Rahmi Ibrahim Ibrahim Abdel Karim

# Studium des Resonanzfalles bei gewöhnlichen linearen reduzierten Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten

*Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica*, Vol. 9 (1968), No. 1, 27--49

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/119886

1968 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 27

# STUDIUM DES RESONANZFALLES BEI GEWÖHNLICHEN LINEAREN REDUZIERTEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT PERIODISCHEN KOEFFIZIENTEN

RAHMI IBRAHIM ABDEL KARIM

*(Eingelangt am 5. Januar 1967)*

## § 1 EINLEITUNG

In einer früheren Arbeit [1] haben wir den Resonanzfall für die Differentialgleichung

$$L[x] = x^{(n)} + a_1(t)\, x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\, x = f(t) \tag{1}$$

untersucht. Dabei haben wir über $a_\nu(t)$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), $f(t)$ Stetigkeit und $p$-Periodizität für alle $t$ vorausgesetzt, d. h.

$$a_\nu(t + p) = a_\nu(t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n); \qquad f(t + p) = f(t). \tag{2}$$

Unter der Voraussetzung $a_n(t) \not\equiv 0$ haben wir festgestellt, dass im Resonanzfalle die Lösung $x(t)$, sowie auch seine Ableitungen $x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)$ mit wachsendem $t$ Werte annehmen, deren Grössenordnung grösser oder gleich ist als eine gewisse Potenz $t^m$; dabei ist die Zahl $m$ für $x(t)$ und alle ihre Ableitungen dieselbe. Die Bedingung $a_n(t) \not\equiv 0$ ist hier wesentlich, da im Falle $a_n(t) \equiv 0$ bzw. im Falle

$$a_n(t) \equiv a_{n-1}(t) \equiv \ldots \equiv a_{n-j+1}(t) \equiv 0, \qquad a_{n-j}(t) \not\equiv 0 \qquad (1 \leqq j \leqq n - 1)^{1)} \tag{3}$$

gilt die Behauptung nicht mehr. In diesem Falle liegt es nahe durch die Substitution $\hat{x}(t) = x^{(j)}(t)$ zu einer Differentialgleichung $(n - j)$-ter Ordnung überzugehen und das ursprüngliche $x(t)$ durch $j$-malige Integration von $\hat{x}(t)$ auszuwerten. Es zeigt sich, dass hier eine spezielle Normalform (§ 3) gute Dienste leistet. Von dieser speziellen Normalform des Fundamentalsystems der Lösungen der reduzierten homogenen Differentialgleichung ausgehend, kann man zu einem Fundamentalsystem der Lösungen der Differentialgleichung $n$-ter Ordnung derselben Art gelangen (§ 4).

Dabei muss noch eine etwas unübersichtliche Matrix auf die Jordansche Normalform transformiert werden, was im § 5 auf eine allgemeine Weise

1) Der triviale Fall $j = n$ führt zu der Differentialgleichung $x^{(n)}(t) = f(t)$. Die reduzierte Gleichung dazu (vgl. (6) und (7)) ist $\hat{x} = x^{(n)}(t) = f(t)$. Der Resonanz- bzw. Ausnahmefall liegt vor, wenn der Mittelwert $\frac{1}{p}\int\limits_0^p f(t)\, dt$ ungleich bzw. gleich Null ist.

geschieht. Im § 6 (bzw. im § 2) behandeln wir die Beziehungen zwischen den $p$-periodischen Lösungen der adjungierten (bzw. homogenen) Differentialgleichung $n$-ter Ordnung und der reduzierten adjungierten (bzw. homogenen) Differentialgleichung $(n-j)$-ter Ordnung. Schliesslich im § 7 werden einige Behauptungen über die Grössenordnungen von $x(t)$, $x'(t)$, …, $x^{(n-1)}(t)$ im Resonanzfalle bewiesen.

## § 2 HILFSBETRACHTUNGEN

Es sei nun vorausgesetzt, dass (1) die Form

$$L[x] \equiv x^{(n)} + a_1(t)\, x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-j}(t)\, x^{(j)} = f(t) \quad (1 \leqq j \leqq n-1) \tag{4}$$

wo

$$a_{n-j}(t) \not\equiv 0 \tag{5}$$

hat. Es liegt nahe, dass das Verhalten der Lösungen $x(t)$ der Gleichung (4) auf das Verhalten der Funktionen

$$\hat{x}(t) = x^{(j)}(t) \tag{6}$$

zurückführt; die $\hat{x}(t)$ genügen dabei der reduzierten Differentialgleichung

$$\hat{x}^{(n-j)} + a_1(t)\, \hat{x}^{(n-j-1)} + \ldots + a_{n-j}(t)\, \hat{x} = \hat{f}(t). \tag{7}$$

Die homogene Differentialgleichung

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-j}(t)\, y^{(j)} = 0 \tag{8}$$

führt man durch die Substitution

$$\hat{y}(t) = y^{(j)}(t) \tag{9}$$

in die reduzierte homogene Differentialgleichung

$$\hat{L}[\hat{y}] \equiv \hat{y}^{(n-j)} + a_1(t)\, \hat{y}^{(n-j-1)} + \ldots + a_{n-j}(t)\, \hat{y} = 0 \tag{10}$$

über. Die zu (8) adjungierte Differentialgleichung lautet

$$\overline{L}[z] \equiv (-1)^n z^{(n)} + (-1)^{(n-1)} (a_1(t)z)^{(n-1)} + \ldots + (-1)^j (a_{n-j}(t)z)^{(j)} = 0 \tag{11}$$

und für die zu (10) adjungierte Differentialgleichung erhalten wir

$$\overline{\hat{L}}[\hat{z}] = (-1)^{n-j}\hat{z}^{(n-j)} + (-1)^{n-j-1}(a_1(t)\, \hat{z})^{n-1-j} + \ldots + a_{n-j}\hat{z} = 0. \tag{12}$$

Die Differentialgleichungen (4), (8), (11), bzw. (7), (10), (12) führen wir jetzt in äquivalente Differentialgleichungs-Systeme über. Dazu benutzen wir die Vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ x' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{(n-1)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(t) \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{x}' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{x}^{(n-j-1)} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{y}' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{y}^{(n-j-1)} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{z}_{n-j} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{f}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(t) \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Wir bekommen so die Systeme

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \tag{15}$$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y} \tag{16}$$

$$\mathbf{z}' = -\mathbf{A}^T(t)\,\mathbf{z} \tag{17}$$

bzw. Systeme

$$\hat{\mathbf{x}}' = \mathbf{A}(t)\,\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{f}}(t) \tag{18}$$

$$\hat{\mathbf{y}}' = \hat{\mathbf{A}}(t)\,\hat{\mathbf{y}} \tag{19}$$

$$\hat{\mathbf{z}}' = -\hat{\mathbf{A}}^T(t)\,\hat{\mathbf{z}}; \tag{20}$$

dabei bedeuten $\hat{\mathbf{A}}(t)$, $\mathbf{A}(t)$ die Matrizen

und

$$\hat{\mathbf{A}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_{n-j}(t), & -a_{n-j-1}(t), & \dots & -a_2(t), & -a_1(t) \end{bmatrix}, \tag{21}$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & 0 \end{matrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{A}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{A}}(t) \end{bmatrix} \tag{22}$$

wo **0** Nullmatrizen eines passenden Typs sind (vgl. [2], (17) mit $\alpha_\nu = 0$.)
Es sei

$$\hat{\mathbf{Y}}(t) = (\hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_2, \dots, \mathbf{y}_{n-j}) = \begin{bmatrix} \hat{y}_1, & \hat{y}_2, & \dots, & \hat{y}_{n-j} \\ \hat{y}_1', & \hat{y}_2', & \dots, & \hat{y}_{n-j}' \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \hat{y}_1^{(n-j-1)}, & \hat{y}_2^{(n-j-1)}, & \dots, & \hat{y}_{n-j}^{(n-j-1)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} y_1^{(j)}, & y_2^{(j)}, & \dots, & y_{n-j}^{(j)} \\ y_1^{(j+1)}, & y_2^{(j+1)}, & \dots, & y_{n-j}^{(j+1)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}, & \dots, & y_{n-j}^{(n-1)} \end{bmatrix} \tag{23}$$

eine Matrix, die aus einem Fundamentalsystem der Lösungen des reduzierten homogenen Systems (19) zusammengestellt ist. Für $\hat{\mathbf{Y}}(t)$ haben wir dann die folgende Darstellung (vgl. [1], (6) und (31)).

$$\hat{\mathbf{Y}}(t) = \hat{\Phi}(t) \,.\, \mathrm{e}^{\hat{\mathbf{K}}t} = \sum_{\nu=1}^{\hat{s}} {}^{\nu}\hat{\Phi}(t) \,.\, \mathrm{e}^{\mathbf{K}_{\nu} \cdot t} \tag{24}$$

mit den Teilfundamentalsystemen

$$^{\nu}\hat{\mathbf{Y}}(t) = \left[\begin{array}{c|ccc|c} & \hat{y}_{(\nu)} & \ldots & \hat{y}_{[\nu]} & \\ & \cdot & & \cdot & \\ \mathbf{0} & \cdot & & \cdot & \mathbf{0} \\ & \cdot & & \cdot & \\ & \hat{y}_{(\nu)}^{(n-j-1)} & \ldots & \hat{y}_{[\nu]}^{(n-j-1)} & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|ccc|c} & y_{(\nu)}^{(j)} & \ldots & y_{[\nu]}^{(j)} & \\ & \cdot & & \cdot & \\ \mathbf{0} & \cdot & & \cdot & \mathbf{0} \\ & \cdot & & \cdot & \\ & y_{(\nu)}^{(n-1)} & \ldots & y_{[\nu]}^{(n-1)} & \end{array}\right] \tag{25}$$

und den periodischen Teilmatrizen

$$^{\nu}\hat{\Phi}(t) = \left[\begin{array}{c|ccc|c} & {}_1\hat{\varphi}_{(\nu)} & \ldots & {}_1\hat{\varphi}_{[\nu]} & \\ & \cdot & & \cdot & \\ \mathbf{0} & \cdot & & \cdot & \mathbf{0} \\ & \cdot & & \cdot & \\ & {}_{n-j}\hat{\varphi}_{(\nu)} & \ldots & {}_{n-j}\hat{\varphi}_{[\nu]} & \end{array}\right]. \tag{26}$$

Wir setzen wieder voraus (vgl. [1], (9)), dass

$$\alpha_{\nu} \begin{cases} = 0 & \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, \hat{\varrho} \\ \neq 0 & \text{für} \quad \nu = \hat{\varrho} + 1, \ldots, \hat{s} \end{cases} \tag{27}$$

wobei, wie immer in Spezialfällen, $\hat{\varrho}$ auch gleich Null oder $\hat{s}$ sein kann. Damit ist es möglich, die Matrix $\hat{\mathbf{Y}}(t)$ zu einer Matrix des Fundamentalsystems der Lösungen $\mathbf{Y}(t)$ von (8) folgenderweise zu erweitern (vgl. (22))

$$\mathbf{Y}(t) = (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n) = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1, & t, & \frac{t^2}{2!}, \ldots, & \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} & y_1, & \ldots, & y_{n-j} \\ & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & & & 1, \; t & y_1^{(j-1)}, & \ldots, & y_{n-j}^{(j-1)} \\ & & & 1 & & & \\ \hline & & & & y_1^{(j)}, & \ldots, & y_{n-j}^{(j)} \\ & & \mathbf{0} & & \cdot & & \cdot \\ & & & & \cdot & & \cdot \\ & & & & y_1^{(n-1)}, & \ldots, & y_{n-j}^{(n-1)} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{D}_0 t \atop e & \mathbf{Y}^*(t) \\ \hline \mathbf{0} & \hat{\mathbf{Y}}(t) \end{array}\right]. \tag{28}$$

