

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum  
Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

---

Pavel Chmela

Použitelnost obecných principů optiky ke stanovení zákonů odrazu a lomu na rozhraní anizotropních průhledných krystalů

*Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica*, Vol. 9 (1968), No. 1, 191--216

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/119877>

**Terms of use:**

© Palacký University Olomouc, Faculty of Science, 1968

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Laboratoř optiky

Vedoucí laboratoře: Prof. RNDr. Bedřich Havelka, doktor věd

POUŽITELNOST OBECNÝCH PRINCIPŮ OPTIKY  
KE STANOVENÍ ZÁKONŮ ODRAZU A LOMU  
NA ROZHHRANÍ ANIZOTROPNÍCH PRŮHLEDNÝCH  
KRÝSTALŮ

PAVEL CHMELA

(Došlo dne 3. května 1967)

ÚVOD

Anizotropní prostředí má určité specifické vlastnosti, kterými se liší od prostředí izotropních.

Vydeme-li z *Maxwellovy* elektromagnetické teorie, základní specifickou vlastností anizotropního prostředí je tenzorový charakter permitivity, takže mezi vektory elektrické intenzity  $\mathbf{E}$  a elektrické indukce  $\mathbf{D}$  platí vztahy

$$D_i = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} E_j. \quad (1)$$

Na základě platnosti zákona o zachování energie se dá ukázat, že tenzor  $\varepsilon_{ij}$  je tenzorem symetrickým, pro jehož složky platí

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (j = 1, 2, 3), \quad (2)$$

to tedy znamená, že existuje určitá kartézská pravoúhlá souřadná soustava  $x, y, z$ , kterou budeme nazývat hlavní souřadnou soustavou, v níž tenzor  $\varepsilon_{ij}$  má složky pouze na hlavní diagonále a vztah (1) nabude tvaru

$$D_i = \varepsilon_i E_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3)$$

Z elektromagnetické teorie dále vyplývá, že v anizotropním prostředí existují vždy dvě lineárně polarizované vlny, které jsou polarizovány v rovinách vzájemně kolmých.

Šíří-li se v anizotropním krystalu rovinná vlna, pak směr šíření energie  $\mathbf{f}$ , určený vektorem  $\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{|\mathbf{E} \times \mathbf{H}|}$ , kde  $\mathbf{H}$  je vektor magnetické intenzity, není kolmý k vlnoploše. Normála na vlnoplochu  $\mathbf{s}$  má směr impulsu  $\mathbf{p}$ , který je dán výrazem

$$\mathbf{p} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}; \quad (4)$$

přítom  $\mathbf{B}$  je zde označen vektor magnetické indukce. (Viz [12].)

Označíme-li v hlavní souřadné soustavě

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu}}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu}}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_3 \mu}} \quad (5)$$

tzv. hlavní rychlosti v anizotropním prostředí, pak elementární vlnoplocha, na kterou se rozšíří rozruh z počátku souřadné soustavy  $O$  za 1s je v hlavní souřadné soustavě udána rovnicí

$$(x^2 + y^2 + z^2) \left( \frac{x^2}{v_2^2 v_3^2} + \frac{y^2}{v_3^2 v_1^2} + \frac{z^2}{v_1^2 v_2^2} \right) - \left( \frac{1}{v_3^2} + \frac{1}{v_2^2} \right) x^2 - \\ - \left( \frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_3^2} \right) y^2 - \left( \frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_1^2} \right) z^2 + 1 = 0. \quad (6)$$

Rychlost šíření energie  $v$  je pak dána v hlavní souřadné soustavě jako funkce jednotkového vektoru ve směru šíření energie  $\mathbf{f}(\cos \beta_1, \cos \beta_2, \cos \beta_3)$  pro každou z vln následovně

$$\frac{1}{v_I^2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_3^2} \right) \cos^2 \beta_1 + \left( \frac{1}{v_3^2} + \frac{1}{v_1^2} \right) \cos^2 \beta_2 + \left( \frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} \right) \cos^2 \beta_3 + \right. \\ \left. + \sqrt{M_1 + M_2 + M_3 - 2M_1 M_2 - 2M_3 M_2 - 2M_3 M_1} \right], \quad (7a)$$

$$\frac{1}{v_{II}^2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_3^2} \right) \cos^2 \beta_1 + \left( \frac{1}{v_3^2} + \frac{1}{v_1^2} \right) \cos^2 \beta_2 + \left( \frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} \right) \cos^2 \beta_3 - \right. \\ \left. - \sqrt{M_1 + M_2 + M_3 - 2M_1 M_2 - 2M_3 M_2 - 2M_3 M_1} \right], \quad (7b)$$

kde

$$M_1 = \left( \frac{1}{v_2^2} - \frac{1}{v_3^2} \right) \cos^2 \beta_1$$

$$M_2 = \left( \frac{1}{v_3^2} - \frac{1}{v_1^2} \right) \cos^2 \beta_2$$

$$M_3 = \left( \frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_2^2} \right) \cos^2 \beta_3.$$

Normálová rychlost  $v_n$ , která vystupuje ve fázi, je udána jako funkce směru normály  $\mathbf{s}(\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3)$  a pro každou z obou vln, šířících se ve směru  $\mathbf{s}$  platí

$$v_{nI}^2 = \frac{1}{2} \left[ (v_2^2 + v_3^2) \cos^2 \alpha_1 + (v_3^2 + v_1^2) \cos^2 \alpha_2 + (v_1^2 + v_2^2) \cos^2 \alpha_3 + \right. \\ \left. + \sqrt{N_1 + N_2 + N_3 - 2N_2 N_3 - 2N_3 N_1 - 2N_1 N_2} \right], \quad (8a)$$

$$v_{nII}^2 = \frac{1}{2} \left[ (v_2^2 + v_3^2) \cos^2 \alpha_1 + (v_3^2 + v_1^2) \cos^2 \alpha_2 + (v_1^2 + v_2^2) \cos^2 \alpha_3 - \right. \\ \left. - \sqrt{N_1 + N_2 + N_3 - 2N_2 N_3 - 2N_3 N_1 - 2N_1 N_2} \right], \quad (8b)$$

kde

$$\begin{aligned} N_1 &= (v_2^2 - v_3^2) \cos^2 \alpha_1 \\ N_2 &= (v_3^2 - v_1^2) \cos^2 \alpha_2 \\ N_3 &= (v_1^2 - v_2^2) \cos^2 \alpha_3. \end{aligned}$$

Mezi oběma rychlostmi platí vztah

$$v_i \cos \delta_i = v_{ni} \quad (i = \text{I, II}) \quad (9)$$

při čemž  $\delta_i$  je úhel, který svírá normála  $\mathbf{s}_i$  se směrem šíření energie  $\mathbf{f}_i$ .

Chceme-li stanovit složky vektoru normály  $\mathbf{s}_i(\cos \alpha_{i1}, \cos \alpha_{i2}, \cos \alpha_{i3})$ , který přísluší určitému směru šíření  $\mathbf{f}$ , je nutno použít transformačních vztahů

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{i1} &= \frac{v_i}{v_{ni}} \left( 1 + \frac{v_i^2 - v_{ni}^2}{v_1^2 - v_i^2} \right) \cos \beta_1 \\ \cos \alpha_{i2} &= \frac{v_i}{v_{ni}} \left( 1 + \frac{v_i^2 - v_{ni}^2}{v_2^2 - v_i^2} \right) \cos \beta_2 \\ \cos \alpha_{i3} &= \frac{v_i}{v_{ni}} \left( 1 + \frac{v_i^2 - v_{ni}^2}{v_3^2 - v_i^2} \right) \cos \beta_3. \end{aligned} \quad (10)$$

Funkční závislost  $v_{ni}$  a  $v_i$  je dána rovnicí

$$\frac{1}{v_{ni}^2} = \frac{1}{v_i^2} (1 + \Pi_i^2 v_i^4), \quad (11)$$

kde

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{I}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_3^2} \right) \sin(b_1 - b_2) \sin \frac{F}{2}, \\ \Pi_{\text{II}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_3^2} \right) \sin(b_1 + b_2) \cos \frac{F}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{F}{2} &= \frac{\sin \frac{1}{2}(b_1 - b_2 + \Omega) \sin \frac{1}{2}(b_2 - b_1 + \Omega)}{\sin b_1 \sin b_2}, \\ \cos^2 \frac{F}{2} &= \frac{\sin \frac{1}{2}(b_1 + b_2 - \Omega) \sin \frac{1}{2}(b_1 + b_2 + \Omega)}{\sin b_1 \sin b_2}. \end{aligned}$$

Veličiny  $b_1$  a  $b_2$  představují úhly, které svírá směr  $\mathbf{f}$  s dvěma paprskovými osami a jejich hodnoty jsou dány vztahy

$$\cos b_1 = \cos \beta_1 \sqrt{\frac{\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_2^2}}{\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_3^2}}} + \cos \beta_3 \sqrt{\frac{\frac{1}{v_2^2} - \frac{1}{v_3^2}}{\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_3^2}}}$$

$$\cos b_2 = -\cos \beta_1 \sqrt{\frac{1}{\frac{v_1^2}{v_2^2} - 1} - \frac{1}{\frac{v_2^2}{v_3^2} - 1}} + \cos \beta_3 \sqrt{\frac{1}{\frac{v_2^2}{v_1^2} - 1} - \frac{1}{\frac{v_3^2}{v_1^2} - 1}}$$

Úhel  $\Omega$  je úhel, který svírají obě paprskové osy a je určen výrazem

$$\cos \Omega = \frac{2}{\frac{v_2^2}{v_1^2} - 1} \frac{1}{\frac{v_3^2}{v_1^2} - 1} \frac{1}{v_1^2}$$

Obráceně pro složky vektoru směru šíření energie  $\mathbf{f}(\cos \beta_{i1}, \cos \beta_{i2}, \cos \beta_{i3})$  platí transformační vztahy

$$\begin{aligned} \cos \beta_{i1} &= \frac{v_{oi}}{v_i} \left[ 1 - \frac{P_i^2}{v_{ni}^2(v_1^2 - v_{ni}^2)} \right] \cos \alpha_1 \\ \cos \beta_{i2} &= \frac{v_{oi}}{v_i} \left[ 1 - \frac{P_i^2}{v_{ni}^2(v_2^2 - v_{ni}^2)} \right] \cos \alpha_2 \\ \cos \beta_{i3} &= \frac{v_{oi}}{v_i} \left[ 1 - \frac{P_i^2}{v_{ni}^2(v_3^2 - v_{ni}^2)} \right] \cos \alpha_3, \end{aligned} \quad (12)$$

kde je označeno

$$\begin{aligned} P_1^2 &= \frac{(v_1^2 - v_{n1}^2)(v_2^2 - v_{n1}^2)(v_3^2 - v_{n1}^2)}{v_{n1}^2 - v_{n11}^2} \\ P_{11}^2 &= \frac{(v_1^2 - v_{n11}^2)(v_2^2 - v_{n11}^2)(v_3^2 - v_{n11}^2)}{v_{n11}^2 - v_{n1}^2} \end{aligned}$$

Paprsková rychlost je dána výrazem

$$v_i^2 = v_{ni}^2 + \frac{P_i^2}{v_{ni}^2} \quad (13)$$

Uvedené vztahy jsou obvykle odvozovány na základě elektromagnetické teorie světla,\*) avšak bylo by je stejně dobře, i když s určitými obtížemi, možno odvodit například na základě experimentálních měření čistě geometricko-optických, s výjimkou vlastnosti polarizace.

