h'(y) \leqq d, \qquad 0 < d < ab \qquad pro \qquad |y| \geqq 1.$$

Jestliže existují konstanty K, Q tak, že $|k(x)| \leqq K$, $|Q(t)| \leqq Q$ pro všechna x a t, existují i všechna řešení rovnice (2) *na intervalu neomezeném zprava a existuje kladná konstanta D' tak, že pro všechna řešení platí*

$$\limsup_{t\to+\infty} |x'(t)| \leqq D', \qquad \limsup_{t\to+\infty} |x''(t)| \leqq D', \qquad \limsup_{t\to+\infty} |x'''(t)| \leqq D'.$$

Důkaz: Převeďme rovnici (2) v ekvivalentní soustavu $x' = y$, $y' = z$, $z' = w$, $w' = -aw - bz - h(y) - k(x) + Q(t)$ a označme $C = \operatorname{Max}\,(\sup_{|y|\leq 1} h(y), ab + 1)$. Stejně jako v [5] se dá ukázat, že jsou-li δ_1 a δ_2 konstanty, vyhovující nerovnostem

$$\frac{1}{a} < \delta < \frac{b}{c}, \qquad ab - d > a\delta_2 > 0,$$

pak funkce $V(y, z, w)$ definovaná vztahem

$$2V(y, z, w) = (1 + 2a)\int_0^y h(s)\,\mathrm{d}s + \delta_2 by^2 + [a(a + 1) + b(\delta_1 + 1) -$$

$$- \delta_2]\,z^2 + (1 + \delta_1)\,w^2 + 2z(1 + \delta_1)\,h(y) + 2\delta_2 y(az + w) +$$

$$+ 2(a + 1)\,zw - \frac{8C}{\pi}(1 + \delta_1)\,z\varphi(y),$$

kde

$$\varphi(y) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad y > 2 \\ \sin\dfrac{\pi y}{4} & \text{pro} \quad |y| \leqq 2 \\ -1 & \text{pro} \quad y < -2 \end{cases}$$

má tyto vlastnosti:

$$\lim V(y, z, w) = +\infty \qquad \text{pro} \qquad |y| + |z| + |w| \to +\infty,$$

existují kladné konstanty P, U tak, že pro $|y| + |z| + |w| > P$ platí

$$\frac{\partial V}{\partial y} z + \frac{\partial V}{\partial z} w + \frac{\partial V}{\partial w} (-aw - bz - h(y) - k(x) + Q(t)) < -U.$$

Zbytek úvahy je zcela analogický důkazu věty 2.

Věta 3'. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 2' a navíc předpokládejme, že existují kladné konstanty c, m, k_1, Q_1 tak, že platí* (19) *a dále*

$$|h(y) - cy| \leqq m \qquad \textit{pro všechny } y \tag{38}$$

$$k(x) \operatorname{sgn} x \gtrless m \qquad \textit{při} \qquad |x| \geqq k_1. \tag{39}$$

Potom jsou všechna řešení rovnice (2) *omezená.*

Platí-li místo (39) *dokonce*

$$\liminf_{|x| \to +\infty} k(x) \operatorname{sgn} x > m,$$

pak existuje konstanta D_1' tak, že pro všechna řešení rovnice (2) *platí nerovnosti*

$$\limsup_{t \to +\infty} |x(t)| \leqq D_1', \qquad \limsup_{t \to +\infty} |x'(t)| \leqq D_1',$$

$$\limsup_{t \to +\infty} |x''(t)| \leqq D_1'. \qquad \limsup_{t \to +\infty} |x'''(t)| \leqq D_1'.$$

Důkaz je zcela analogický důkazu věty 3.

Věta 4'. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 2' a nechť dále existují kladné konstanty c, m, Q_1, δ, k_3 tak, že platí* (19), (38) *a funkce $k(x)$ splňuje vztah*

$$k(x) \operatorname{sgn} x < -m - \delta \qquad \textit{pro všechna} \qquad |x| \geqq k_3.$$

Potom existují řešení rovnice (2), *pro která platí* (30).

Důkaz je analogický důkazu věty 4; jako srovnávací funkce můžeme užít funkce $V(x, y, z, w, t)$, definované vztahem

$$2cV(x, y, z, w, t) = 2b \int_0^x k(s)\, ds + 2a \int_0^y \beta(s)\, ds +$$
$$+ (w + az + by + cx - \int_0^t Q(s)\, ds)^2,$$

kde $\beta(y) = h(y) - cy$.

LITERATURA

[1] *Yoshizawa T.*: Liapunov's Function and boundedness of solutions. Funkcialaj Ekvacioj 2 (1959).

[2] *Bhatia Nam Parshad*: Anwendung der direkten Methode von Ljapunov zum Nachweis der Beschränktheit und der Stabilität der Lösungen einer Klasse nichtlinearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (Klasse für Mathematik, Physik und Technik) 5 (1961).

[3] *Kamke E.*: Differentialgleichungen reeller Funktionen. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1956.

[4] *Ezeilo J. O. C.*: On the existence of periodic solutions of a certain third order differential equation. Proc. of the Cambridge Philosophical Society (Math. & Phys. sc.) 56 (1960).
[5] *Ezeilo J. O. C.*: An elementary proof of a boundedness theorem for a certain third order differential equation. Journal of the London Mathematical Society 38 (1963).

Zussammenfassung

EINE BEMERKUNG ÜBER BESTIMMTE NICHTLINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 3. UND 4. ORDNUNG

Jan Voráček

In der Arbeit werden einige Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichungen (1), (2) untersucht.
Zuerst wird ein allgemeiner Satz über künftige Beschränktheit einiger Komponenten der Lösungen des Differentialgleichungsystems (3) angeführt. Der Beweis wird mit bekannten Methoden ([1]) geführt. Mit Hilfe dieses Satzes werden weiter Sätze über (1) bewiesen: Wenn (12), (13) gilt, sind die Ableitungen aller Lösungen künftig beschränkt, gilt dazu noch (18), (19), (20) sind auch alle Lösungen beschränkt. Wenn anstatt (20) gar (21) gilt, sind die Lösungen von (1) künftig beschränkt. Dagegen kann (1) auch divergente Lösungen mit künftig beschränkten Ableitungen besitzen und zwar wenn (29) statt (20) gilt. Ähnliche Sätze beweist man auch für (2).