Die $j$-te, $(j-1)$-te usw. Zeile der rechteckigen Matrix $\mathbf{Y}^*(t)$ in (28) entstehen durch fortschreitendes Integrieren der ersten Zeile von $\hat{\mathbf{Y}}(t)$; die Integrationskonstanten können dabei noch beliebig gewählt werden. Analog zu (25) stellen wir $\mathbf{Y}^*(t)$ als Summe von Teilmatrizen dar:

$$\mathbf{Y}^*(t) = \sum_{\nu=1}^{\hat{s}} {}^{\nu}\mathbf{Y}^*(t). \tag{29}$$

*Satz 1*: Wenn die reduzierte Diffrentialgleichung (10) genau $\hat{\varrho}$ unabhängige $p$-periodische Lösungen $\hat{y}_{(1)}, \hat{y}_{(2)}, \ldots, \hat{y}_{(\hat{\varrho})}$ besitzt, dann:
1) ist für alle $\hat{y}_{(\nu)}(t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \hat{\varrho})$

$$\int_0^p \hat{y}_{(\nu)}(t)\,\mathrm{d}t = 0, \tag{30}$$

so besitzt die Differentialgleichung (8) genau $\hat{\varrho}+1$ unabhängige $p$-periodische Lösungen.
2) Ist mindestens für ein $\nu$ unter den Werten $1, 2, \ldots, \hat{\varrho}$

$$\frac{1}{p}\int_0^p \hat{y}_{(\nu)}(t)\,\mathrm{d}t = \hat{a}_\nu \neq 0, \tag{31}$$

so besitzt die Differentialgleichung (8) genau $\hat{\varrho}$ unabhängige $p$-periodische Lösungen.

*Beweis*: Im Falle 1) kann man durch $j$-malige Integration jeder der Funktionen $\hat{y}_{(\nu)}(t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \hat{\varrho})$ genau eine $p$-periodische Funktion $y_{(\nu)}(t)$ vom Mittelwert Null erhalten. Die Funktionen $y_\nu(t)$ sind dann linear unabhängig. Weiter bekommen wir, von der trivialen Lösung $\hat{y}_0(t) \equiv 0$ ausgehend, noch eine $p$-periodische Lösung von (8), und zwar $y_0(t) \equiv 1$.
Im Falle 2) kann man lineare Kombinationen der Lösungen $\hat{y}_{(1)}, \ldots, \hat{y}_{(\hat{\varrho})}$ bestimmen, die spezielle Mittelwerte (31) besitzen. Wir werden diese Kombinationen wieder mit $\hat{y}_{(1)}, \hat{y}_{(2)}, \ldots, \hat{y}_{(\hat{\varrho})}$, bezeichnen und ihnen die Mittelwerte

$$\frac{1}{p}\int_0^p \hat{y}_{(1)}(t)\,\mathrm{d}t = 1, \qquad \int_0^p \hat{y}_{(\nu)}(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad (\nu = 2, \ldots, \hat{\varrho}). \tag{32}$$

vorschreiben. Durch $j$-malige Integration der Lösungen $\hat{y}_{(\nu)}$ $(\nu = 2, \ldots, \hat{\varrho})$ erhält man wie im Falle 1) $\hat{\varrho}-1$ $p$-periodische unabhängige Lösungen der Gleichung (8); diese Lösungen haben wieder den Mittelwert Null. Durch Integration von $\hat{y}_{(1)}(t)$ würde man eine nicht $p$-periodische Lösung bekommen. Die triviale Lösung $\hat{y}_0(t) \equiv 0$ führt auch in diesem Falle zu der unabhängigen $p$-periodischen Lösung $y_{(0)}(t) \equiv 1$. Zum Schluss zeigen wir noch, dass (8) keine weiteren $p$-periodischen Lösungen haben kann. Ist nämlich $y(t)$ irgendwelche nichtkonstante $p$-periodische Lösung von (8), so ist auch $\hat{y}(t) = y^{(j)}(t)$ eine $p$-periodische Lösung der reduzierten Differentialgleichung (10), dabei hat $\hat{y}(t)$ den Mittelwert Null. Die Lösung $\hat{y}(t)$ muss also eine lineare Kombination der Lösungen $\hat{y}_{(\nu)}(t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \hat{\varrho})$ sein.

## § 3 DEFINITION EINER SPEZIELLEN NORMALFORM DES FUNDAMENTALSYSTEMS DER REDUZIERTEN HOMOGENEN DIFFERENTIALGLEICHUNG

Das Ziel unserer Überlegungen ist die Diskussion des Systems (15). Dazu brauchen wir die in (28) auftretende rechteckige Matrix $\mathbf{Y}^*(t)$ auf eine möglichst einfache und übersichtliche Form zu bringen. Zu diesem Zweck werden wir die Matrix (23) des Fundamentalsystems von (10) auf eine spezielle Normalform überführen, die wir durch folgende Eigenschaften der in (24) auftretenden Matrizen (26) kennzeichnen.

*Definition*: 1. Für $\nu = 1, 2, \ldots, \hat{\varrho}$, d. h. bei $\alpha_\nu = 0$ sind entweder alle Mittelwerte

$$\frac{1}{p}\int_0^p \hat{\varphi}_\mu(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad (\mu = (\nu), \ldots, [\nu]), \tag{33}$$

oder es gibt einen Index $i_\nu$, $0 \leqq i_\nu \leqq \hat{m}_\nu - 1$ $(\hat{m}_\nu = [\nu] - (\nu) + 1)$, so dass

$$\frac{1}{p}\int_0^p \hat{\varphi}_{(\nu)+i_\nu}(t)\,\mathrm{d}t = 1, \qquad \frac{1}{p}\int_0^p \hat{\varphi}_{(\nu)+k}(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$
$$k = 0, 1, \ldots, \quad \hat{m}_\nu - 1, \quad k \neq i_\nu \tag{34}$$

gilt:

2. Die Elementarbestandteile sind so geordnet, dass für $\nu = 1, 2, \ldots, \lambda$ die Indizes $i_\nu$ existieren und für $\nu = \lambda + 1, \ldots, \hat{\varrho}$ (33) gilt. Für $\nu = \hat{\varrho} + 1, \ldots, s$ ist $\alpha_\nu \neq 0$; die Reihenfolge der Elementarbestandteile ist hier beliebig.

3. Die Zahlen $\hat{m}_\nu$ wachsen mit $\nu = 1, 2, \ldots, \lambda$ monoton:

$$\hat{m}_\nu > \hat{m}_{\nu-1}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \lambda) \tag{35}$$

und es gelten die Ungleichungen

$$i_\nu > i_{\nu-1}, \quad \hat{m}_\nu - i_\nu > \hat{m}_{\nu-1} - i_{\nu-1} \quad \text{für} \quad \nu = 2, \ldots, \lambda. \tag{36}$$

Die Elementarbestandteile, für welche alle Mittelwerte verschwinden, sind ebenfalls nach wachsenden Werten von $\hat{m}_\nu$ geordnet; hier gilt nur

$$\hat{m}_\nu \geqq \hat{m}_{\nu-1}, \qquad (\nu = \lambda + 2, \ldots, \hat{\varrho}). \tag{37}$$

Für die Herstellung dieser speziellen Normalform benötigen wir einige Begriffe und Hilfssätze.

Es sei für $\alpha_\nu = 0$ (vgl. (24) und (28))

$${}_1\hat{\mathbf{Y}}_\nu^T = (\hat{y}_{(\nu)}, \ldots, \hat{y}_{[\nu]}) = (\hat{\varphi}_{(\nu)}, \ldots, \hat{\varphi}_{[\nu]})\,\mathrm{e}^{\hat{\mathbf{D}}_\nu t} =$$
$$= \left(\hat{\varphi}_{(\nu)}, t\hat{\varphi}_{(\nu)} + \hat{\varphi}_{(\nu)+1}, \ldots, \frac{t^{\hat{m}_\nu - 1}}{(\hat{m}_\nu - 1)!}\hat{\varphi}_{(\nu)} + \ldots + \hat{\varphi}_{[\nu]}\right) \tag{38}$$

ein zu $\nu$-tem Elementarbestandteil gehörendes Teilfundamentalsystem und es existiere ein $i_\nu$ so, dass

$$\frac{1}{p}\int_0^p \varphi_\mu(t)\,\mathrm{d}t = l_\mu \begin{cases} = 0 & \text{für } (\nu) \leqq \mu < (\nu) + i_\nu \\ \neq 0 & \text{für } \mu = (\nu) + i_\nu \\ \text{beliebig} & \text{für } \mu > (\nu) + i_\nu \end{cases} \tag{39}$$

gilt. Es ist leicht einzusehen, dass der folgende Hilfssatz 1 richtig ist.

*Hilfssatz 1*: **Es gibt eine reguläre Matrix**

$$ {}^{\nu}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{(\nu)} & c_{(\nu)+1} & \cdots & c_{[\nu]} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & c_{(\nu)+1} \\ & & & c_{(\nu)} \end{bmatrix} = c_{(\nu)} \hat{\mathbf{I}}_{\nu} + c_{(\nu)+1} \hat{\mathbf{D}}_{\nu} + \ldots + c_{[\nu]} \hat{\mathbf{D}}_{\nu}^{\hat{m}_{\nu}-1}, \qquad (40) $$

(vgl. die Bezeichnung (22) so, dass der transformierte Fundamentalsystem ${}_1\hat{\mathbf{y}}_{\nu}^{T} \,.\, {}^{\nu}\mathbf{C}$ die Eigenschaft 1 hat.
Ferner gilt

*Hilfssatz 2*: Es sei ausser dem Teilfundamentalsystem (38) noch ein anderes Teilfundamentalsystem

$$ {}_1\dot{\mathbf{y}}_k^T = \left(\hat{\varphi}_{(k)}, t\hat{\varphi}_{(k)} + \hat{\varphi}_{(k)+1}, \ldots, \frac{t^{\hat{m}_k-1}}{(\hat{m}_k - 1)!} \hat{\varphi}_{(k)} + \ldots + \hat{\varphi}_{[k]}\right), \qquad (k \neq \nu), \quad (41) $$

gegeben so, dass im Gegensatz zu (40)

$$ \hat{m}_k - i_k \geqq \hat{m}_\nu - i_\nu \qquad (42) $$

gilt und gleichzeitig

$$ 0 \leqq i_\nu - i_k \leqq \hat{m}_\nu . \qquad (43) $$

(Die rechte Ungleichung in (43) ist trivialerweise erfüllt.) Dann ist es möglich durch Überlagerung dieser zwei Systeme ein neues Teilfundamentalsystem ${}_1\hat{\mathbf{y}}_{\nu}^{*T}$ analog (38) zu bilden, für welches die $p$-periodischen Funktionen $\hat{\varphi}_{(\nu)}^*, \ldots, \hat{\varphi}_{[\nu]}^*$ sämtlich den Mittelwert Null haben. Das Fundamentalsystem ${}_1\hat{\mathbf{y}}_k^T$ bleibt dabei unverändert.