V této práci chceme ukázat, jakým způsobem lze využít obecných optických principů ke stanovení zákonů odrazu a lomu na rozhraní dvou anizotropních průhledných krystalů.

Budeme se zabývat těmito principy:

- Princip Fermatův* — odpovídá čistě geometrickému pojetí.
- Princip Huygensův* — odpovídá vlnovému pojetí.
- Princip spojitosti fáze* — odpovídá elektromagnetické teorii světla.
- Princip zachování impulsů* — odpovídá kvantově-mechanickému pojetí.

\*) Přesné odvození těchto vztahů je provedeno v [13] s. 649—680.

Ukážeme, že oba první principy obsahují ve své formulaci jak zákony lomu a odrazu pro paprskový směr šíření, tak zákony lomu a odrazu pro normálový směr šíření, kdežto druhé dva principy odpovídají pouze normálovému pojetí.

Při výpočtech budeme používat vztahů zde uvedených, při čemž indexy lomu definujeme obvyklým způsobem, tj. paprskový index lomu je dán vztahem

$$n_i = \frac{c}{v_i}, \quad (i = \text{I, II}) \quad (14)$$

kde  $v_i$  určíme podle (7a) resp. podle (7b), a normálový index lomu je dán vztahem

$$n_{ni} = \frac{c}{v_{ni}}, \quad (i = \text{I, II}) \quad (15)$$

kde  $v_{ni}$  je udáno výrazem (8a), resp. (8b).

Vzhledem k (9) platí mezi odpovídajícími indexy lomu

$$n_{ni} \cos \delta_i = n_i. \quad (16)$$

## I. FERMATŮV PRINCIP

### A. Diskuze Fermatova principu pro neomezené anizotropní prostředí

Fermatův princip je principem čistě geometrickooptickým. Podle tohoto principu je skutečná optická dráha světelného paprsku, který se šíří z bodu  $P$  do bodu  $P'$ , stacionární. (Viz obr. 1.)

To tedy znamená, že pro variaci integrálu

$$S_P = \int_P^{P'} n \, dr \quad (17)$$

musí platit

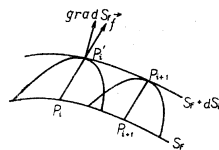
$$\delta S_P = \delta \int_P^{P'} n \, dr = 0. *) \quad (18)$$

Veličina  $S_P$  má podobný význam, jako účinková funkce v *Hamiltonově* variačním principu a budeme ji proto nazývat Fermatovou účinkovou funkcí.

Nechť na obr. 2 křivka  $S_P$  představuje plochu, ve které je Fermatova účinková funkce  $S_P$  konstantní. Chceme-li zjistit, jak vypadá účinková funkce



Obr. 1.



Obr. 2.

\*) Diskuze tohoto výrazu pro izotropní nehomogenní prostředí je provedena v [7] a [9].

$S_F + dS_F$ , konstruujeme v každém bodě  $P_i$  elementární plochu  $dr = \frac{dS_F}{n}$ , kde  $S_F = \text{konst.}$  Plochou  $S_F + dS_F$  bude potom obalová plocha všech elementárních ploch. Takové plochy, ve kterých je *Fermatova* účinková funkce rovna konstantě, budeme nazývat eikonálními plochami.

Z definice (17) vyplývá pak pro diferenciál  $dS_F$

$$dS_F = \mathbf{grad} S_F \cdot d\mathbf{r} = n \, dr. \quad (19)$$

Položíme-li  $\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{r}}{dr}$ , máme odtud

$$\mathbf{grad} S_F \cdot \mathbf{f} = n. \quad (20)$$

Vektor  $\mathbf{f}$  představuje směr šíření paprsku a vektor  $\mathbf{grad} S_F$  je rovnoběžný s normálou eikonální plochy  $\mathbf{s}$ .

Poněvadž  $\mathbf{f}$  nemusí obecně splývat s normálou  $\mathbf{s}$ , lze pro čtverec  $\mathbf{grad} S_F$  psát

$$(\mathbf{grad} S_F)^2 = \frac{n^2}{\cos^2 \delta} = n_n^2, \quad (21)$$

kde jsme označili  $\delta$  úhel, který svírá směr šíření  $\mathbf{f}$  s normálou  $\mathbf{s}$  a položili

$$n_n \cos \delta = n \quad (22)$$

Předpokládáme-li, že index lomu  $n$  není časovou funkcí, můžeme psát

$$\dot{S}_F = \frac{dS_F}{dt} = n\dot{r}$$

a odtud použitím vztahu (17)

$$S_F = \int_{t_1}^{t_2} n\dot{r} \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{S}_F \, dt. \quad (23)$$

Tento zápis odpovídá svojí formou *Hamiltonovu* variačnímu principu. Podmínka (18) bude tedy zřejmě splněna tehdy, jestliže platí

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{S}_F}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \dot{S}_F}{\partial x_i} = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (24)$$

Použijeme-li nyní vztahů (20), obdržíme jako řešení tří rovnic (24) jednu vektorovou rovnici

$$\mathbf{grad} n = \frac{d}{dt} (n\mathbf{f}). \quad (25)$$

Pro případ homogenního anizotropního prostředí, které není omezeno, platí pro paprskový index lomu funkční závislost na směru šíření, kterou lze podle (7) a (14) zapsat formálně

$$n_i = n_i(\mathbf{f}). \quad (26)$$

Upravíme levou stranu rovnice (25) následovně

$$r \operatorname{grad} n_i = r \frac{dn_i}{dr} = r \frac{dn_i}{df} \cdot \frac{df}{dr} = \frac{dn_i}{df} \cdot \frac{df}{f dt}$$

a pravou stranu

$$\frac{d}{dt}(n_i f) = \frac{dn_i}{df} \cdot \frac{df}{dt} \cdot f + n_i \frac{df}{dt}$$

Dále platí

$$\frac{df}{f \cdot dt} = \frac{df}{dt} \cdot f$$

takže porovnáním obou stran rovnice obdržíme

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad \text{nebo} \quad f = \text{konst.} \quad (27)$$

To tedy znamená, že světlo, pokud splňuje podmínku *Fermatova* principu, šíří se v neomezeném homogenním anizotropním prostředí rovnoměrně a přímočaře.

#### B. Základy lomu a odrazu pro paprskový směr

##### 1. Základy lomu

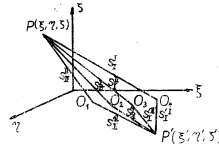
V předcházejícím odstavci bylo ukázáno, že v neomezeném homogenním anizotropním prostředí se světlo šíří rovnoměrně a přímočaře, při čemž paprskové indexy lomu  $n_i$  a  $n_{11}$  jsou určeny příslušnými paprskovými rychlostmi  $v_i$  a  $v_{11}$  podle vztahů (7a) a (7b).

Chceme-li stanovit zákon lomu na rozhraní dvou anizotropních krystalů, vyjdeme z následující konstrukce:

Nechť na obr. 3. souřadná rovina  $\xi, \eta$  je totožná s rovinou rozhraní dvou prostředí. Souřadná osa  $\zeta$  tvoří pak normálu na toto rozhraní. Dále nechť paprskové indexy v libovolném směru  $f$  jsou v prvním prostředí  $n_i, n_{11}$  a v druhém prostředí  $n'_i, n'_{11}$ .

Tyto indexy jsou samozřejmě funkcemi směru šíření a chceme-li nyní zapsat *Fermatovu* účinkovou funkci pro šíření z bodu  $P$  do bodu  $P'$  je zřejmé, že této funkci budou vyhovovat vlastně čtyři optické dráhy, které odpovídají kombinacím mezi dvěma paprskovými indexy prvního prostředí a dvěma paprskovými indexy druhého prostředí. tj.

$$\begin{aligned} S_{P1} &= n_i^I s_i^I + n_{11}^I s_{11}^I \\ S_{-2} &= n_i^{II} s_i^{II} + n_{11}^{II} s_{11}^{II} \\ S_{P3} &= n_i^I s_i^{II} + n_{11}^{II} s_{11}^I \\ S_{-4} &= n_i^{II} s_i^I + n_{11}^I s_{11}^{II} \end{aligned} \quad (28)$$



Obr. 3.

Tento zápis znamená, že každému ze dvou paprsků, který se šíří v prvním prostředí, odpovídají v obecném případě dva lomené paprsky v prostředí druhém. Pouze v některých zvláštních případech a to tehdy, když kmitosměrové



roviny v prvním prostředí odpovídají kmitosměrovým rovinám v druhém prostředí, nastává lom každého paprsku pouze v jednom směru. Tuto skutečnost však nelze popsat v rámci geometrické optiky a proto je nutno přijat v obecném případě čtyři zákony lomu. V limitním případě dvou lomených paprsků dochází k lomu v ostatních dvou směrech s nulovou intenzitou.

Výpočet zákonů lomu na základě *Fermatova* principu je možno provést v různých souřadných soustavách. Stejně vhodné je provádět výpočet v soustavě sférické, jako v soustavě pravouhlé kartézské. Pro náš výpočet budeme volit pravouhlou souřadnou soustavu kartézskou.