*Beweis*: Bildet man die neuen Lösungen $\hat{y}_\lambda^*$ von (10) nach der Vorschrift

$$ \hat{y}_\mu^* = \begin{cases} \hat{y}_\mu & \text{für } \mu = (\nu),\ (\nu) + 1, \ldots, (\nu) + i_\nu - i_k - 1 \\ \hat{y}_\mu - \hat{y}_{(k)+\mu-((\nu)+i_\nu-i_k)} & \text{für } \mu = (\nu) + i_\nu - i_k,\ (\nu) + i_\nu - i_k + 1, \ldots \\ & \quad \ldots, (\nu) + \hat{m}_\nu - 1 = [\nu], \end{cases} \qquad (44) $$

so folgt vermöge (24) für die zugehörigen Funktionen

$$ \hat{\varphi}_\mu^* = \begin{cases} \hat{\varphi}_\mu & \text{für } \mu = (\nu), (\nu) + 1, \ldots, (\nu) + i_\nu - i_k - 1 \\ \hat{\varphi}_\mu - \hat{\varphi}_{(k)+\mu-((\nu)+i_\nu-i_k)} & \text{für } \mu = (\nu) + i_\nu - i_k,\ (\nu) + i_\nu - i_k + 1, \ldots \\ & \quad \ldots, (\nu) + \hat{m}_\nu - 1 = [\nu]. \end{cases} \qquad (45) $$

Dabei garantiert (43) für (44) und (45) genau die richtigen Werte von $\mu$ und aus (42) folgt

$$ (k) \leqq (k) + \mu - ((\nu) + i_\nu - i_k) \leqq [k]. $$

Man sieht leicht, dass die Funktionen $\hat{\varphi}_\lambda^*$ aus (45) den Mittelwert Null haben, da für $\mu = (\nu) + i_\nu$ gleichzeitig $(k) + \mu - ((\nu) + i_\nu - i_k) = (k) + i_k$ ist. Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Nach den Hilfssätzen 1 und 2 können wir jetzt die spezielle Normalform durch Erfüllung der Bedingungen 1, 2 und 3 aus der Definition herstellen. Jeden Elementarbestandteil kennzeichnen wir durch ein Zahlenpaar $(\hat{m}_\nu,\ i_\nu)$ bzw.

$(\hat{m}_\nu, \hat{m}_\nu)$ falls kein $i_\nu$ existiert. Wir rechnen dann noch die Differenzen $\hat{m}_\nu - i_\nu$ aus und ordnen jedem Elementarbestandteil das Zahlentripel $(\hat{m}_\nu, i_\nu, \hat{m}_\nu - i_\nu)$ bzw. $(\hat{m}_\nu, \hat{m}_\nu, 0)$ zu. Zunächst bestimmen wir die Zahlentripel mit dem kleinsten $i_\nu$. Unter diesen wählen wir nun das mit dem grössten Werte der Differenz $\hat{m}_\nu - i_\nu$ aus. Dann ordnen wir die Elementarbestandteile bzw. die Zahlentripel $(\hat{m}_\nu, i_\nu, \hat{m}_\nu - i_\nu)$ so um, dass das eben ausgewählte Zahlentripel an der Spitze stehe; das betreffende $\nu$ setzen wir gleich 1. Nach Hilfssatz 2 kann man alle anderen Elementarbestandteile, für die (42) und (43) mit $k = 1$ erfüllt sind, durch Überlagerung mit dem ersten Elementarbestandteil so umwandeln, dass für sie kein $i_\nu$ mehr existiert. Dabei bleibt der bereits bestimmte erste Elementarbestandteil unverändert. Da in jedem Falle $i_\nu \geqq i_1$ und für $i_\nu = i_1$ $\hat{m}_\nu - i_\nu \leqq \hat{m}_1 - i_1$ ist, müssen die evtl. übrigleibenden Zahlentripel, für welche noch ein $i_\nu$ existiert, die Bedingungen $i_\nu > i_1$ und $\hat{m}_\nu - i_\nu > \hat{m}_1 - i_1$ erfüllen. Aus diesen Zahlentripel wähle man nun wieder ein, für das wir $\nu = 2$ setzen werden, so aus, dass bei minimalem $i_\nu$ die Differenz $\hat{m}_\nu - i_\nu$ maximal ist. Wiederum kann man die Elementarbestandteile, für die (42) und (43) mit $k = 2$ gelten, durch Überlagerung nach Hilfssatz 2 so umwandeln, dass für sie kein $i_\nu$ existiert, während die Zahlentripel, für welche evtl. noch ein $i_\nu$ existiert, die Bedingungen

$$i_\nu > i_2 > i_1 \quad \text{und} \quad \hat{m}_\nu - i_\nu > \hat{m}_2 - i_2 > \hat{m}_1 - i_1$$

erfüllen. In dieser Weise fahren wir fort und ordnen damit die Elementarbestandteile bzw. Zahlentripel $(\hat{m}_\nu, i_\nu, \hat{m}_\nu - i_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \lambda)$ so um, dass für $\nu = 2, \ldots, \lambda$ (natürlich ist $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$ möglich)

$$i_\nu > i_{\nu-1}, \qquad \hat{m}_\nu - i_\nu > \hat{m}_{\nu-1} - i_{\nu-1}$$

gilt, woraus unmittelbar auch noch $\hat{m}_\nu > \hat{m}_{\nu-1}$ folgt. Dann bleiben für $\alpha_\nu = 0$ evtl. noch die Elementarbestandteile mit den Kennzeichnungstripeln $(\hat{m}_\nu, \hat{m}_\nu, 0)$ für $\nu = \lambda + 1, \ldots, \varrho$ übrig, die so geordnet werden können, dass $\hat{m}_\nu \geqq \hat{m}_{\nu-1}$ $(\nu = \lambda + 2, \ldots, \varrho)$ gilt. Die Elementarbestandteile mit $\alpha_\nu \neq 0$ dürfen unverändert bleiben. Damit ist die spezielle Normalform hergestellt.

## § 4 ERGÄNZUNG DER SPEZIELLEN NORMALFORM DES FUNDAMENTALSYSTEMS DER REDUZIERTEN HOMOGENEN DIFFERENTIALGLEICHUNG ZU EINEM FUNDAMENTALSYSTEM DER URSPRÜNGLICHEN DIFFERENTIALGLEICHUNG

Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis von

*Satz 2*: Von der speziellen Normalform (23) bzw. (24) des Fundamentalsystems der Lösungen der Gleichung (10) ausgehend, kann man zu einen Fundamentalsystem

$$\mathbf{Y}(t) = \Phi(t) \,.\, \mathbf{H}(t) \tag{46}$$

der Lösungen von (8) gelangen, wobei

$$\mathbf{H}(t) = e^{\mathbf{K}t}, \qquad \Phi(t + p) = \Phi(t) \tag{47}$$

ist, aber die konstante Matrix $\mathbf{K}$ braucht nicht notwendig die Jordansche Normalform zu haben (vgl. auch (54) und (57)).

Der Beweis muss in mehreren Schritten geführt werden. Zunächst gilt, wie man leicht einsieht

*Satz 3*: Es gelte (33) im Falle $\alpha_\nu = 0$ für alle Werte von $\mu = (\nu), \ldots, [\nu]$, sowie auch im Falle $\alpha_\nu \neq 0$ [und damit $\alpha_\nu \neq \frac{2k\pi i}{p}$ — vgl. [2], (18)). Dann kann man die Teil-Lösungsmatrix (vgl. (25)) von (10) durch eine Matrix ${}^\nu\mathbf{Y}^*$ zu einer Teil-Lösungsmatrix von (8) ergänzen und zwar so, dass wieder

$$
{}^\nu\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} {}^\nu\mathbf{Y}^* \\ {}^\nu\hat{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} = e^{\alpha_\nu t} \begin{bmatrix} {}^\nu\Phi^* \\ {}^\nu\hat{\Phi} \end{bmatrix} . e^{\hat{\mathbf{D}}_\nu t} = {}^\nu\Phi(t) . e^{\hat{\mathbf{K}}_\nu . t} \tag{48}
$$

gilt.

Ferner gilt

*Satz 4*: Wenn im Falle $\alpha_\nu = 0$ die Relationen (34) gelten, gilt anstatt (48)

$$
{}^\nu\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} {}^\nu\mathbf{Y}^* \\ {}^\nu\hat{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} \text{mit } {}^\nu\mathbf{Y}^* = {}^\nu\tilde{\Phi}^* . e^{\hat{\mathbf{D}}_\nu t} + {}^\nu\mathbf{H}^*(t) \tag{49}
$$

mit

$$
{}^\nu\mathbf{H}^*(t) = \begin{bmatrix} 0_1, \ldots, 0_{i_\nu}, \frac{t^j}{j!}, \frac{t^{j+1}}{(j+1)!}, \ldots, \frac{t^{j+\hat{m}_\nu - i_\nu - 1}}{(j+\hat{m}_\nu - i_\nu - 1)!} \\ \vdots \\ 0_1, \ldots, 0_{i_\nu}, t, \quad \frac{t^2}{2!} \quad \ldots, \quad \frac{t^{\hat{m}_\nu - i_\nu}}{(\hat{m}_\nu - i_\nu)!} \end{bmatrix},
$$

$$
\frac{1}{p} \int_0^p {}^\nu\tilde{\Phi}^*(t)\, dt = 0. \tag{50}
$$

Anstatt (49) kann man auch

$$
{}^\nu\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} {}^\nu\tilde{\Phi}^* \\ \hline {}^\nu\hat{\Phi} \end{bmatrix} e^{\hat{\mathbf{D}}_\nu t} + \begin{bmatrix} {}^\nu\mathbf{H}^* \\ \hline \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{51}
$$

schreiben.

Schliesslich kann man noch durch $j$-malige Integration des trivialen Lösungssystems

$$
{}_1\mathbf{y}_0^T = (0_1, \ldots, 0_j)
$$

den Zeilenvektor

$$
{}_1\mathbf{y}_0^T \left(1, t, \ldots, \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\right) \tag{52}
$$

gewinnen, aus dem sich die Teil-Lösungsmatrix

$$
{}^0\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{H}(t) \\ \hline 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{K}_0 t} \\ \hline 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{D}_0 t} \\ \hline 0 \end{bmatrix} \tag{53}
$$

ergibt. Durch Addition der Matrizen ${}^\nu\Phi^*$ bzw. ${}^\nu\tilde{\Phi}^*$ aus dem Satz 3 bzw. 4 bilden wir die Matrix $\Phi^*(t)$ und schreiben

$$
\Phi(t) = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & \Phi^* \\ \hline 0 & \hat{\Phi} \end{array}\right]. \tag{54}
$$

Entsprechend bilden wir (vgl. Satz 4) die Matrix $\mathbf{H}^*(t)$[2]) durch Addition der Matrizen ${}^\nu\mathbf{H}^*(t)$ (vgl. (50)) und setzen unter Beachtung von (41)

$$\mathbf{H}(t) = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{H} & \mathbf{H}^* \\ 0 & e^{\hat{\mathbf{K}}t} \end{bmatrix}. \tag{55}$$

Die Fundamental-Lösungsmatrix $\mathbf{Y}(t)$ von (8) bekommen wir dann nach (46); dabei ist $\Phi(t)$ bereits $p$-periodisch.

Um Satz 2 vollständig zu beweisen, bleibt es uns nur noch zu zeigen, dass (55) in der Form der ersten Gleichung aus (47) geschrieben werden kann. Das ist von selbst der Fall, wenn keine $\alpha_\nu = 0$ mit der Eigenschaft (34) vorliegt und also Satz 4 braucht nicht herangezogen zu werden. Wir haben in diesem Falle

$$\mathbf{H}(t) = e^{\mathbf{K}\cdot t} \tag{56}$$

mit

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K} \end{bmatrix} \tag{57}$$

und

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & 1 \\ & & & \cdot & 0 \end{bmatrix}, \tag{58}$$

wo $\mathbf{K}_0$ der Ordnung $m_0 = j$ ist. Hier hat $\mathbf{K}$ bereits die Jordansche Normalform. Im allgemeinen Falle gilt

*Satz 5*: Die Matrix $\mathbf{H}(t)$ aus (55) hat die Form

$$\mathbf{H}(t) = e^{\mathbf{K}t} \tag{59}$$

mit

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & {}^0\mathbf{K}_1 & \dots & {}^0\mathbf{K}_\lambda & 0 & \dots & 0 \\ & \hat{\mathbf{K}}_1 & & & & & \\ & & \dots & & & & \\ & & & \hat{\mathbf{K}}_\lambda & & & \\ & & & & \hat{\mathbf{K}}_{\lambda+1} & & \\ & & & & & \dots & \\ & & & & & & \hat{\mathbf{K}}_s \end{bmatrix}, \tag{60}$$

In der Formel (60) treten ausser den Elementarbestandteilen $\mathbf{K}_0, \hat{\mathbf{K}}_1, \dots, \hat{\mathbf{K}}_s$ nur noch die Matrizen

$$ {}^0\mathbf{K}_\nu = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 \dots 0, & 1, 0, \dots, & 0 \end{bmatrix}, \qquad \nu = 1, \dots, \lambda \tag{61}$$

[2]) Im Falle des Satzes 3 ist ${}^\nu\mathbf{H}^*(t)$ gleich der Nullmatrix zu setzen.

auf, mit einer Eins in der $j$-ten Zeile und $(1 + i_\nu)$-ter Spalte (wegen der Bedeutung von $\lambda$ vgl. die Definition im § 3). Im Falle $\lambda > 0$ hat (60) nicht die Jordansche Normalform.

*Beweis*: Durch Differenzieren von $\mathbf{H}(t)$ aus (60) bzw. (56) erhält man

$$\mathbf{H}'(t) = \mathbf{H}(t) \,.\, \mathbf{K}. \tag{62}$$

Da weiter

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{I} \tag{63}$$

gilt, folgt sofort (59) (vgl. z. B. [3], § 7.28 bzw. [4] § 10.6). Als Folgerung kann man noch bemerken: Für die in [2] (10) definierte konstante Matrix $\mathbf{P}$ gilt

$$\mathbf{P} = \mathbf{Y}^{-1}(0)\,\mathbf{Y}(p) = \mathbf{H}(p) = \mathrm{e}^{\mathbf{K}p}. \tag{64}$$

Um das einzusehen, braucht man neben (46) und (63) nur noch die zweite Gleichung (44) sowie auch (59) zu beachten.

## § 5 HERSTELLUNG DER JORDANSCHEN NORMALFORM FÜR K

Wir brauchen noch die in (60) definierte Matrix $\mathbf{K}$ durch Ähnlichkeitstransformation auf die Jordansche Normalform $\mathbf{K}^0$ zu bringen, d. h. eine reguläre Matrix $\mathbf{C}$ so zu finden, dass

$$\mathbf{K}^0 = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{C} \tag{65}$$

gelte. Die dazugehörige Fundamentallösungsmatrix $\mathbf{Y}^0(t)$ von (8) ist dann nach [1], (6) und [2], (12)

$$\mathbf{Y}^0(t) = \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{C} = \Phi^0(t)\,\mathrm{e}^{\mathbf{K}^0 t}. \tag{66}$$

Die folgenden Überlegungen sind nötig nur für den Fall $\lambda > 0$, da für $\lambda = 0$ $\mathbf{K}$ bereits die Jordansche Normalform hat und es genügt also $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ zu setzen. Wir werden die Ähnlichkeitstransformation in $j$ einzelnen Schritten durchführen, wobei für $\mu = 1, 2, \ldots, j$ durch die Ähnlichkeitstransformationen

$$\mathbf{C}_\mu^{-1} \,.\, {}^{\mu-1}\mathbf{K} \,.\, \mathbf{C}_\mu = {}^{\mu}\mathbf{K} \tag{67}$$

eine Kette von Matrizen ${}^{\mu}\mathbf{K}$ enstehen wird, an deren Anfang $(\mu = 0)$ die Matrix ${}^{0}\mathbf{K} = \mathbf{K}$ stehen wird und am Ende ${}^{j}\mathbf{K} = \mathbf{K}^0$. Dabei wird jede Matrix ${}^{\mu}\mathbf{K}$ die folgende Gestalt besitzen:

$${}^{\mu}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} {}^{\mu}\mathbf{D}^{\square} & {}^{\mu}\mathbf{K}_0 & {}^{\mu}\mathbf{K}_1 & {}^{\mu}\mathbf{K}_2 & \ldots & {}^{\mu}\mathbf{K}_\lambda & & 0 & \\ & {}^{\mu}\mathbf{D}_0 & & & & & & & \\ & & {}^{\mu}\mathbf{D}_1 & & & & & & \\ & & & {}^{\mu}\mathbf{D}_2 & & & & & \\ & & & & \ldots & & & & \\ & & & & & {}^{\mu}\mathbf{D}_\lambda & & & \\ & & & & & & \hat{\mathbf{K}}_{\lambda+1} & & \\ & & & & & & & \ldots & \\ & & & & & & & & \hat{\mathbf{K}}_s \end{bmatrix}; \tag{68}$$

In (68) hat die Matrix ${}^{\mu}\mathbf{D}^{\square} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ die Ordnung $j - \mu$ und die Matrizen ${}^{\mu}\mathbf{D}_{\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ für $\nu = 0, 1, \ldots, \lambda$ die Ordnungen[3])

$${}^{\mu}m_{\nu} = \hat{m}_{\nu} + \mathrm{Min}\,(\mu, i_{\nu+1}) - \mathrm{Min}\,(\mu, i_{\nu}). \tag{69}$$

Für die in (69) auftretenden und bisher nicht definierten Grössen hat man

$$\hat{m}_0 = i_0 = 0, \quad \mathrm{Min}\,(\mu, i_{\lambda+1}) = \mu \tag{70}$$

zu setzen ($i_{\lambda+1}$ braucht gar nicht definiert zu sein). Die Matrizen ${}^{\mu}\mathbf{K}_{\nu}$ aus (68) besitzen ${}^{\mu}m_{\nu}$ Spalten und $j - \mu$ Zeilen und sind für $\mu < i_{\nu+1}$ ausser einer 1 aus lauter Nullen zusammengestellt; die 1 liegt für $\mu < i_{\nu}$ in der letzten Zeile und $(1 + i_{\nu} - \mu)$-ter Spalte und für $i_{\nu} \leq \mu < i_{\nu+1}$ in der letzten Zeile und erster Spalte. Im Falle $\mu \geqq i_{\nu+1}$ ist ${}^{\mu}\mathbf{K}_{\nu}$ eine Nullmatrix.

${}^{j}\mathbf{K} = \mathbf{K}^{0}$ hat ersichtlich die Jordansche Normalform und für $\mu = 0$ hat nach (60) ${}^{0}\mathbf{K} = \mathbf{K}$ die Gestalt (68). Man beachte dazu, dass in den Formeln keine Matrix ${}^{0}\mathbf{K}_0$ bzw. ${}^{0}\mathbf{D}_0$ aufritt, da ${}^{0}m_0 = 0$.

Im folgenden werden wir den Induktionsschluss von $\mu - 1$ zu $\mu$ machen. Dazu definieren wir zu jedem $\mu = 1, 2, \ldots, j$ einen Index $L(\mu)$ in folgender Weise: Fällt $\mu$ in ein der Intervalle mit den Endpunkten $i_1, i_2, \ldots, i_{\lambda}$ (der linke Endpunkt gehört zum Intervall, der rechte nicht), so sei $i_{L(\mu)}$ der linke Intervallenpunkt. Es gilt also:

$$i_{L(\mu)} \leqq \mu < i_{L(\mu)+1} \qquad \text{für} \qquad i_1 \leqq \mu < i_{\lambda}. \tag{71a}$$

Für die noch nicht erfassten Werte von $\mu$ setzen wir

$$L(\mu) = 0 \qquad \text{für} \qquad \mu < i_{\lambda} \tag{71b}$$

$$L(\mu) = \lambda \qquad \text{für} \qquad \mu \geqq i_{\lambda}. \tag{71c}$$

Die folgenden, aus (69) fliessenden Beziehungen, seien noch angeführt:

$$j - \mu + \sum_{\nu=0}^{\lambda} {}^{\mu}m_{\nu} = j + \sum_{\nu=1}^{\lambda} \hat{m}_{\nu} = j + [\lambda], \tag{72}$$

$$j - \mu + \sum_{\nu=0}^{L(\mu)} {}^{\mu}m_{\nu} = j + \sum_{\nu=0}^{L(\mu)} \hat{m}_{\nu} = j + [L(\mu)] \tag{73}$$

$${}^{\mu}m_{\nu} = \hat{m}_{\nu} \qquad \text{für} \qquad \nu > L(\mu) \tag{74}$$

(zu (72) wurde noch [1], (11) beachtet).

[3]) Man beachte die Definition zu Beginn vom § 3.

Es ist nützlich, die Matrix (68) für $\mu > 0$ noch einmal ausführlich zu schreiben:

$$
{}^{\mu}\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
{}^{\mu}\mathbf{D}_{\square} & & 0 & & & {}^{\mu}\mathbf{K}_{L(\mu)} & {}^{\mu}\mathbf{K}_{L(\mu)+1} & \cdots & {}^{\mu}\mathbf{K}_{\lambda} & & 0 & \\
& {}^{\mu}\mathbf{D}_{0} & & & & & & & & & & \\
& & {}^{\mu}\mathbf{D}_{1} & & & & & & & & & \\
& & & \cdots & & & & & & & & \\
& & & & {}^{\mu}\mathbf{D}_{L(\mu)-1} & & & & & & & \\
& & & & & {}^{\mu}\mathbf{D}_{L(\mu)} & & & & & & \\
& & & & & & {}^{\mu}\mathbf{D}_{L(\mu)+1} & & & & & \\
& & & & & & & \cdots & & & & \\
& & & & & & & & {}^{\mu}\mathbf{D}_{\lambda} & & & \\
& & & & & & & & & \hat{\mathbf{K}}_{\lambda+1} & & \\
& & & & & & & & & & \cdots & \\
& & & & & & & & & & & \hat{\mathbf{K}}_{\hat{s}}
\end{bmatrix}. \tag{75}
$$

Die nun zu konstruierenden Matrizen $\mathbf{C}_{\mu}$ aus (67) haben eine unterschiedliche Bauart je nachdem, ob die Indizes $\mu - 1$ und $\mu$ dem gleichen oder verschiedenen Intervallen (71a, b, c) angehören.