Souřadnou soustavu  $\xi, \eta, \zeta$  budeme volit tak, že směr os  $\xi, \eta$  je pevně určen, ale střed soustavy  $O$  se pohybuje. Body  $P$  a  $P'$  mají tedy v soustavě  $\xi, \eta, \zeta$  pevně stanoveny souřadnice  $\zeta, \zeta'$ , dále je pevně určena vzdálenost bodů  $\overline{PP'} = d$ , která je invariantní vzhledem k souřadné soustavě, a průmět úsečky  $PP'$  do roviny rozhraní  $\xi, \eta$   $d$ .

Abychom vyjádřili indexy lomu  $n_i$  a  $n'_j$  jako funkce souřadnic  $\xi, \eta, \zeta$ , je třeba provést transformaci hlavních souřadných soustav obou prostředí do souřadné soustavy  $\xi, \eta, \zeta$ .

Směrové kosiny, určující směry šíření energie  $\mathbf{f}$  a  $\mathbf{f}'$ , jsou dány v hlavních souřadných soustavách obou prostředí následovně

$$\cos \beta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \beta_2 = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \beta_3 = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (29a)$$

$$\cos \beta'_1 = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \quad \cos \beta'_2 = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

$$\cos \beta'_3 = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \quad (29b)$$

kde  $x, y, z$  a  $x', y', z'$ , jsou souřadnice v libovolném bodě na paprsku v hlavních souřadných soustavách prostředí, jejichž střed leží v některém z bodů  $O_1, O_2, O_3, O_4$ .

Paprskové indexy obou prostředí lze tedy pomocí (7a) (7b) a (29a), (29b) vyjádřit jako funkce souřadnic libovolného bodu na paprsku

$$n_i = n_i(x, y, z) \quad (30a)$$

$$n'_j = n'_j(x', y', z'). \quad (i = \text{I, II}) \quad (30b)$$

$$(j = \text{I, II})$$

Jako výchozí soustavu pro další výpočet lze použít jedné z hlavních soustav obou prostředí. Použijeme například hlavní soustavy prvního prostředí  $x, y, z$ . Jestliže souřadné osy  $x', y', z'$ , mají v souřadné soustavě  $x, y, z$  směrové kosiny

$$\begin{matrix} x'(a_{11}, a_{12}, a_{13}) \\ y'(a_{21}, a_{22}, a_{23}) \\ z'(a_{31}, a_{32}, a_{33}) \end{matrix}$$

pak maticí transformace soustavy  $x', y', z'$  do soustavy  $x, y, z$  je matice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Po provedení této transformace lze vyjádřit indexy lomu  $n'_i$  a  $n''_i$  jako funkce souřadnic  $x, y, z$ . Dosadíme-li příslušné veličiny, které jsme obdrželi transformací podle matice (31), nabude rovnice (30b) tvaru

$$n_i = n_i(x, y, z). \quad (30c)$$

Transformaci souřadné soustavy  $x, y, z$  do soustavy  $\xi, \eta, \zeta$  provedeme pak dvojnásobným otočením. Jsou-li souřadnice normály roviny rozhraní v hlavní souřadné soustavě prvního prostředí  $(\cos \gamma_1, \cos \gamma_2, \cos \gamma_3)$ , potom maticí transformace soustavy  $x, y, z$  do soustavy  $\xi, \eta, \zeta$  je matice

$$\begin{pmatrix} \cos \omega_1 \cos \omega_2, & -\sin \omega_1, & -\cos \omega_1 \sin \omega_2 \\ \sin \omega_1 \cos \omega_2, & \cos \omega_1, & \sin \omega_1 \sin \omega_2 \\ \sin \omega_2, & 0, & \cos \omega_2 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

kde

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \omega_1 &= \frac{\cos \gamma_2}{\cos \gamma_1} \\ \operatorname{tg} \omega_2 &= \frac{\cos \gamma_1 \cos \omega_1 + \cos \gamma_2 \sin \omega_1}{\cos \gamma_3} \end{aligned}$$

Indexy lomu obdržíme po provedení této transformace jako funkce souřadnic  $\xi, \eta, \zeta$

$$n_i = n_i(\xi, \eta, \zeta) \quad (33a)$$

$$n'_j = n'_j(\xi, \eta, \zeta) \quad \begin{matrix} (i = \text{I, II}) \\ (j = \text{I, II}) \end{matrix} \quad (33b)$$

Účinkové *Fermatovy* funkce (28) můžeme pomocí (33a) a (33b) zapsat v souřadné soustavě  $\xi, \eta, \zeta$  následovně

$$\begin{aligned} S_{P1} &= n_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2} + \\ &+ n'_1(\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1) \sqrt{\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2}, \\ S_{P2} &= n_1(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2} + \\ &+ n''_1(\xi''_2, \eta''_2, \zeta''_2) \sqrt{\xi_2''^2 + \eta_2''^2 + \zeta_2''^2}, \\ S_{P3} &= n_{11}(\xi_3, \eta_3, \zeta_3) \sqrt{\xi_3^2 + \eta_3^2 + \zeta_3^2} + \\ &+ n'_1(\xi'_3, \eta'_3, \zeta'_3) \sqrt{\xi_3'^2 + \eta_3'^2 + \zeta_3'^2}, \\ S_{P4} &= n_{11}(\xi_4, \eta_4, \zeta_4) \sqrt{\xi_4^2 + \eta_4^2 + \zeta_4^2} + \\ &+ n''_1(\xi''_4, \eta''_4, \zeta''_4) \sqrt{\xi_4''^2 + \eta_4''^2 + \zeta_4''^2}, \end{aligned} \quad (34)$$

kde souřadnice  $\xi_k, \eta_k, \zeta_k$  a  $\xi'_k, \eta'_k, \zeta'_k$  jsou souřadnicemi bodů  $P$  a  $P'$  v souřadné soustavě s počátkem v  $O_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ).

Poněvadž souřadnice  $\zeta_k$  a  $\zeta'_k$  jsou pevně stanoveny a uvážíme-li dále, že platí

$$(\xi_k - \xi'_k)^2 + (\eta_k - \eta'_k)^2 + (\zeta_k - \zeta'_k)^2 = d^2 \quad (35)$$

a

$$(\xi_k - \xi''_k)^2 + (\eta_k - \eta''_k)^2 = d^2 \quad (36)$$

Ize funkce  $S_{F1}$ ,  $S_{F2}$ ,  $S_{F3}$ ,  $S_{F4}$  vyjádřit jako funkce dvou nezávisle proměnných, například jako funkce proměnných  $\xi_1$  a  $\xi_4$ .

Podmínka stacionárnosti (18) vede k rovnicím

$$\frac{\partial S_{F1}}{\partial \xi_1} = 0, \quad \frac{\partial S_{F1}}{\partial \xi_1'} = 0, \quad (37a)$$

$$\frac{\partial S_{F2}}{\partial \xi_2} = 0, \quad \frac{\partial S_{F2}}{\partial \xi_2'} = 0, \quad (37b)$$

$$\frac{\partial S_{F3}}{\partial \xi_3} = 0, \quad \frac{\partial S_{F3}}{\partial \xi_3'} = 0, \quad (37c)$$

$$\frac{\partial S_{F4}}{\partial \xi_4} = 0, \quad \frac{\partial S_{F4}}{\partial \xi_4'} = 0. \quad (37d)$$

Z rovnice (37) lze použitím (35) a (36) stanovit příslušné zákony lomu na rozhraní dvou anizotropních průhledných krystalů.

Jestliže zavedeme úhlové souřadnice, tj. úhel dopadu  $\varepsilon$ , úhel lomu  $\varepsilon'$ , azimut roviny dopadu  $\varphi$  a azimut roviny lomu  $\varphi'$ , můžeme zákony lomu psát ve tvaru

$$\sin \varepsilon_k' = \operatorname{sgn}(\sin \varepsilon) \frac{\sqrt{\xi_k'^2 + \eta_k'^2}}{\sqrt{\xi_k'^2 + \eta_k'^2 + \zeta_k'^2}}$$

a

$$\operatorname{tg} \varphi_k' = \frac{\eta_k'}{\xi_k'}, \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

Souřadnice  $\xi_k'$ ,  $\eta_k'$ ,  $\zeta_k'$  vyjádříme pomocí rovnic (37), (35), (36), za pomoci rovnic

$$\sin \varepsilon_k = \frac{\sqrt{\xi_k^2 + \eta_k^2}}{\sqrt{\xi_k^2 + \eta_k^2 + \zeta_k^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{\eta_k}{\xi_k} \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

jako funkce  $\varepsilon_k$  a  $\varphi_k$  a položíme-li

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_1, & \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_1 \\ \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_{11}, & \quad \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_{11} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \varepsilon_1' &= \varepsilon_{11}', & \varphi_1' &= \varphi_{11}' \\ \varepsilon_2' &= \varepsilon_{11}', & \varphi_2' &= \varphi_{11}' \\ \varepsilon_3' &= \varepsilon_{11}', & \varphi_3' &= \varphi_{11}' \\ \varepsilon_4' &= \varepsilon_{11}', & \varphi_4' &= \varphi_{11}' \end{aligned}$$

obdržíme po konečné úpravě

$$\varepsilon_i^j = \varepsilon_i^j(\varepsilon_i, \varphi_i) \quad (38)$$

$$\varphi_i^j = \varphi_i^j(\varepsilon_i, \varphi_i) \quad \begin{aligned} (i &= \text{I, II}) \\ (j &= \text{I, II}) \end{aligned} \quad (39)$$

## 2. Zákony odrazu

Při stanovení zákonů odrazu je postup výpočtu velmi podobný. Není pouze nutné provádět transformaci (31), neboť celý problém je řešen pouze v jednom prostředí a hlavní souřadné soustavy  $x, y, z$  a  $x', y', z'$ , spolu splývají, tj. matice (31) je jednotkovou maticí s prvky na hlavní diagonále rovnými jedné.

Označíme-li indexy, odpovídající dopadajícímu paprsku  $n_i, n_{11}$  a odraženému paprsku  $n_i, n_{11}$ , lze vztahy (28) psát ve tvaru

$$\begin{aligned} S_{F1} &= n_I^I s_I^I + n_I^I s_I^I \\ S_{F2} &= n_{II}^I s_{II}^I + n_{II}^I s_{II}^I \\ S_{F3} &= n_I^I s_{II}^I + n_{II}^I s_I^I \\ S_{F4} &= n_{II}^I s_{II}^I + n_{II}^I s_{II}^I. \end{aligned} \quad (40)$$

Další postup je zcela analogický, jako v případě lomu.

Je zřejmé, že v anizotropním prostředí nebude obecně pro žádný ze čtyř odražených paprsků platit zákon odrazu ve tvaru

$$\varepsilon = -\varepsilon^*.$$

Podobně, jako u lomeného paprsku, vzhledem k funkční závislosti indexů lomu na směru šíření, nebude v obecném případě ležet odražený paprsek v rovině dopadu, určené normálou na rozhraní a směrem dopadajícího paprsku. V konečné formě dospějeme k výsledku

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^* &= \varepsilon_i^*(\varepsilon_i, \varphi_i) \\ \varphi_i^* &= \varphi_i^*(\varepsilon_i, \varphi_i) \quad (i = \text{I, II}) \\ & \quad (j = \text{I, II}) \end{aligned}$$

Explicitní stanovení zákonů lomu a odrazu bylo by matematicky velmi náročné a provedení výpočtu v obecném případě je prakticky nemožné.

Principiálně je však možno na základě *Fermatova* principu vybudovat geometrickou optiku anizotropních prostředí, podobnou geometrické optice prostředí izotropních.

### C. Zákony lomu a odrazu pro normálový směr

Vraťme se nyní ke vztahu (21). V tomto vztahu jsme zavedli tzv. normálový index lomu tím, že jsme položili

$$n_{ni} = \frac{n_i}{\cos \delta_i}.$$

Ukážeme na příkladu jednoosého krystalu, že index lomu  $n_{ni}$ , zavedený z představy eikonálních ploch, odpovídá indexu lomu, který vyplývá z teorie elektromagnetického pole.

Položíme-li pro jednoosé krystaly  $v_x = v_3, v_0 = v_1 = v_2$  a píšeme-li ve vztazích (7) místo rychlostí příslušné indexy lomu, pak máme pro paprskovou rychlost a paprskový index lomu rádného paprsku z (7a)

$$v_0 = v_1, \quad n_0 = n_1.$$

Tento případ je podobný izotropnímu prostředí, kde normálové a paprskové veličiny splývají. Nebudeme se jím proto déle zabývat.

Pro paprskovou rychlost mimořádného paprsku a paprskový index lomu mimořádného paprsku máme ze vztahu (7b)

$$\frac{1}{v_{11}^2} = \frac{1}{v^2} = \frac{1}{v_e^2} \sin^2 \Phi + \frac{1}{v_o^2} \cos^2 \Phi$$

$$n_{11}^2 = n^2 = n_e^2 \sin^2 \Phi + n_o^2 \cos^2 \Phi,$$

kde jsme položili  $\beta_3 = \Phi$ .

Pro příslušnou normálovou rychlost mimořádného paprsku vychází pak podle (11b)

$$\frac{1}{v_n^2} = \frac{1}{v^2} \left[ 1 + \frac{v^4}{4} \left( \frac{1}{v_o^2} - \frac{1}{v_e^2} \right)^2 \sin^2 2\Phi \right]$$

a tedy pro normálový index lomu mimořádného paprsku máme

$$n_n^2 = n^2 + \frac{1}{4} \frac{(n_o^2 - n_e^2)^2}{n^2} \sin^2 2\Phi.$$

*Fermatovu* účinkovou funkci můžeme v polárních souřadnicích vyjádřit jako součin průvodiče  $r$  a příslušného indexu lomu, tj.

$$S_F = rn = r \sqrt{n_e^2 \sin^2 \Phi + n_o^2 \cos^2 \Phi}.$$

Složky vektoru  $\mathbf{grad} S_F$  jsou udány v polárních souřadnicích  $r$  a  $\Phi$  následovně

$$\mathbf{grad} S_F \left[ n, - \frac{(n_o^2 - n_e^2) \sin 2\Phi}{2n} \right]$$

a odtud

$$(\mathbf{grad} S_F)^2 = n^2 + \frac{1}{4} \frac{(n_o^2 - n_e^2)^2}{n^2} \sin^2 2\Phi.$$

Vidíme tedy, že normálový index lomu, zavedený na základě představy eikonálních ploch, odpovídá normálovému indexu lomu, který vyplývá z elektromagnetické teorie světla.

Provedeme nyní následující úvahu:

U *Fermatovy* účinkové funkce

$$S_F = \int_{t_1}^{t_2} n \dot{S}_F dt$$

předpokládejme, že do okamžiku  $t_1$  jsme sledovali změnu funkce v závislosti na souřadnicích a od tohoto okamžiku zůstaneme stát v určitém bodě  $P_i$  a sledujeme změnu funkce až do okamžiku  $t_2$ . Integrál  $S_F$  se nám pak rozpadá na dva integrály

$$S'_F = \int_0^{t_2} \dot{S}'_F dt = \int_0^{t_1} \dot{S}'_F dt + \int_{t_1}^{t_2} \dot{S}'_F dt \quad (41)$$

Odtud

$$S_F = \int_0^{t_2} \dot{S}_F dt - \int_0^{t_1} \dot{S}_F dt. \quad (42)$$

První integrál považujeme za časovou funkci, kdežto druhý integrál za funkci prostorovou, takže dostáváme

$$S_F = \int_0^{t_2} c dt - \int_{P(t=0)}^{P(t=t_2)} n dr \quad (43)$$

kde jsme položili  $n = \frac{c}{v} = \frac{c}{r}$ .

Označíme-li hodnotu druhého integrálu

$$S_{F0} = S_{F0}(x, y, z) \quad (44)$$

a položíme-li  $t_2 = t$ , obdržíme

$$S_F(t, x, y, z) = ct - S_{F0}(x, y, z). \quad (45)$$

Pro tuto časově prostorovou funkci platí pak rovnice

$$(\mathbf{grad} S_F)^2 = \frac{n_n^2}{c^2} \left( \frac{\partial S_F}{\partial t} \right)^2. \quad (46)$$

Tvar této podmínky je podobný, jako vztah pro fázi vlnové funkce v elektromagnetické teorii.

Vezeme-li dále podmínku (21),

$$(\mathbf{grad} S_{F0})^2 = n_n^2,$$

vidíme, že této podmínce vyhovuje pro rovinnou eikonální plochu funkce

$$S_{F0} = n_n(\xi \cos \alpha_1 + \eta \cos \alpha_2 + \zeta \cos \alpha_3) \quad (48)$$

kde  $\mathbf{s}(\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3)$  je vektor, udávající normálu na eikonální plochu. Pro rozhraní dvou prostředí lze bez újmy na obecnosti volit souřadnou soustavu tak, že rovina  $\xi, \eta$  splývá s rovinou rozhraní.

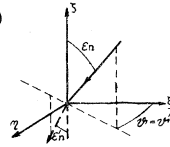
Nechť první prostředí leží v horním poloprostoru  $\xi, \eta$  (viz obr. 4.), příslušný normálový index lomu tohoto prostředí je  $n_n$ , a směr vektoru  $\mathbf{grad} S_{F0}$  je dán vektorem  $\mathbf{s}(\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3)$ . Druhému prostředí o indexu lomu  $n'_n$ , ležícím v dolním poloprostoru  $\xi, \eta$ , odpovídá gradient ve směru  $\mathbf{s}'(\cos \alpha'_1, \cos \alpha'_2, \cos \alpha'_3)$ .

Poněvadž Fermatova účinková funkce je podle své definice spojitá, musí platit pro rozhraní

$$S_F(t, \xi, \eta, 0) = S'_F(t, \xi, \eta, 0). \quad (49)$$

Odtud podle (48)

$$n_n(\xi \cos \alpha_1 + \eta \cos \alpha_2) = n'_n(\xi \cos \alpha'_1 + \eta \cos \alpha'_2).$$



Obr. 4.

Vzhledem k tomu, že tento vztah platí pro libovolná  $\xi$  a  $\eta$ , můžeme psát

$$\begin{aligned} n_n \cos \alpha_1 &= n'_n \cos \alpha'_1 \\ n_n \cos \alpha_2 &= n'_n \cos \alpha'_2. \end{aligned} \quad (50)$$

Uvědomíme-li si dále, že pro úhly  $\varepsilon_n$  a  $\varepsilon'_n$ , které svírají směry  $\mathbf{s}$  a  $\mathbf{s}'$  s osou  $\zeta$ , platí

$$\begin{aligned} \sin^2 \varepsilon_n &= \sin^2 \alpha_3 = \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 \\ \sin^2 \varepsilon'_n &= \sin^2 \alpha'_3 = \cos^2 \alpha'_1 + \cos^2 \alpha'_2. \end{aligned} \quad (51)$$

dostáváme pak umocněním a sečtením vztahů (50) pro čtyři možné kombinace normálových indexů lomu

$$n_{ni}(\varepsilon_{ni}, \vartheta_i) \sin \varepsilon_{ni} = n'_{nj}(\varepsilon'_{nj}, \vartheta'_j) \sin \varepsilon'_{nj} \quad \begin{matrix} (i = \text{I, II}), \\ (j = \text{I, II}), \end{matrix} \quad (52)$$

kde jsme označili  $\vartheta_i, \vartheta'_j$  azimuty roviny dopadu a roviny lomu. Poněvadž ale ze vztahů (50) platí

$$\operatorname{tg} \vartheta_i = \frac{\cos \alpha_{i2}}{\cos \alpha_{i1}} = \frac{\cos \alpha'_{i2}}{\cos \alpha'_{i1}} = \operatorname{tg} \vartheta'_j,$$

lze zákon lomu psát ve tvaru

$$n_{ni}(\varepsilon_{ni}, \vartheta_i) \sin \varepsilon_{ni} = n'_{nj}(\varepsilon'_{nj}, \vartheta_i) \sin \varepsilon'_{nj}. \quad (53)$$

Vidíme tedy, že pro normálový směr  $\mathbf{s}$ , který je zde udán jako normála k eikonální ploše, platí *Snellův* zákon lomu, při čemž na rozdíl od zákona lomu pro parskový směr se zachovává azimut.