*1. Fall*: Es sei

$$L(\mu - 1) = L(\mu), \tag{76}$$

d. h.

$$i_{L(\mu-1)} = i_{L(\mu)} \leqq \mu - 1 < \mu < i_{L(\mu-1)+1} = i_{L(\mu)+1}$$
$$\text{für} \quad i_1 < \mu - 1 < \mu < i_{\lambda} \tag{77a}$$

oder in den beiden Grenzfällen

$$0 \leqq \mu - 1 < \mu < i_1 \quad \text{für} \quad \mu < i_1, \tag{77b}$$
$$i_{\lambda} \leqq \mu - 1 < \mu \quad \text{für} \quad \mu - 1 \geqq i_{\lambda}. \tag{77c}$$

In diesem Falle setzen wir

$$\mathbf{C}_{\mu} = \mathbf{C}_{\mu}^{*} \,.\, V_{\mu}, \tag{78}$$

wobei zunächst

$$
\mathbf{C}_{\mu}^{*} = \begin{bmatrix}
{}^{\mu-1}\mathbf{I}_{\square} & & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & {}^{\mu}\mathbf{C}_{L(\mu-1)-1} & \cdots & {}^{\mu}\mathbf{C}_{\lambda} & \mathbf{0} & & \\
& {}^{\mu-1}\mathbf{I}_{0} & & & & & & & & & & \\
& & {}^{\mu-1}\mathbf{I}_{1} & & & & & & & & & \\
& & & \cdots & & & & & & & & \\
& & & & {}^{\mu-1}\mathbf{I}_{L(\mu-1)-1} & & & & & & & \\
& & & & & {}^{\mu-1}\mathbf{I}_{L(\mu-1)} & & & & & & \\
& & & & & & {}^{\mu-1}\mathbf{I}_{L(\mu-1)+1} & & & & & \\
& & & & & & & \cdots & & & & \\
& & & & & & & & {}^{\mu-1}\mathbf{I}_{\lambda} & & & \\
& & & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & & \cdots & \\
& & & & & & & & & & & 1
\end{bmatrix} \tag{79}
$$

ist. Die Ordnungen der Einheitsmatrizen ${}^{\mu-1}\mathbf{I}_{\square}, {}^{\mu-1}\mathbf{I}_0, \ldots, {}^{\mu-1}\mathbf{I}_\lambda$ entsprechen den Ordnungen der Teilmatrizen ${}^{\mu-1}\mathbf{D}_{\square}, {}^{\mu-1}\mathbf{D}_0, \ldots, {}^{\mu-1}\mathbf{D}_\lambda$ aus der Matrix ${}^{\mu-1}\mathbf{K}$ (vgl. (68)). Wie es bereits aus (79) ersichtlich ist, ist ${}^{\mu}\mathbf{C}_\nu$ eine Nullmatrix, wenn ${}^{\mu-1}\mathbf{K}_\nu$ eine Nullmatrix ist. Die übrigen Matrizen ${}^{\mu}\mathbf{C}_\nu$ rechnen wir nach der Vorschrift

$$ {}^{\mu}\mathbf{C}_\nu = {}^{\mu-1}\mathbf{K}_\nu \, . \, {}^{\mu-1}\mathbf{D}_\nu^T, \tag{80} $$

aus, insbesondere folgt aus (80), dass auch ${}^{\mu}\mathbf{C}_{L(\mu-1)}$ eine Nullmatrix ist. Im Vergleich mit ${}^{\mu-1}\mathbf{K}_\nu$ $(\nu > L(\mu - 1))$ ist in ${}^{\mu}\mathbf{C}_\nu$ die 1 in der letzten Zeile um eine Stelle nach links verschoben. Bei ${}^{\mu-1}\mathbf{K}\mathbf{C}_\mu$ erhält man zusätzlich zu den Einsen aus ${}^{\mu-1}\mathbf{K}_\nu$ $(\nu > L(\mu - 1))$ noch eine Eins, die um eine Stelle nach links verschoben wird. Die Matrix ${}^{\mu}\mathbf{C}_\nu^{-1}$ entsteht aus ${}^{\mu}\mathbf{C}_\nu$ indem man die Einsen aus ${}^{\mu}\mathbf{C}_\nu$ durch $-1$ ersetzt; es fallen also in $\mathbf{C}_\mu^{-1}{}^{\mu-1}\mathbf{K}\mathbf{C}_\mu$ alle Einsen in der $(j - \mu)$-ten Zeile von ${}^{\mu-1}\mathbf{K}\mathbf{C}_\mu$ weg bis auf die Eins in der ersten Spalte von ${}^{\mu-1}\mathbf{K}_{L(\mu-1)}$ im Falle $\mu > 1$.

Die Matrix $\mathbf{C}_\mu^{*-1}\, {}^{\mu-1}\mathbf{K}\mathbf{C}_\mu^* = {}^{\mu}\mathbf{K}^*$ hat also die Eigenschaft, dass die für $\nu > L(\mu - 1)$ in den Matrizen $\mathbf{K}^{\mu-1}{}_\nu$ in einer zur Hauptdiagonale-parallelen Schrägzeile stehenden Einsen um eine Stelle nach links oben geschoben werden, während alle anderen Elementarbestandteile der Matrix ${}^{\mu-1}\mathbf{K}$ erhalten bleiben. Insbesondere bleibt für $\mu > 1$ die Eins in der linken unteren Ecke von ${}^{\mu-1}\mathbf{K}_{L(\mu-1)}$ fest.

Anschliessend führen wir eine weitere Ähnlichkeitstransformation mittels der „Vertauschungsmatrix" $\mathbf{V}_\mu$ durch. $\mathbf{V}_\mu$ entsteht aus der $n$-zeiligen Einheitsmatrix, indem man dort in die Zeilen und Spalten mit den Indizes $j - \mu + 1, j - \mu + 2, \ldots, j - \mu + 1 + \sum_{\nu=0}^{L(\mu-1)-1} {}^{\mu-1}m_\nu = r_{\mu-1}$ (in der darauffolgenden Spalte steht gerade die fragliche 1) die zyklische Umordnungsmatrix

$$ \begin{bmatrix} 0 & . & . & . & 1 \\ 1 & . & & & . \\ & \cdot & \cdot & & . \\ & & \cdot & \cdot & . \\ & & & \cdot 1 & \cdot 0 \end{bmatrix} \tag{81} $$

einfügt. Im Falle $\mu < i_1$ (d. h. $L(\mu) = 0$) braucht man keine überflüssige 1 zu beseitigen und man setzt also $\mathbf{V}_\mu = \mathbf{I}$. Wir bemerken noch, dass

$$ \mathbf{V}_\mu^{-1} = \mathbf{V}_\mu^T \tag{82} $$

gilt. In ${}^{\mu}\mathbf{K}^*\mathbf{V}_\mu$ rückt die bisher in der $(j - \mu + 1)$-ten Zeile und $(r_{\mu-1} + 1)$-ter Spalte stehende 1 unmittelbar schräg links oben, über die noch zu beseitigende 1, welche auf ihrem Platz bleibt; alle Matrizen ${}^{\mu-1}\mathbf{D}_\nu$, die wegen ihrer Lage durch (81) multipliziert werden, verschieben sich um eine Stelle nach links. In $\mathbf{V}_\mu^{-1}\, {}^{\mu}\mathbf{K}^*\, \mathbf{V}_\mu$ werden dieselben ${}^{\mu-1}\mathbf{D}_\nu$ noch um eine Stelle nach oben verschoben, die 1 in der $(j - \mu)$-ten Zeile bleibt jetzt auf ihrem Platz, während die schräg rechts darunter stehende, wegzubringende 1 rückt in ihrer Spalte in die letzte, von der entsprechenden Zeile der Einheitsmatrix verschiedene Zeile von $\mathbf{V}_\mu$. Somit wird ${}^{\mu-1}\mathbf{D}_{L(\mu-1)}$ durch eine erste Zeile und Spalte berandet zu einer Matrix um 1 grösserer Ordnung (man beachte, dass $L(\mu) = L(\mu - 1)$ ist). Resumierend können wir also das Resultat der neuen Ähnlichkeitstransformation folgendermassen beschreiben: die noch an unerwünschter Stelle stehende 1 verschiebt sich um eine Stelle nach links oben, ${}^{\mu-1}\mathbf{D}_{L(\mu-1)}$ wird links und oben

berandet (und erhöht somit ihre Ordnung um 1), die Matrizen ${}^{\mu-1}\mathbf{D}_0$, ${}^{\mu-1}\mathbf{D}_1$, $\ldots$, ${}^{\mu-1}\mathbf{D}_{L(\mu-1)-1}$ werden um eine Stelle nach links oben verschoben und die Ordnung ${}^{\mu-1}\mathbf{D}^{\square}$ erniedrigt sich um eins. ${}^{\mu}\mathbf{D}^{\square}$ hat also die Ordnung $j-\mu$ und ${}^{\mu}\mathbf{D}_{L(\mu)}$ die Ordnungen ${}^{\mu}m_{L(\mu)} = {}^{\lambda-1}m_{L(\lambda-1)}+1$. Die Ordnungen der übrigen Matrizen bleiben unverändert (vgl. (69)). Die Einsen in der $(j-\mu)$-ten Zeile sind nun so untergebracht, wie es (75) verlangt.
In diesem ersten Fall haben wir also die Matrix ${}^{\mu-1}\mathbf{K}$ durch Ähnlichkeitstransformation mittels $\mathbf{C}_\mu = \mathbf{C}^*_\mu \mathbf{V}_\mu$ in die Matrix ${}^{\mu}\mathbf{K}$ transformiert.

*2. Fall*: Nun gelte es im Gegensatz zu (76)

$$L(\mu-1) < L(\mu), \tag{83}$$

also

$$i_{L(\mu-1)} \leqq \mu - 1 < i_{L(\mu-1)+1} \leqq i_{L(\mu)} \leqq \mu < i_{L(\mu)+1} \quad \text{für} \quad i_1 \leqq \mu - 1 < \mu < i_\lambda . \tag{84a}$$

bzw.

$$0 \leqq \mu - 1 < i_1 \leqq \mu \qquad \text{für} \qquad \mu - 1 < i_1 , \tag{84b}$$

$$\mu - 1 < i_\lambda \leqq \mu \qquad \text{für} \qquad \mu \geqq i_\lambda . \tag{84c}$$

Ersichtlich gilt dann eine genauere Formel als (83)

$$L(\mu) = L(\mu-1) + 1 \qquad \text{und} \qquad i_{L(\mu)} - \mu = 0. \tag{85}$$

Zu Beginn wenden wir, wie im ersten Falle, die Ähnlichkeitstransformation mit der Matrix $\mathbf{C}^*_\mu \,.\, \mathbf{V}_\mu$ an. Als Ergebnis erhalten wir die Matrix

$${}^{\mu}_{*}\mathbf{K} = \mathbf{V}_\mu^{-1} \,.\, \mathbf{C}_\mu^{*-1} \,.\, {}^{\mu-1}\mathbf{K} \,.\, \mathbf{C}^*_\mu \,.\, \mathbf{V}_\mu , \tag{86}$$

welche Einsen in den $(j-\mu)$-ten Zeile besitzt. Diese liegen aber (vgl. die zweite Gleichheit (85)) sowohl für $\nu = L(\mu) - 1$ als auch für $\nu = L(\mu)$ in der ersten Spalte von ${}^{\mu}_{*}\mathbf{K}_\nu$. Die Matrix ${}^{\mu}_{*}\mathbf{K}$ unterscheidet sich also von ${}^{\mu}\mathbf{K}$ nur in der 1 in der $(j-\mu)$-ten Zeile und $(L(\mu)-1)$-ter Spalte; diese 1 ist in ${}^{\mu}\mathbf{K}$ nicht enthalten.
Um diese 1 zu beseitigen, führen wir anschliessend noch eine Ähnlichkeitstransformation

$$\mathbf{B}_{L(\mu)}^{-1} \,.\, {}^{\mu}_{*}\mathbf{K} \,.\, \mathbf{B}_{L(\mu)} = {}^{\mu}\mathbf{K} \tag{87}$$

durch, mittels der „Überlagerungsmatrix" $\mathbf{B}_{L(\mu)}$. Diese entsteht aus der $n$-reihigen Einheitsmatrix, in die man eine ${}^{\mu}m_{L(\mu)-1}$-reihige negative Einheitsmatrix einfügt, wie folgt:

$$\mathbf{B}_{L(\mu)} = \begin{bmatrix} {}^{\mu}\mathbf{I}_{\square} & & & & & & & & & & & \\ & {}^{\mu}\mathbf{I}_0 & & & & & & & & & & \\ & & {}^{\mu}\mathbf{I}_1 & & & & & & & & & \\ & & & \cdots & & & & & & & & \\ & & & & {}^{\mu}\mathbf{I}_{L(\mu)-1} & & & & & & & \\ & & & & -{}^{\mu}\mathbf{I}_{L(\mu)-1} & {}^{\mu}\mathbf{I}_{L(\mu)} & & & & & & \\ & & & & & & {}^{\mu}\mathbf{I}_{L(\mu)+1} & & & & & \\ & & & & & & & \cdots & & & & \\ & & & & & & & & {}^{\mu}\mathbf{I}_\lambda & & & \\ & & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & & \cdots & \\ & & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} . \tag{88}$$