Pro odraz obrátíme zákon odrazu v podobném tvaru

$$n_{ni}(\varepsilon_{ni}, \vartheta_i) \sin \varepsilon_{ni} = -n_{nj}(\varepsilon'_{nj}, \vartheta_i) \sin \varepsilon'_{nj}. \quad \begin{matrix} (i = \text{I, II}) \\ (j = \text{I, II}) \end{matrix} \quad (54)$$

Podrobnější diskuzi zákonů odrazu a lomu pro normálový směr šíření provedeme v poslední části této práce.

## II. HUYGENSŮV PRINCIP

Abychom mohli použít *Huygensova* principu ke konstrukci lomené, resp. odražené vlny na rozhraní dvou anizotropních prostředí, je třeba si uvědomit, že v anizotropním prostředí má elementární vlnoplocha tvar plochy čtvrtého stupně, udané v hlavní souřadné soustavě rovnicí (6). Tato plocha není v obecném případě symetrická k rovině dopadu. Dále je nutno zdůraznit, že směr šíření energie není kolmý na vlnoplochu šíření.

Konstrukce lomeného paprsku se obvykle provádí jen v některých speciálních případech. Analytické výpočet zatím proveden nebyl.

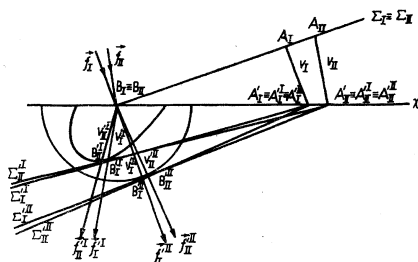
V tomto odstavci provedeme konstrukci lomeného a odraženého paprsku a naznačíme matematický postup analytického výpočtu, dále pak ukážeme, že z konstrukce na základě *Huygensova* principu plynou jednak zákony lomu a odrazu pro paprskový směr šíření, jednak zákony lomu a odrazu pro normálový směr šíření.

### A. Zákony lomu a odrazu pro paprskový směr

#### 1. Zákony lomu

Provedeme nejprve konstrukci pro speciální případ, kdy dvě ze souřadných rovin obou hlavních souřadných soustav jsou rovnoběžné.

Předkládáme, že obě dopadající rovinné vlnoplochy  $\Sigma_I$  a  $\Sigma_{II}$  jsou rovnoběžné a jejich směry šíření energie jsou určeny směrovými vektory  $\vec{f}_I$  a  $\vec{f}_{II}$  (viz. obr. 5).



Obr. 5.

Pro konstrukci volíme polohu obou dopadajících vlnoploch tak, že obě protínají rovinu rozhraní  $\chi$  ve společné přímce, která je na obr. 5. znázorněna bodem  $B_I \equiv B_{II}$ . To tedy znamená, že obě vlnoplochy budou v okamžiku, který označíme  $t = 0$ , splývat v jediné rovině  $\Sigma_I \equiv \Sigma_{II}$ .

Body  $A_I$  a  $A_{II}$  na vlnoplochách  $\Sigma_I$  a  $\Sigma_{II}$  volíme tak, aby pro jejich průměty na rovinu rozhraní  $\chi$   $A'_I \equiv A'_I \equiv A''_I$  a  $A'_{II} \equiv A'_{II} \equiv A''_{II}$ , které získáme průmětem ve směru vektorů  $\vec{f}_I$  a  $\vec{f}_{II}$ , platilo

$$\frac{A_I A'_I}{A_{II} A'_{II}} = v_I$$

$$\frac{A_I A'_I}{A_{II} A'_{II}} = v_{II},$$

kde  $v_I$  a  $v_{II}$  jsou příslušné paprskové rychlosti.

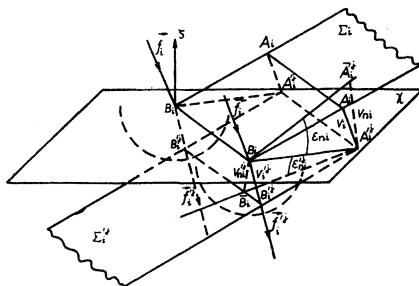
Za jednotku času dorazí tedy body  $A_I$  a  $A_{II}$  do bodů  $A'_I$  a  $A'_{II}$ . Za tuto dobu se ale rozšíří rozruch z bodu  $B_I \equiv B_{II}$  na dvě vlnoplochy, odpovídající ploše čtvrtého stupně (6), které jsou v našem případě na obr. 5. představovány kružnicí a elipsou. Poněvadž kmitosměrové roviny v obou prostředích nemusejí obecně splývat, znamená to, že energie z obou dopadajících, lineárně polarizovaných vlnoploch  $\Sigma_I$  a  $\Sigma_{II}$  se rozšíří na obě elementární vlnoplochy v druhém prostředí. Konstrukci provedeme tedy tak, že z obou bodů  $A'_I$ ,  $A'_{II}$  vedeme tečny k oběma vlnoplochám. Tím získáme čtyři přímky, odpovídající čtyřem lomeným vlnoplochám. Příslušné paprskové směry určíme jako spojnice bodu  $B_I \equiv B_{II}$  a jednotlivých bodů dotyku  $B'_I, B''_I, B'_{II}, B''_{II}$ .

Pro konstrukci a analytické vyjádření v obecném případě budeme pro přehlednost nákresu uvažovat pouze jednu dopadající a jednu lomenou vlnoplochu.



což nebude na závalu obecnosti řešení, neboť o dopadající a lomené vlnoploše nečiníme žádných předpokladů.

Konstrukce lomené vlnoplochy je provedena na obr. 6. Rovina rozhraní je zde označena  $\chi$ . Dopadající vlnoplocha  $\Sigma_i$  se šíří ve směru  $\mathbf{f}_i$  a protíná v okamžiku  $t = 0$  rovinu rozhraní  $\chi$  v přímce  $B_i B_i$ . Body  $A_i A_i$  jsou opět voleny tak, aby rozruch, šířící se ve směru paprsku  $\mathbf{f}_i$  rychlostí  $v_i$  dosáhl za časovou jed-



Obr. 6.

notku roviny rozhraní  $\chi$ . Konstrukce lomené vlnoplochy  $\Sigma_i'$  je provedena tak, že přímkou  $A_i' A_i'$ , ve které vlnoplocha  $\Sigma_i$  v okamžiku  $t_s$  po tom, kdy se nacházela v bodě  $B_i$ , protíná rovinu rozhraní  $\chi$ , proložíme tečnou rovinu k elementární vlnoploše v druhém prostředí, na kterou se rozšířil rozruch z bodu  $B_i$  za jednotku času. Bod dotyku  $B_i'$  udává pak spolu s bodem  $B_i$  směr šíření energie v druhém prostředí.

Promítneme-li bod  $A_i'$  kolmo na rovinu vlnoplochy  $\Sigma_i'$ , je jeho průmětem nějaký bod  $A_i''$ . Úsečka  $A_i'' A_i'$  udává normálovou rychlost v prvním prostředí  $v_{ni} = A_i'' A_i' = v_i \cos \delta_i$  a podobně úsečka  $B_i B_i'$  normálovou rychlost v druhém prostředí  $v_{ni}' = B_i B_i' = v_i' \cos \delta_i'$ .

Pro analytické vyjádření je třeba opět transformovat hlavní souřadnou soustavu druhého prostředí  $x', y', z'$  do hlavní souřadné soustavy prvního prostředí  $x, y, z$ . Tuto transformaci provedeme opět pomocí matice transformace (31).

Paprskovou rychlost dopadající vlnoplochy  $v_i$ , udanou v hlavní souřadné soustavě  $x, y, z$  vztahy (7), je formálně možno zapsat jako funkci směru šíření energie  $\mathbf{f}_i (\cos \beta_{i1}, \cos \beta_{i2}, \cos \beta_{i3})$

$$v_i = v_i(\mathbf{f}_i). \quad (55)$$

Použijeme-li dále vztahů (11a), resp. (11b), lze pomocí souřadnic, udávajících paprskový směr  $\mathbf{f}_i$  vyjádřit i příslušnou normálovou rychlost  $v_{ni}$

$$v_{ni} = v_{ni}(v_i, \mathbf{f}_i). \quad (56)$$

Rovnice vlnoplochy v druhém prostředí je stanovena v souřadnicích  $x', y', z'$  vztahem (6) a provedeme-li transformaci (31), obdržíme tuto ve tvaru

$$F'_j(x, y, z) = 0. \quad (j = \text{I, II}) \quad (57)$$

K vyjádření směrových kosinů normálového směru  $\mathbf{s}_i(\cos \alpha_{i1}, \cos \alpha_{i2}, \cos \alpha_{i3})$  v soustavě  $x, y, z$  v závislosti na paprskovém směru  $\mathbf{f}_i(\cos \beta_{i1}, \cos \beta_{i2}, \cos \beta_{i3})$  a na paprskové rychlosti  $v_i$  použijeme vztahů (10), které zapíšeme zkráceně

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{i1} &= s_{i1}(v_i, \mathbf{f}_i) \\ \cos \alpha_{i2} &= s_{i2}(v_i, \mathbf{f}_i) \\ \cos \alpha_{i3} &= s_{i3}(v_i, \mathbf{f}_i). \end{aligned} \quad (58)$$

Podobně, jako v případě Fermatova principu transformujeme nyní soustavu  $x, y, z$  do soustavy  $\xi, \eta, \zeta$ , kde  $\zeta$  tvoří normálu na výbrus roviny rozhraní. K tomuto účelu použijeme opět matice transformace (32). Označíme v nové souřadné soustavě směrové kosiny vektoru  $\mathbf{f}_i(f_{i\xi}, f_{i\eta}, f_{i\zeta})$  a vztahy (55), (56), (57) a (58) píšeme nyní jako funkce  $\mathbf{f}$  a  $\zeta, \eta, \xi$  ve tvaru

$$v_i = v_i(f_{i\xi}, f_{i\eta}, f_{i\zeta}), \quad (59)$$

$$v_{ni} = v_{ni}(v_i, f_{i\xi}, f_{i\eta}, f_{i\zeta}), \quad (60)$$

$$\Phi_j(\xi, \eta, \zeta) = 0, \quad (61)$$

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_i(v_i, f_{i\xi}, f_{i\eta}, f_{i\zeta}) \quad \begin{matrix} (i = \text{I, II}) \\ (j = \text{I, II}). \end{matrix} \quad (62)$$

Dopadá-li paprsek pod úhlem dopadu  $\varepsilon_i$  a jeho průmět do roviny výbrusu  $\xi, \eta$  svírá s osou  $\xi$  úhel  $\varphi_i$ , pak lze psát

$$\begin{aligned} f_{i\xi} &= \sin \varepsilon_i \cos \varphi_i \\ f_{i\eta} &= \sin \varepsilon_i \sin \varphi_i \\ f_{i\zeta} &= \cos \varepsilon_i \end{aligned} \quad (63)$$

a je tedy vzhledem k (59), (60) a (62) možno normálový směr  $\mathbf{s}_i$  a normálovou rychlost  $v_{ni}$  vyjádřit jako funkci úhlu dopadu  $\varepsilon_i$  a azimutu  $\varphi_i$

$$v_{ni} = v_{ni}(\varepsilon_i, \varphi_i) \quad (64)$$

$$\mathbf{s}_i(s_{i\xi}, s_{i\eta}, s_{i\zeta}) = \mathbf{s}_i[\mathbf{f}_i(\varepsilon_i, \varphi_i)]. \quad (65a)$$

Z rovnice (65a) stanovíme souřadnice směrového vektoru  $\mathbf{s}_i$  jako funkce  $\varepsilon_i$  a  $\varphi_i$

$$\begin{aligned} s_{i\xi} &= s_{i\xi}(\varepsilon_i, \varphi_i) \\ s_{i\eta} &= s_{i\eta}(\varepsilon_i, \varphi_i) \\ s_{i\zeta} &= s_{i\zeta}(\varepsilon_i, \varphi_i). \end{aligned} \quad (65b)$$

Zavedeme-li nyní podobné polární souřadnice pro normálový směr  $\mathbf{s}_i$ , jako jsme zavedli pro paprskový směr  $\mathbf{f}_i$ , tj. označíme úhel, který svírá směr  $\mathbf{s}_i$

s normálou rozhraní  $\varepsilon_{ni}$  a azimut  $\vartheta_i$ , máme

$$\begin{aligned} s_{i\xi} &= \sin \varepsilon_{ni} \cos \vartheta_i = s_{i\xi}(\varepsilon_i, \varphi_i) \\ s_{i\eta} &= \sin \varepsilon_{ni} \sin \vartheta_i = s_{i\eta}(\varepsilon_i, \varphi_i) \\ s_{i\zeta} &= \cos \varepsilon_{ni} = s_{i\zeta}(\varepsilon_i, \varphi_i). \end{aligned} \quad (66)$$

Odtud stanovíme  $\varepsilon_{ni}$  a  $\vartheta_i$  jako funkce  $\varepsilon_i$  a  $\varphi_i$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ni} &= \varepsilon_{ni}(\varepsilon_i, \varphi_i) \\ \vartheta_i &= \vartheta_i(\varepsilon_i, \varphi_i). \end{aligned} \quad (67)$$

Rovnice tečné roviny, konstruované v libovolném bodě elementární vlnoplochy (61) o souřadnicích  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  píšeme ve tvaru

$$\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial\xi}\right)_{\xi_i} (\xi_{ii} - X) + \left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial\eta}\right)_{\eta_i} (\eta_{ii} - Y) + \left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial\zeta}\right)_{\zeta_i} (\zeta_{ii} - Z) = 0, \quad (68)$$

kde  $X, Y, Z$  jsou souřadnice libovolného bodu tečné roviny v souřadné soustavě.

Tato tečná rovina musí ležet ve svazku rovin, určených rovinou rozhraní  $\Sigma$ , která má rovnici

$$Z = 0 \quad (69)$$

a rovinou dopadající vlnoplochy  $\Sigma_i$  v okamžiku, kdy tato protíná rovinu rozhraní v přímce  $A_i^j A_i^j$ . Poněvadž normála této vlnoplochy je  $s_i$  a její vzdálenost od bodu  $B_i^j$  je  $v_{ni}$ , je její rovnice určena pomocí  $\varepsilon_{ni}, \vartheta_i$  následovně

$$\begin{aligned} \sin \varepsilon_{ni}(\varepsilon_i, \varphi_i) \cos \vartheta_i(\varepsilon_i, \varphi_i) X + \sin \varepsilon_{ni}(\varepsilon_i, \varphi_i) \sin \vartheta_i(\varepsilon_i, \varphi_i) Y + \\ + \cos \varepsilon_{ni}(\varepsilon_i, \varphi_i) Z + v_{ni}(\varepsilon_i, \varphi_i) = 0. \end{aligned} \quad (70)$$

Rovnice, ležící ve svazku těchto rovin musí být lineární kombinací (69) a (70), to znamená, že musí vyhovovat rovnici

$$\begin{aligned} \lambda \sin \varepsilon_{ni}(\varepsilon_i, \varphi_i) \cos \vartheta_i(\varepsilon_i, \varphi_i) X + \lambda \sin \varepsilon_{ni}(\varepsilon_i, \varphi_i) \sin \vartheta_i(\varepsilon_i, \varphi_i) Y + \\ + [\lambda \cos \varepsilon_{ni}(\varepsilon_i, \varphi_i) + \mu] Z + \lambda v_{ni}(\varepsilon_i, \varphi_i) = 0, \end{aligned} \quad (71)$$

kde jsme označili  $\lambda$  a  $\mu$  dva libovolné parametry.

Porovnáním koeficientů rovnice (71) s koeficienty rovnice (68), obdržíme spolu s rovnicí (61) pět rovnic pro pět neznámých  $\xi_{ii}, \eta_{ii}, \zeta_{ii}, \lambda$  a  $\mu$ .

Poněvadž rovnice (61) je rovnicí čtvrtého stupně, je zřejmé, že tato řešení nebudou jednoznačná. Obecně obdržíme čtyři reálná řešení pro  $\xi_{ii}, \eta_{ii}, \zeta_{ii}$  z nichž dvě budou vyhovovat požadavku lomu. Přesnou specifikaci těchto řešení není možno v obecném případě provést.

Dvě řešení, odpovídající lomu, označíme

$$\xi_{ii}^{(I)}, \eta_{ii}^{(I)}, \zeta_{ii}^{(I)} \quad \text{a} \quad \xi_{ii}^{(II)}, \eta_{ii}^{(II)}, \zeta_{ii}^{(II)}.$$

Tato dvě řešení odpovídají dvěma směrům lomu, do kterých se láme paprsek, dopadající pod úhlem dopadu  $\varepsilon_i$ , v azimutu  $\varphi_i$ , s paprskovou rychlostí  $v_i$  resp. s paprskovým indexem  $n_i$ , a jehož polarizační stav je udán jednoznačně směrem šíření energie  $\mathbf{f}_i$  a paprskovou rychlostí  $v_i$ . Obě dvě řešení jsou pouze funkcemi  $\varepsilon_i$  a  $\varphi_i$ .

Označíme-li úhel  $\varepsilon_i^j$  a azimut roviny lomu  $\varphi_i^j$ , obdržíme zákon lomu ve tvaru

$$\sin \varepsilon_i^j = \frac{\sqrt{(\xi_i^j)^2 + (\eta_i^j)^2}}{\sqrt{(\xi_i^j)^2 + (\eta_i^j)^2 + (\zeta_i^j)^2}} \quad (72)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_i^j = \frac{\eta_i^j}{\xi_i^j} \quad (i = \text{I, II}) \quad (73)$$

(j = \text{I, II}).

Vztahy (72) a (73) představují tedy čtyři zákony lomu pro paprskový směr. Chceme-li znát paprskový index lomu ve směru šíření energie, použijeme vztahu

$$n_i^j = \frac{c}{\sqrt{(\xi_i^j)^2 + (\eta_i^j)^2 + (\zeta_i^j)^2}}. \quad (74)$$

## 2. Zákony odrazu

Postup při stanovení zákonů odrazu je velmi podobný, jako při stanovení zákonů lomu. Stejně, jako u *Fermatova* principu není však třeba provádět transformaci (31), neboť elementární vlnoplocha odraženého světla je opět udána v hlavní souřadné soustavě prvního prostředí  $x, y, z$ .

Při řešení výsledných rovnic bereme druhá dvě řešení, která jsme neuvažovali v případě lomu.

Naprostou stejným matematickým postupem dojdeme pak k podobným výrazům, jako vztahy (72), (73), (74), které udávají zákony odrazu pro anizotropní prostředí.

Je zřejmé, že i v případě odrazu každá z dopadajících vlnoploch se dělí na dvě odražené vlnoplochy, takže v obecném případě dostáváme čtyři zákony odrazu.

Pouze tehdy, když kmitosměrové roviny lomené, nebo odražené vlny splývají s kmitosměrovou rovinou dopadající vlny, je jeden ze směrů lomené, resp. odražené vlny energeticky prázdný.

## B. Zákony lomu a odrazu pro normálový směr

Vraťme se ke konstrukci lomené vlnoplochy na základě *Huygensova* principu na obr. 6. Promítneme-li bod  $A_i^j$  na rovinu dopadající vlnoplochy  $\Sigma_i$ , potom patou kolmice je bod  $\bar{A}_i^j$  a úsečka  $\overline{A_i^j \bar{A}_i^j} = v_{ni}$  udává normálovou rychlost dopadající vlnoplochy.

Podobně úsečka, udaná bodem  $B_i$  a jeho průmětem na vlnoplochu  $\Sigma_i^j$ ,  $\overline{B_i B_i} = v_{ni}^j$  udává normálovou rychlost lomené vlnoplochy.