In dieser Formel haben die Einheitsmatrizen dieselbe Ordnungen, wie die entsprechenden Matrizen ${}^{\mu}\mathbf{D}^{\square}$, ${}^{\mu}\mathbf{D}_0, \ldots, {}^{\mu}\mathbf{D}_{\lambda}$ in (75). $\mathbf{B}_{L(\mu)}^{-1}$ entsteht, indem man die eingefügte Matrix $-{}^{\mu}\mathbf{I}_{L(\mu)-1}$ durch die entgegengesetzte Matrix ${}^{\mu}\mathbf{I}_{I(\mu)-1}$ ersetzt. ${}^{\mu}_{*}\mathbf{K}$ hat bereits die vorgeschriebenen neuen Ordnungen der $\mathbf{D}$-Matrizen in ${}^{\mu}\mathbf{K}$. Insbesondere erhöht sich die Ordnung von ${}^{\mu-1}\mathbf{D}_{L(\mu-1)}$ um 1, während die von ${}^{\mu-1}\mathbf{D}^{\square}$ wieder um 1 kleiner wird. Das Multiplizieren von ${}^{\mu}_{*}\mathbf{K}$ durch $\mathbf{B}_{L(\mu)}$ beseitigt zwar die überflüssige 1, verschiebt aber die Matrix-${}^{\mu}\mathbf{D}_{L(\mu)-1}$ auf den Platz, wo in (88) die Matrix $-{}^{\mu}\mathbf{I}_{L(\mu)-1}$ steht. Wenn wir aber dieses Produkt jetzt durch $\mathbf{B}_{L(\mu)}^{-1}$ von links multipizieren, fällt diese Zusatzmatrix wieder aus und so wird schliesslich ${}^{\mu}\mathbf{K}$ hergestellt.[4])

Im zweiten Falle müssen wir also

$$\mathbf{C}_{\mu} = \mathbf{C}_{\mu}^{*}\mathbf{V}_{\mu}\mathbf{B}_{L(\mu)} \tag{89}$$

setzen.

Als Gesamtergebnis unserer Betrachtungen erhalten wir den folgenden

*Satz 6*: Die Matrix $\mathbf{K}$ wird durch die Ähnlichkeitstransformation (65) mittels

$$\mathbf{C} = \prod_{1}^{j} \mathbf{C}_{\mu} \tag{90}$$

auf die Jordansche Normalform

$$\mathbf{K}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0^0 & & & \\ & \mathbf{K}_1^0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{K}_s^0 \end{bmatrix} \tag{91}$$

transformiert. Die Matrizen $\mathbf{C}_{\mu}$ sind in (78) bzw. (89) mittels der Hilfsmatrizen (79) bzw. (88) und der geschilderten Hilfsmatrix $\mathbf{V}_{\mu}$ definiert. Die Ordnungen $m_{\nu}$ der Elementarbestandteile $\mathbf{K}_{\nu}^0$ sind für $0 \leqq \nu \leqq \lambda$ die folgenden (vgl. (69)):

$$m_{\nu} = \hat{m}_{\nu} + \mathrm{Min}\,(j, i_{\nu+1}) - \mathrm{Min}\,(j, i_{\nu}). \tag{92}$$

In (92) setzen wir für $\nu = \lambda$ sinngemäss (vgl. (70))

$$\mathrm{Min}\,(j, i_{\lambda+1}) = j, \tag{93}$$

und für $\nu = 0$

$$\hat{m}_0 = i_0 = 0. \tag{94}$$

Im Falle, dass $m_0 = 0$ ausfällt, entfällt der Elementarbestandteil $\mathbf{K}_0^0$. Für $\nu > \lambda$, also wenn entweder $\alpha_{\nu} \neq 0$ ist oder bei $\alpha_{\nu} = 0$ kein $i_{\nu}$ existiert, gilt trivialerweise

$$m_{\nu} = \hat{m}_{\nu}, \qquad \text{insbesondere} \qquad m_0 = j. \tag{95}$$

## § 6 ÜBER LÖSUNGEN DER ADJUNGIERTEN HOMOGENEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN n-TER ORDNUNG

Die zu $\mathbf{K}^0$ aus (91) gehörende Lösungsmatrix $\mathbf{Y}^0(t)$ von (8), lässt sich nach (66) und (90) berechnen. Da jedoch in den Bedingungen für den Teilresonanz- und

[4]) Mit Hilfe einer solchen Überlagerungsmatrix lässt sich übrigens der Beweis des Satzes einfach und übersichtlich explizite durchführen.

Teilausnahmefall (vgl. [1], (28)) die $p$-periodischen Lösungen $\mathbf{Z}(t)$ des adjungierten homogenen Systems (17) (bzw. der adjungierten homogenen Gleichung (11)) eine Rolle spielen, werden wir uns zuerst mit diesen beschäftigen. Analog zu (66) ist wegen [5], (17)

$$\mathbf{Z}^0(t) = \mathbf{Z}(t) \,.\, (\mathbf{C}^{-1})^T. \tag{96}$$

Die Transformation $\mathbf{C}$ zerlegen wir wieder in $j$ Teiltransformationen $\mathbf{C}_\mu$, der Formel (90) entsprechend

$${}^\mu\mathbf{Z}(t) = {}^{\mu-1}\mathbf{Z}(t) \,.\, (\mathbf{C}_\mu^{-1})^T. \tag{97}$$

Wir werden jetzt die Matrizen ${}^\mu\mathbf{Z}(t)$ für $\mu = 0, 1, \ldots, j$ untersuchen; die erste und die letzte unter ihnen sind die Matrizen

$${}^0\mathbf{Z}(t) = \mathbf{Z}(t), \qquad {}^j\mathbf{Z}(t) = \mathbf{Z}^0(t). \tag{98}$$

Zuerst drücken wir die Matrix ${}^\mu\mathbf{Z}(t)$ — der Bauart von ${}^\mu\mathbf{K}$ aus (68) entsprechend — als Summe von $\hat{s} + 2$ Teilmatrizen aus:

$${}^\mu\mathbf{Z}(t) = {}^\mu\mathbf{Z}^\square(t) + \sum_{\nu=0}^{\hat{s}} {}^\mu\mathbf{Z}_\nu(t). \tag{99}$$

In dieser Formel enthält ${}^\mu\mathbf{Z}^\square$ ausser Nullspalten nur die ersten $j - \mu$ Spalten von ${}^\mu\mathbf{Z}$, ${}^\mu\mathbf{Z}_0$ die nächsten ${}^\mu m_0$ Spalten, ${}^\mu\mathbf{Z}_1$ die darauffolgenden ${}^\mu m_1$ Spalten usf. Es zeigt sich nützlich noch folgende Bezeichnungen einzuführen:

$${}^\mu[[\nu]] = j - \mu + {}^\mu m_0 + {}^\mu m_1 + {}^\mu m_1 + \ldots + {}^\mu m_\nu, \qquad \mu = 0, 1, \ldots, j-1. \tag{100}$$

beim letzten Schritt ($\mu = j$) lassen wir den oberen Index fort (vgl. (92)):

$${}^j[[\nu]] = [[\nu]] = m_0 + m_1 + \ldots + m_\nu = \sum_{k=0}^{\nu} \hat{m}_k + \mathrm{Min}\,(j, i_{\nu+1}); \quad \nu = 0, 1, \ldots, \hat{s}. \tag{101}$$

Dann gilt folgender

*Satz 7*: Die $p$-periodischen Lösungen $\hat{z}_{[\nu]}(t)$ ($\nu = 1, 2, \ldots, \hat{s}$) von (12) sind in der gleichen Reihenfolge mit den Lösungen $z_{[[\nu]]}(t)$ von (11) ($\nu = 1, 2, \ldots, \hat{s}$) identisch, d. h.

$$z_{[[\nu]]}(t) = \hat{z}_{[\nu]}(t) \qquad \text{für} \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \hat{s}. \tag{102}$$

*Beweis*: In der Matrix ${}^0\mathbf{Z}(t)$ aus (97) sind die $p$-periodischen Lösungsvektoren, die aus den $p$-periodischen $\hat{z}_{[\nu]}(t)$ ($\nu = 1, \ldots, \hat{s}$) hervorgehen gerade die $z_{[\nu]}(t)$; sie stehen also immer genau in der letzten Spalte von ${}^0\mathbf{Z}_\nu(t)$ ($\nu = 1, 2, \ldots, \hat{s}$). Multiplizieren wir aber die Matrix ${}^{\mu-1}\mathbf{Z}(t)$ sukzessiv durch die (in vorigen Paragraphen geschilderten) Matrizen $(\mathbf{C}_\mu^{-1})^T$, $(\mathbf{V}_\mu^{-1})^T = \mathbf{V}_\mu$ und $(\mathbf{B}_{L(\mu)}^{-1})^T$ von rechts, so geht die letzte Spalte von ${}^{\mu-1}\mathbf{Z}_\nu(t)$ unverändert in die letzte Spalte von ${}^\mu\mathbf{Z}_\nu(t)$ über.
Natürlich bleibt auch die letzte Komponente dieser Spalte unverändert. Der Beweis von (102) wird durch diesen Induktionsschluss erbracht.
Im Falle $m_0 > 0$, d. h. $i_1 > 0$ oder existiert nicht, gibt es nach Satz 1 noch eine $p$-periodische Lösung von (11) mehr. Für diese gilt

*Satz 8*: Im Falle $m_0 > 0$ steht der $p$-periodische zusätzliche Lösungsvektor in der letzten Spalte von ${}^j\mathbf{Z}_0(t)$; seine letzte Komponente (die infolgedessen durch $z_{[[0]]}(t)$ bezeichnet wird) hat die Form

$$z_{[[0]]}(t) = -\sum_{\nu=1}^{\hat{s}} \sum_{\mu=(\nu)}^{[\nu]} \hat{\varphi}_\mu(t) \cdot {}_j\tilde{\varphi}_\mu(t) - \sum_{\nu=1}^{\lambda} \hat{\varphi}_{(\nu)+i_\nu-1}; \tag{103}$$

Für $\nu > \lambda$, also wenn kein $i_\nu$ existiert, fallen natürlich die letzten Summanden fort.