Z obr. 6. vidíme, že oba trojúhelníky  $\triangle B_i A_i^j$ ,  $A_i^j$  a  $\triangle B_i A_i^j$ ,  $A_i^j$ ,  $B_i$  jsou pravoúhlé trojúhelníky se společnou základnou  $\overline{B_i A_i^j}$ . Označíme-li úhel, který svírá vlnoplocha  $\Sigma_i$  s rovinou rozhraní  $\chi$ ,  $\varepsilon_{ni}$  a úhel, který svírá rovina  $\Sigma_i^j$  s rovinou rozhraní  $\chi$ ,  $\varepsilon_{ni}^j$ , pak zřejmě platí

$$\frac{v_{ni}}{\sin \varepsilon_{ni}} = \frac{v_{ni}^j}{\sin \varepsilon_{ni}^j} \quad (75)$$

a odtud vzhledem k (12)

$$n_{ni} \sin \varepsilon_{ni} = n_{ni}^j \sin \varepsilon_{ni}^j \quad (i = \text{I, II}), (j = \text{I, II}). \quad (76)$$

Toto je zákon lomu pro normálový směr šíření, při čemž z obr. 6. je zřejmé, že platí

$$\vartheta_i = \vartheta_i'. \quad (77)$$

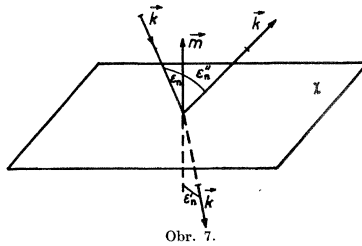
Podobný zákon obdržíme rovněž pro odraženou vlnu, takže vyjádříme-li i funkční závislost na úhlu dopadu a azimutu dopadu, dospíváme ke vztahům (53) a (54).

### III. PRINCIP SPOJITOSTI FÁZE ELEKTRICKÉHO A MAGNETICKÉHO VEKTORU

Nechť na obr. 7 je  $\chi$  opět rovina rozhraní a její rovnice je dána ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{l} = 0, \quad (78)$$

kde  $\mathbf{l}$  je polohový vektor libovolného bodu na rovině rozhraní a  $\mathbf{m}$  normálový vektor roviny rozhraní.



Obr. 7.

Dopadající rovinná elektromagnetická vlna, šířící se ve směru vlnového vektoru  $\mathbf{k}$

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} n_n \mathbf{s}, \quad (79)$$

má pak v prostředí o normálovém indexu  $n_n$  vektory elektrické a magnetické intenzity vyjádřeny následovně (viz [12])

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{H} &= \frac{n_n}{c\mu} \mathbf{s} \times \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (80)$$

kde  $\mu$  je označena magnetická permitivita. Pro lomenou vlnu v prostředí druhém píšeme pak rovnice obou vektorů ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E}'_0 e^{-i(\mathbf{k}'\mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{H}' &= \frac{n_n'}{c\mu'} \mathbf{s}' \times \mathbf{E}' \end{aligned} \quad (81)$$

a pro odraženou vlnu

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'' &= \mathbf{E}_0'' e^{-i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{H}'' &= \frac{n_n''}{c\mu} \mathbf{s}'' \times \mathbf{E}''. \end{aligned} \quad (82)$$

Vektorové amplitudy  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{E}_0'$ ,  $\mathbf{E}_0''$  jsou nezávislé na volbě souřadné soustavy a proto mají-li být vzhledem k okrajovým podmínkám tečné složky výsledných vektorů spojité na rozhraní (viz [12]), musí být argumenty exponenciálních faktorů v rovnicích (80), (81), (82) totožné na ploše  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{l} = 0$ . To tedy znamená, že argumenty pro všechny body na ploše rozhraní, určených polohovým vektorem  $\mathbf{l}$ , musí se sobě rovnat.

Pro libovolný vektor  $\mathbf{l}$ , ležící v rovině rozhraní platí vzhledem k (78)

$$\mathbf{l} = -\mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{l}). \quad (83)$$

Platí tedy pro argumenty funkcí (80), (81), (82)

$$\mathbf{k}[\mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{l})] = \mathbf{k}''[\mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{l})] \quad (84)$$

$$\mathbf{k}[\mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{l})] = \mathbf{k}'[\mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{l})] \quad (85)$$

a protože

$$\mathbf{k}[\mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{l})] = (\mathbf{k} \times \mathbf{m}) (\mathbf{m} \times \mathbf{l})$$

můžeme psát

$$[(\mathbf{k} \times \mathbf{m}) - (\mathbf{k}'' \times \mathbf{m})] (\mathbf{m} \times \mathbf{l}) = 0 \quad (86)$$

$$[(\mathbf{k} \times \mathbf{m}) - (\mathbf{k}' \times \mathbf{m})] (\mathbf{m} \times \mathbf{l}) = 0. \quad (87)$$

Ze vztahů (86) a (87) plyne, že vektory  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}'$ ,  $\mathbf{k}''$  a  $\mathbf{m}$  jsou komplanární. Leží tedy v jedné rovině.

Z prvního vztahu vyplývá

$$k \sin \varepsilon_n = -k'' \sin \varepsilon_n'' \quad (88)$$

a z druhého

$$k \sin \varepsilon_n = k' \sin \varepsilon_n'. \quad (89)$$

Vzhledem k definici vlnového vektoru  $\mathbf{k}$  (79) obdržíme pak z (88) zákon odrazu pro normálový směr šíření

$$n_n \sin \varepsilon_n = -n_n'' \sin \varepsilon_n''$$

a z (89) zákon lomu pro normálový směr šíření

$$n_n \sin \varepsilon_n = n_n' \sin \varepsilon_n'.$$

nebo volíme-li jako parametry pro funkční závislost normálových indexů lomu úhly  $\varepsilon_{ni}$ ,  $\varepsilon_{ni}'$ ,  $\varepsilon_{ni}''$  a azimut  $\vartheta_i$ , dostaneme vzhledem k dvojlomnosti prostředí čtyři zákony lomu (53) a čtyři zákony odrazu (54).

Předpokládá, že ve fázi vystupuje vlnový vektor, definovaný pomocí normálového indexu lomu  $n_n$  a normály  $\mathbf{s}$ , nebudeme zde zdůvodňovat (viz. [1], [4], [13]).

Vidíme tedy, že princip spojitosti fáze na rozhraní vede pouze ke stanovení zákonů lomu a odrazu pro normálový směr šíření, neinformuje nás však vůbec o směru šíření energie.

#### IV. PRINCIP ZACHOVÁNÍ IMPULSŮ

Impuls lze definovat dvojitým způsobem a to buď na základě teorie elektromagnetického pole pomocí vztahu (4)

$$\mathbf{p} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} \quad (90)$$

nebo kvantově mechanicky pomocí vlnového vektoru  $\mathbf{k}$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}, \quad (91)$$

kde  $h$  je Planckova konstanta.

Ukážeme nyní, že oba zápisy (90) a (91) jsou ekvivalentní.

V prvním případě máme z prvních dvou *Maxwellových* rovnic pro vektor magnetické intenzity v případě dielektrika

$$\mu v_n \mathbf{H} = \mathbf{s} \times \mathbf{E} \quad (92)$$

a pro vektor elektrické indukce v případě dielektrika jak izotropního, tak anizotropního

$$v_n \mathbf{D} = \mathbf{H} \times \mathbf{s} \quad (93)$$

(viz. [1], s. 222, nebo [13]).

Odtud dostáváme vztah pro vektor elektrické indukce

$$\mathbf{D} = \frac{1}{v_n^2 \mu} [\mathbf{E} - \mathbf{s} \cdot (\mathbf{E} \cdot \mathbf{s})]. \quad (94)$$

Hustota energie elektrické složky elektromagnetického pole je

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$$

a magnetické složky

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}.$$

Celková hustota energie  $w$  je daná součtem obou hustot  $w_e$  a  $w_m$ , takže použitím (92), (93) a (94) po úpravě dostáváme

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{v_n^2 \mu} [E^2 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{E})^2]. \quad (95)$$

Vektor hustoty impulsu  $\mathbf{p}$ , definovaný podle (90), je možno pomocí vztahů (92), (93), (94) po úpravě zapsat ve tvaru

$$\mathbf{p} = \frac{1}{v_n^2 \mu} [E^2 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{E})^2] \cdot \mathbf{s}, \quad (96)$$

a tedy mezi vektorem hustoty impulsu a hustotou energie platí relace

$$\mathbf{p} = \frac{w}{v_n} \mathbf{s}. \quad (97)$$

Vydeme-li ze vztahu (91), máme pro energii fotonu

$$E = \hbar\omega. \quad (98)$$

Poněvadž vektor  $\mathbf{k}$  je definován vztahem

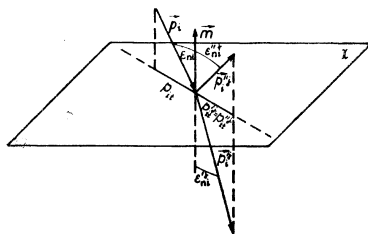
$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{v_n} \mathbf{s}, \quad (99)$$

lze psát pro vektor impulsu jednoho fotonu

$$\mathbf{p} = \frac{E}{v_n} \mathbf{s}, \quad (100)$$

což je zápis ekvivalentní zápisu (97).

Z obou vztahů (97) a (100) je zřejmé, že impuls v případě průhledného dielektrika závisí pouze na normálové rychlosti  $v_n$ , resp. na normálovém indexu lomu  $n_n$ , a na normálovém směru šíření  $\mathbf{s}$ , neboť u průhledného dielektrika je hustota energie konstantní veličinou. Je tedy zřejmé, že na základě platnosti zákona o zachování impulsů je možno odvodit pouze zákony lomu a odrazu, které se týkají normálového směru šíření.



Obr. 8.

Uvažujeme-li lom, resp. odraz, jednoho fotonu jako částice (viz obr. 8.), je známo z mechaniky i z teorie elektromagnetického pole, že tečné složky impulsů v rovině rozhraní musejí být v případě lomu i odrazu rovny tečné složce dopadající částice. Označíme-li  $\mathbf{m}$  jednotkový vektor normály na rovinu rozhraní, lze tuto podmínku zapsat ve tvaru (viz. obr. 8.).

$$[(\mathbf{p}_i \times \mathbf{m}) - (\mathbf{p}_i^j \times \mathbf{m})] (\mathbf{m} \times \mathbf{l}) = 0 \quad (101)$$

$$[(\mathbf{p}_i \times \mathbf{m}) - (\mathbf{p}_i^j \times \mathbf{m})] (\mathbf{m} \times \mathbf{l}) = 0 \quad \begin{matrix} (i = \text{I, II}) \\ (j = \text{I, II}) \end{matrix} \quad (102)$$

kde jsme označili  $\mathbf{l}$  polohový vektor libovolného bodu v rovině rozhraní.