*Beweis*: Zunächst sei daran errinnert, dass die in (103) auftretenden Funktionen ${}_j\tilde{\varphi}_\mu$ aus den letzten ($j$-ten) Zeilen der Matrizen ${}^\nu\Phi^*$ aus (51) stammen und die Funktionen $\hat{\varphi}_\mu(t)$ aus der letzten ($(n-j)$-ten) Zeile der Matrix $\hat{\Psi}(t) = (\hat{\Phi}^{-1})^T$. Da alle diese Funktionen $p$-periodisch sind, trifft dies auch für $z_{[[0]]}(t)$ aus (103) zu.
Eine Spalte von ${}^j\mathbf{Z}_0(t) = \mathbf{Z}_0(t)$ tritt zum ersten Male als die einzige Spalte von ${}^1\mathbf{Z}_0(t)$ auf. Diese Spalte bleibt bei wachsendem $\mu$ immer an der letzten Stelle von ${}^\mu\mathbf{Z}_0(t)$ für $\mu \geqq 1$. Daraus folgt, wie im Beweise des Satzes 7, dass sie sich nicht mehr ändert. Wir haben also nur den einzigen Spaltenvektor ${}^1\mathbf{z}_0(t)$ von ${}^1\mathbf{Z}_0(t)$ zu berechnen, der in der $j$-ten Spalte von ${}^1\mathbf{Z}(t)$ steht; seine letzte Komponente ist die gewünschte Lösung $z_{[[0]]}(t)$.
Im Falle $i_1 > 0$ findet man gleich

$$z_{[[0]]}(t) = {}_nz_j(t) - \sum_{\mu=1}^{\lambda} z_{0[[\mu]]+i_\mu}(t) = {}_nz_j(t) - \sum_{\mu=1}^{\lambda} \hat{z}_{(\mu)+i_\mu-1}(t). \tag{104}$$

Es sei daran errinnert, dass der Zeilenindex der letzten Zeile $n$, bzw. $n-j$ bei den Elementen von $\mathbf{Z}$ bzw. $\hat{\mathbf{Z}}$ weggelassen wurde. Im Falle, dass kein $i_1$ existiert ($\mu > \lambda$), fällt die zweite Summe in (104) fort.
Nun ist nach [5], (17) und analog zu (28)

$$\mathbf{Z}^T(t) = \mathbf{Y}^{-1}(t) = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{D}_0 t} & \mathbf{Y}^*(t) \\ 0 & \hat{\mathbf{Y}}(t) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-\mathbf{D}_0 t} & \mathbf{Z}^{*T}(t) \\ 0 & \hat{\mathbf{Z}}^T(t) \end{bmatrix}. \tag{105}$$

Dabei ist

$$\hat{\mathbf{Z}}^T = \hat{\mathbf{Y}}^{-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{Z}^{*T} = e^{-\mathbf{D}_0 t}\mathbf{Y}^*(t)\,\hat{\mathbf{Z}}^T(t), \tag{106}$$

wie man aus der Beziehung $\mathbf{Z}^T\mathbf{Y} = \mathbf{I}$ leicht entnimmt. Beachtet man die Definition von $\mathbf{Y}^*(t)$ in (28) und die Tatsache, dass ${}_nZ_j$ in der rechten unteren Ecke von $\mathbf{Z}^{*T}(t)$ liegt, erhält man aus (106)

$${}_nz_j(t) = -\sum_{\nu=1}^{n-j} \hat{z}_\nu(t) \cdot \hat{\Theta}_\nu(t) = -\sum_{\nu=1}^{\hat{s}} \sum_{\mu=(\nu)}^{[\nu]} \hat{z}_\mu(t) \cdot \hat{\Theta}_\mu(t) \tag{107}$$

wo (vgl. (30))

$$\hat{\Theta}_\mu(t) = \int_0^t \hat{g}_\mu(\tau)\,d\tau. \tag{108}$$

gilt. Aus (104) und (107) bekommen wir die Zwischenformel

$$z_{[[0]]}(t) = -\sum_{\nu=1}^{\hat{s}} \sum_{\mu=(\nu)}^{[\nu]} \hat{z}_\mu(t)\,\hat{\Theta}_\mu(t) - \sum_{\nu=1}^{\lambda} \hat{z}_{(\nu)+i_\nu-1}(t). \tag{109}$$

Wenn wir die Bezeichnung $\mathbf{c}_{(\nu)+i_\nu-1}$ für den $\hat{m}_\nu$-dimensionalen Vektor, der ausser Nullen nur ein 1 an der $((\nu) + i_\nu - 1)$-ten Stelle hat, einführen, so können wir die $\nu$-te Teilsumme aus (109) folgendermassen ausdrücken:

$$T_\nu = \sum_{\mu=(\nu)}^{[\nu]} \hat{z}_\mu(t)\, \hat{\Theta}_\mu(t) - \hat{z}_{(\nu)+i_\nu-1}(t) = -(\hat{z}_{(\nu)}, \ldots, \hat{z}_{[\nu]}) \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \int_0^t \hat{y}_{(\nu)}(\tau)\, \mathrm{d}\tau \\ \vdots \\ \int_0^t \hat{y}_{[\nu]}(\tau)\, \mathrm{d}\tau \end{pmatrix} + \mathbf{c}_{(\nu)+i_\nu-1} \right\}$$

Beachtet man jetzt die zu [1], (55) analoge Formel für die reduzierte Differentialgleichung in ihrer Aufteilung analog (29) sowie (49) und (60), so erhält man

$$T_\nu = -(\hat{\psi}_{(\nu)}, \ldots, \hat{\psi}_{[\nu]}) \cdot \mathrm{e}^{-\hat{\mathbf{K}}_\nu^T \cdot t} \cdot \left\{ \mathrm{e}^{\hat{\mathbf{K}}_\nu^T \cdot t} \begin{bmatrix} {}_j\tilde{\varphi}_{(\nu)} \\ \vdots \\ {}_j\tilde{\varphi}_{[\nu]} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ t \\ \vdots \\ t^{\hat{m}_\nu - i_\nu}/(\hat{m}_\nu - i_\nu)! \end{bmatrix} \right\}. \tag{110}$$

Die 1 in dieser Formel stammt aus $\mathbf{c}_{(\nu)+i_\nu-1}$, als $((\nu) + i_\nu - 1)$-te Komponente des letzten Vektors. Dieser letzte Vektor ist aber gerade $\mathrm{e}^{\hat{\mathbf{K}}_\nu^T \cdot t}\mathbf{c}_{(\nu)+i_\nu-1}$, so, dass man noch die Formel

$$T_\nu = -(\hat{\psi}_{(\nu)}, \ldots, \hat{\psi}_{[\nu]}) \cdot \left\{ \begin{bmatrix} {}_j\tilde{\varphi}_{(\nu)} \\ \vdots \\ {}_j\tilde{\varphi}_{[\nu]} \end{bmatrix} + \mathbf{c}_{(\nu)+i_\nu-1} \right\} =$$

$$= -\sum_{\mu=(\nu)}^{[\nu]} \hat{\psi}_\mu\, {}_j\tilde{\varphi}_{(\nu)} - \hat{\psi}_{(\nu)+i_\nu-1} \qquad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, \lambda. \tag{111}$$

erhält. Im Falle $\nu = \lambda + 1, \ldots, \hat{s}$ fällt (vgl. (48)) der letzte Vektor in (110) fort. Wir erhalten dann also

$$T_\nu = -\sum_{\mu=(\nu)}^{[\nu]} \hat{\psi}_\mu \cdot {}_j\tilde{\varphi}_{(\nu)} \qquad \text{für} \qquad \nu = \lambda + 1, \ldots, \hat{s} \tag{112}$$

Die Formel (103) folgt nun sofort aus (111) und (112).

## § 7 DIE MINIMALGRÖSSENORDNUNGEN DER LÖSUNGEN UND IHRER ABLEITUNGEN IM RESONANZFALL

Bezüglich des Resonanzfalles für die Differentialgleichung (4) können wir folgendes sagen: Die adjungierte homogene Differentialgleichung (11) besitzt, wie wir im vorigen Paragraphen festgestellt haben, die $p$-periodischen Lösungen $z_{[[0]]}, z_{[[1]]}, \ldots, z_{[[\hat{\varrho}]]}$. Die Lösungen $z_{[[1]]}(t), \ldots, z_{[[\hat{\varrho}]]}(t)$ sind nach Satz 7 mit den Lösungen $\hat{z}_{[1]}, \ldots, \hat{z}_{[\hat{\varrho}]}$ der adjungierten homogenen reduzierten Differentialgleichung (12) identisch. Die Lösung $z_{[[0]]}(t)$ tritt nur im Falle $m_0 > 0$ auf. Liegt also für die nicht-homogene reduzierte Gleichung (7) für einen Index $\nu > 0$ der Teil-Resonanzfall vor, d. h. wenn

$$\int_0^p \hat{z}_{[\nu]}(\tau) f(\tau)\, \mathrm{d}\tau = a_{[\nu]} \neq 0 \tag{113}$$

gilt (vgl. [1], (28)), so liegt auch für die nicht-homogene Gleichung (4), für denselben Index $\nu$, der Teilresonanzfall vor. Dann gilt also

$$\int_0^p z_{[[\nu]]}(\tau) f(\tau)\, \mathrm{d}\tau = a_{[[\nu]]} = a_{[\nu]} \neq 0. \tag{114}$$

Im folgenden werden wir jeden Index $\nu$ (also auch $\nu = 0$) für den der Teil-Resonanzfall vorliegt, als Resonanz-Index bezeichnen. Wir können also sagen: Ist $\nu$ ein Resonanz-Index der reduzierten Gleichung (7), so ist es auch Resonanz-Index der Gleichung (14).

Jetzt müssen wir folgende Fälle unterscheiden:

I. Es gibt keinen Resonanz-Index.

II. $\nu = 0$ ist kein Resonanzindex, aber es gibt mindestens einen Resonanz-Index $\nu > 0$.

III. $\nu = 0$ ist der einzige Resonanz-Index.

IV. $\nu = 0$ ist Resonanz-Index und es gibt mindestens einen Index $\nu > 0$, der ebenfalls Resonanz-Index ist.

In I. und II. sind auch solche Fälle enthalten, in denen die Lösung $z_{[[0]]}(t)$ nicht vorhanden ist und also $i_1 = 0$ gilt.

*Im Falle I.* liegt für die reduzierte Gleichung (7) entweder der Hauptfall oder der Ausnahmefall vor. Für die Differentialgleichung (7) liegt bei $i_1 = 0$ derselbe Fall vor, wie für die reduzierte Gleichung (7). Wenn $i_1 > 0$ ist, existiert mindestens eine $p$-periodische Lösung $z_{[[0]]}$ der adjungierten homogenen Dgl. (11), und für (4) liegt also der Ausnahmefall vor.

*Im Falle II.* wird nach [1], Satz 3 die minimale Potenzwachstumsordnung $\hat{m}$ von $\hat{x}(t)$ durch die Formel

$$\hat{m} = \operatorname*{Max}_{\left(\substack{\nu \text{ Res} \\ \nu = 1, \ldots, \hat{\varrho}}\right)} (\hat{m}_\nu) \tag{115}$$

gegeben. Die minimale Potenzwachstumsordnung $m$ der Lösung $x(t)$ von (4) ist durch

$$m = \operatorname*{Max}_{\left(\substack{\nu \text{ Res} \\ \nu = 1, \ldots, \hat{\varrho}}\right)} (m_\nu) \tag{116}$$

bestimmt, mit $m_\nu$ nach (92) f. f. Die Resonanzindizes sind in beiden Fällen dieselben.

*Im Falle III.* liegt für die reduzierte Differentialgleichung (7) der Resonanzfall nicht vor. Dieser liegt dagegen für die Dgl. (4) vor. Die Resonanzordnung ist (vgl. (92) und (93))

$$m = m_0 = \operatorname{Min}(j, i_1). \tag{117}$$

Wenn kein $i_1$ auftritt, ist (108) zu berücksichtigen.

*Im Falle IV.* liegen sowohl für die reduzierte Differentialgleichung (7) als auch für die Differentialgleichung (4) Resonanzfälle vor. Die Resonanz-Ordnung $m$ von $x(t)$ ist durch die Formel

$$m = \operatorname*{Max}_{\left(\substack{\nu \text{ Res} \\ \nu = 0, \ldots, \hat{\varrho}}\right)} (m_\nu) \tag{118}$$

gegeben. Bei der Bestimmung des Maximums in (118) darf $m_0$ dann ausser Betracht bleiben, wenn für mindestens einen Resonanz-Index aus dem Intervall $\langle 1, \hat{\varrho} \rangle$ ein $i_\nu$ existiert. In diesem Falle ist nämlich das betreffende $m_\nu > m_0$ nach (92) wegen $\hat{m}_\nu \geqq \hat{m}_1 > \mathrm{Min}\,(j, i_1)$ (vgl. Definition zu Beginn vom § 3). Die entsprechenden Behauptungen gelten auch für die Ableitungen $x'(t)$, $x''(t), \ldots, x^{(j-1)}(t)$, nur muss man in den Fällen I—IV in der Formel (92) den Index $j$ bei der $k$-ten Ableitung durch $j - k$ ersetzen. Die angegebenen Wachstumsordnungen im Resonanzfall sind immer die minimalen.

An Hand von (92)—(95) bestätigt man leicht den folgenden.

*Satz 9*: Es liege für den Index $\nu$, dem das grösste existierende $i_\nu$ zugehört (also $\nu = \lambda$), der Teil-Resonanzfall vor. Dann steigt die Minimal-Ordnung $m$, bei einem gewissen Index $j$ beginnend, linear mit $j$ (vgl. dazu die Definition im § 3). Dieser Index $\lambda$ ist natürlich bereits bestimmt, bevor man die spezielle Normalform hergestellt hat. Liegt dagegen für den Index $\nu = \lambda$ der Ausnahmefall vor, so bleibt in jedem Falle die Minimal-Ordnung von einem gewissen Index $j$ an konstant. Im übrigen folgt das Verhalten der Minimal-Ordnung $m$ als Funktion von $j$ aus der Formel (118): $m = m(j)$ ist teilweise stückweise konstant und wächst teilweise linear mit dem Steigungskoeffizient 1 an.

In graphischer Veranschaulichung erhält man nach (92)—(95) für jeden Index $\nu$, für den ein $i_\nu$ existiert, als Bild der Abhängigkeit der Minimal-Ordnung $m_\nu$ von $j$ einen Streckenzug, der für $0 \leqq j \leqq i_\nu$ und für $i_{\nu+1} \leqq j$ horizontal verläuft und für $i_\nu \leqq j \leqq i_{\nu+1}$ den Steigungskoeffizient 1 hat:

Für $0 \leqq j \leqq i_\nu$ gilt $m_\nu = \hat{m}_\nu$

für $i_{\nu+1} \leqq j$ gilt $m_\nu = \hat{m}_\nu + (i_{\nu+1} - i_\nu)$

für $i_\nu \leqq j \leqq i_{\nu+1}$ gilt $m_\nu = \hat{m}_\nu + (j - i_\nu)$.

Im Falle, dass $i_{\nu+1}$ nicht mehr existiert ($\nu = \lambda$) gilt das letzte Gesetz für alle $j \geqq i_\nu$.

Für zwei Indizes $\nu_2 > \nu_1$, für welche $i_{\nu_2}$ und $i_{\nu_1}$ existieren, gilt stets die Beziehung

$$\hat{m}_{\nu_2} - \hat{m}_{\nu_1} > i_{\nu_2} - i_{\nu_1}.$$

Deshalb beginnt der Streckenzug für den Index $\nu_2$ mit einer Konstante; diese Konstante muss grösser sein als die Endkonstante für $\nu_1$. Daraus folgt, dass die Steckenzüge für verschiedene Indizes $\nu_2$ und $\nu_1$ mit existierenden $i_\nu$ sich nicht schneiden. Für jeden Index, für den kein $i_\nu$ existiert, ist $m_\nu = \hat{m}_\nu$ für $0 \leqq j$ konstant.

Daraus ergibt sich noch folgende Behauptung für die Minimalordnung nach (118): Es sei $\bar{\nu}$ der grösste Index mit existierenden $i_\nu$, für den der Resonanzfall vorliegt. Ferner sei $\underline{\nu}$ der grösste Resonanz-Index mit nicht existierendem $i_\nu$. Dann gilt offensichtlich (vgl. Definition 3 im § 5)

$$m = \underset{\left(\substack{\nu\ \mathrm{Res} \\ \nu = 0, 1, \ldots, \hat{\varrho}}\right)}{\mathrm{Max}} (m_\nu) = \mathrm{Max}(m_{\bar{\nu}}, m_{\underline{\nu}}). \tag{119}$$

Die graphische Veranschaulichung der Abhängigkeit $m_{\bar{\nu}} = m_{\bar{\nu}}(j)$ gibt uns einen Streckenzug (vgl. Bild 1); dagegen ist $m_{\underline{\nu}}$ eine Konstante.

Bild 1

Cairo University, Faculty of Science, Mathematical Dep., VAR.

## LITERATUR

[1] *R. I. I. A. Karim*: Über den Resonanzfall bei gewöhlichen linearen Differentialgleichungen $n$-ter Ordnung mit periodischen Koeffizienten. Archivum mathematicum, T. 3, 1967

[2] *R. I. I. A. Karim*: Studium des Resonanzfalles bei Systemen linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen. Arch. Rational Mech. Anal. 10, 229—241 (1962).

[3] *R. Zurmühl*: Matrizen und ihre technischen Anwendungen. 4. Aufl. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer 1969.

[4] *R. Bellman*: Introduction of matrix analysis, New York, Toronto, London 1960.

[5] *R. I. I. A. Karim*: Über den Resonanzfall bei Systemen von $n$ linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Arch. Rational Mech. Anal. 7, 21—28 (1961).

## SUMMARY

RAHMI I. I. ABDEL KARIM

Consider the equation (a) $L[x] \equiv x^n + a_1(t)\, x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\, x = f(t)$, with $a_\nu(t)$, $f(t)$ continuous and of period $p$. It was shown in [1], that in the resonance case, under the condition $a_n(t) \not\equiv 0$, the solution $x(t)$ of (a) and simultaneously all derivatives $x', \ldots, x^{(n-1)}$ take values of the same minimal order: (b) $m = \underset{\binom{\nu \text{ Resonance}}{\nu=1,\ldots,\varrho}}{\text{Max}} (m_\nu)$. Here $m_\nu$ is the order of the submatrices $\mathbf{K}_\nu$ with the eigenvalues $\alpha_\nu$ of the matrix $\mathbf{K}$, which can be obtained in the canonical normal form from the relation $\mathbf{Y}(t) = \Phi(t)\, e^{\mathbf{K}t}$, where $\mathbf{Y}$ is a fundamental system of solutions of the homogeneous equation corresponding to (a) and $\Phi(t)$ is of period $p$. Assume that $\alpha_\nu = 0$ for $\nu = 1, \ldots, \varrho$ and $\neq 0$ for $\nu = \varrho + 1, \ldots, s$.

In this paper is studied the case, when in (a) the coefficients $a_n(t) \equiv a_{n-1}(t) \equiv \ldots \equiv a_{n-j+1}(t) \equiv 0$ $a_{n-j}(t) \not\equiv 0$, $(1 \leqq j \leqq n-1)$. By means of the substitution $\hat{x}(t) = x^{(j)}$ the equation (a) is reduced to the equation (c) $\hat{L}[\hat{x}] \equiv \hat{x}^{(n-j)} + a_1(t)\, \hat{x}^{(n-j-1)} + \ldots + a_{n-j}(t)\, \hat{x} = f(t)$. For the minimal order — in the resonance case — of the solution $\hat{x}(t) = x^{(j)}(t)$ of (c) and its derivatives $x^{(j+1)}, \ldots, x^{(n-1)}$ the formula (b) is valid, i.e. $\hat{m} = \underset{\binom{\nu \text{ Resonance}}{\nu=1,\ldots,\hat{\varrho}}}{\text{Max}} (\hat{m}_\nu)$. We have only to investigate the minimal order of the solution $x(t)$ of (a) and its derivatives $x', \ldots, x^{(j-1)}$. For this purpose we introduce the conception of the „special normal form", i.e. we construct the fundamental system of solutions of the reduced homogeneous equation corresponding to (c), which has the following properties: (1) if $\alpha_\nu = 0$, then either the mean value (d) $\frac{1}{p}\int\limits_0^p \hat{\varphi}_\mu(t)\, dt = 0$ for $\mu = (\nu), \ldots, (\nu) + \hat{m}_\nu - 1$ with $(\nu) = \sum\limits_{\nu=1}^{\nu} \hat{m}_{\nu-1} + 1$, or there exists an index $0 \leqq i_\nu \leqq \hat{m}_\nu - 1$, so that $\frac{1}{p}\int\limits_0^p \hat{\varphi}_{(\nu)+i_\nu}(t)\, dt = 1$, $\frac{1}{p}\int\limits_0^p \hat{\varphi}_{(\nu)+k}(t)\, dt = 0$ for $k \neq i_\nu$. (2) The submatrices are so arranged that for $\nu = 1, \ldots, \lambda$ there exists indices $i_\nu$, while for $\nu = \lambda + 1, \ldots, \hat{\varrho}$ all mean values (d) are zero.
(3) The orders $\hat{m}_\nu$ are monotonic increasing for $\nu = 1, \ldots, \lambda$ and such that the inequalities $i_\nu > i_{\nu-1}$, $\hat{m}_\nu - i_\nu > \hat{m}_{\nu-1} - i_{\nu-1}$ (for $\nu = 2, \ldots, \lambda$) hold.

It is proved in this paper, that the minimal order of $x(t)$ is $m = \underset{\binom{\nu \text{ Resonance}}{\nu=0,1,\ldots,\varrho}}{\text{Max}} (m_\nu)$, where the

resonance indices $\nu = 1, \ldots, \hat{\varrho}$ are in both equations (a) and (c) the same and $m_\nu = m_\nu(j)$ is obtained from the formula:
$m_\nu = \hat{m}_\nu + \mathrm{Min}\,(j, i_{\nu+1}) - \mathrm{Min}\,(j, i_\nu)$ (for $\nu = 1, \ldots, \lambda - 1$), $\mathrm{Min}\,(j, i_{\lambda+1}) = j$, $\hat{m}_0 = i_0 = 0$ and $m_\nu = \hat{m}_\nu$ (for $\nu = \lambda + 1, \ldots, \hat{\varrho}, \ldots, \hat{s}$). The same statement holds also for the derivatives $x^{(k)}(t)$ $(k = 1, \ldots, j - 1)$ if in the preceding formula the index $j$ is replaced by $j - k$. A more general view of the minimal order of the solution $x(t)$ of (a) and its derivatives $x^{(k)}(t)$ $(k = 1, \ldots, j - 1)$ is included in theorem 9.