Z těchto podmínek, podobně jako v předcházejícím článku, plyne komplanárnost vektorů  $\mathbf{p}_i$ ,  $\mathbf{p}_i^j$ ,  $\mathbf{p}_i^i$ ,  $\mathbf{m}$  a dále vztahy

$$p_i \sin \epsilon_{ni} = p_i^j \sin \epsilon_{ni}^j \quad (103)$$



a

$$p_i \sin \varepsilon_{ni} = -p_i^{\prime j} \sin \varepsilon_{ni}^{\prime j}. \quad (104)$$

Použitím (100) a (15) dostaneme opět zákony lomu a odrazu pro normálový směr šíření (53) a (54).

Podotýkáme zde, že tento způsob odvození je vlastně ekvivalentní principu spojitosti fáze vlnových funkcí, neboť vlnové funkce jednotlivých vln lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned} \psi_i &= A_i e^{-\frac{i}{h}(E_i t - \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r})} \\ \psi_i^{\prime j} &\doteq A_i^{\prime j} e^{-\frac{i}{h}(E_i^{\prime j} t - \mathbf{p}_i^{\prime j} \cdot \mathbf{r})} \\ \psi_i^{*j} &= A_i^{\prime j} e^{-\frac{i}{h}(E_i^{\prime j} t - \mathbf{p}_i^{\prime j} \cdot \mathbf{r})} \end{aligned}$$

a odtud, požadujeme-li spojitost fází vlnových funkcí na rozhraní, obdržíme vztahy (101) a (102).

#### V. DISKUSE ZÁKONŮ LOMU A ODRAZU PRO NORMÁLOVÝ SMĚR ŠÍŘENÍ

V tomto odstavci ukážeme, jakým způsobem je možno stanovit explicitní funkce pro úhel lomu, resp. úhel odrazu na rozhraní dvou anizotropních prostředí v závislosti na úhlu dopadu  $\varepsilon_{pi}$  a na azimutu  $\vartheta_i$ , ve kterém leží vlnový vektor  $\mathbf{k}_i$ , resp. normálový směr šíření  $\mathbf{s}_i$ .

Pro lom vycházíme ze zákona lomu (53), který píšeme ve známém tvaru

$$n_{ii}(\varepsilon_{ni}, \vartheta_i) \sin \varepsilon_{ni} = n_{nj}(\varepsilon_{ni}^{\prime j}, \vartheta_i) \sin \varepsilon_{ni}^{\prime j}, \quad \begin{aligned} (i &= \text{I, II}) \\ (j &= \text{I, II}) \end{aligned} \quad (105)$$

Poněvadž indexy lomu  $n_{ni}$ ,  $n_{nj}$  máme podle (8a), (8b) vyjádřeny jako funkce normálových vektorů  $\mathbf{s}_i$  ( $\cos \alpha_{i1}$ ,  $\cos \alpha_{i2}$ ,  $\cos \alpha_{i3}$ ), a  $\mathbf{s}_i^{\prime j}$  ( $\cos \alpha_{i1}^{\prime j}$ ,  $\cos \alpha_{i2}^{\prime j}$ ,  $\cos \alpha_{i3}^{\prime j}$ ) v hlavních souřadných soustavách obou prostředí, nelze přímo z rovnice (105) stanovit explicitní funkce pro  $\varepsilon_{ni}^{\prime j}$  v závislosti na  $\varepsilon_{ni}$  a  $\vartheta_i$ .

Vztahy (8a) a (8b) zapíšeme formálně v hlavních soustavách obou prostředí ve tvaru

$$n_{ni} = n_{ni}(\cos \alpha_{i1}, \cos \alpha_{i2}, \cos \alpha_{i3}) \quad (106)$$

$$n_{nj} = n_{nj}(\cos \alpha_{i1}^{\prime j}, \cos \alpha_{i2}^{\prime j}, \cos \alpha_{i3}^{\prime j}). \quad (107)$$

Abychom funkce (106) a (107) mohli vyjádřit v jedné souřadné soustavě, transformujeme opět soustavu  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  podle matice transformace (31) do hlavní souřadné soustavy prvního prostředí  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , takže označíme-li směrové kosiny vektoru  $\mathbf{s}_i^{\prime j}$  v soustavě  $x$ ,  $y$ ,  $z$   $s_{ix}^{\prime j}$ ,  $s_{iy}^{\prime j}$ ,  $s_{iz}^{\prime j}$ , lze index lomu (107) po provedení transformace (31) vyjádřit jako funkci normálového směru  $\mathbf{s}_i^{\prime j}$  v hlavní souřadné soustavě prvního prostředí

$$n_{nj} = n_{nj}(s_{ix}^{\prime j}, s_{iy}^{\prime j}, s_{iz}^{\prime j}). \quad (108)$$

Hlavní souřadnou soustavu  $x, y, z$  podobně jako v předcházejících člácích transformujeme do soustavy  $\xi, \eta, \zeta$ , jejíž osa  $\zeta$  tvoří normálu na rozhraní. Tuto transformaci provedeme podle matice (32).

Nechť v nové soustavě mají směrové vektory  $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}'_i$  směrové kosiny  $s_i(s_{i\xi}, s_{i\eta}, s_{i\zeta})$  a  $s'_i(s'_{i\xi}, s'_{i\eta}, s'_{i\zeta})$ . Funkce (106) a (108) nabudou po provedení transformace tvaru

$$n_{ni} = n_{ni}(s_{i\xi}, s_{i\eta}, s_{i\zeta}) \quad (109)$$

$$n'_{nj} = n'_{nj}(s'_{j\xi}, s'_{j\eta}, s'_{j\zeta}) \quad (110)$$

Nyní zavedeme polární souřadnice dopadajícího a lomeného paprsku vztahy

$$\begin{aligned} s_{i\xi} &= \sin e_{ni} \cos \vartheta_i \\ s_{i\eta} &= \sin e_{ni} \sin \vartheta_i \\ s_{i\zeta} &= \cos e_{ni} \end{aligned} \quad (111)$$

a

$$\begin{aligned} s'_{j\xi} &= \sin e'_{nj} \cos \vartheta_j \\ s'_{j\eta} &= \sin e'_{nj} \sin \vartheta_j \\ s'_{j\zeta} &= \cos e'_{nj}. \end{aligned} \quad (112)$$

Po dosazení do (109) a (110) máme pak

$$n_{ni} = n_{ni}(e_{ni}, \vartheta_i) \quad (113)$$

$$n'_{nj} = n'_{nj}(e'_{nj}, \vartheta_j), \quad (114)$$

čímž jsme získali hledané funkce v rovnici (105). Nyní je rovnice (105) zřejmě rovnicí o jedné neznámé  $e'_{nj}$ , kterou lze stanovit jako funkci  $e_{ni}$  a  $\vartheta_i$ .

$$e'_{nj} = e'_{nj}(e_{ni}, \vartheta_i). \quad (i = \text{I, II}), (j = \text{I, II}) \quad (115)$$

Pro případ odrazu je celý postup obdobný, není pouze třeba provádět transformaci (31).

Vydeme-li ze zákona odrazu (54)

$$n_{ni}(e_{ni}, \vartheta_i) \sin e_{ni} = -n_{nj}(e'_{nj}, \vartheta_j) \sin e'_{nj} \quad (116)$$

a vyjádříme-li použitím transformací (32) indexy lomu  $n_{ni}$  a  $n_{nj}$  jako funkce  $e_{ni}, \vartheta_i$  a  $e'_{nj}, \vartheta_j$ , obdržíme podobným postupem, jako v případě lomu čtyři zákony odrazu

$$e'_{nj} = e'_{nj}(e_{ni}, \vartheta_i). \quad (i = \text{I, II}), (j = \text{I, II}) \quad (117)$$

#### ZÁVĚR

Jak u zákonů odrazu, a lomu pro paprskový směr šíření, tak u zákonů odrazu a lomu pro normálový směr šíření, je praktický výpočet nesmírně obtížný a není jej v obecném případě možno provést.

Poměrně dobře je však možno stanovit zákony lomu pro jednoosé krystaly, je-li prvním prostředím prostředí izotropní (viz [6]). V některých případech lze

poměrně bez velkých obtíží stanovit zákony lomu pro normálový směr u dvojosých krystalů (viz [4], [13]).

Pro praktickou potřebu bylo by zřejmě daleko výhodnější ke stanovení zákonů odrazu a lomu na rozhraní anizotropních prostředí použít přibližných grafických metod, nežli zde uvedeného postupu přesného explicitního vyjádření. Při tom by se dalo velmi dobře použít analogových počítačích strojů.

#### LITERATURA

- [1] *Born, M.*: Optik (Berlin—Heidelberg—New York — 1965).
- [2] *Born, M.—Wolf, E.*: Principles of Optics (London—New York—Paris—Los Angeles — 1959).
- [3] *Fedorov, F. I.*: Optika anizotropnych sred (Minsk — 1958).
- [4] *Pörsterling, K.*: Lehrbuch d. Optik (Leipzig — 1928).
- [5] *Francon, M.*: Interférences, diffraction et polarisation, Handbuch d. Optik, B. XXIV. (Berlin—Göttingen—Heidelberg — 1956).
- [6] *Chmela, P.*: Optik 26, 134 (1967).
- [7] *Landé, A.*: Optik, Mechanik u. Wellenmechanik, Handbuch d. Physik, B. XX. (Berlin 1928).
- [8] *Mandelštam, L. I.*: Polnoje sobranije trudov, Tom 5. (Moskva — 1950).
- [9] *Pauli, W.—Scheidegger, A.*: Optik u. Elektrontheorie (Boringhieri — Torino — 1962).
- [10] *Pockels, F.*: Lehrbuch d. Kristallogoptik (Leipzig — 1906).
- [11] *Ramachandran, G. N.—Ramaseshan, S.*: Crystal Optics, Handbuch d. Physik (Berlin—Göttingen—Heidelberg — 1961).
- [12] *Stratton, J. A.*: Teorie elektromagnetického pole (Praha — 1961).
- [13] *Szivevsky, G.*: Kristallogoptik, Handbuch d. Physik, B. XX. (Berlin — 1928).
- [14] *Wood, R. W.*: Physical Optics (New York — 1949).

#### Zusammenfassung

#### DIE VERWENDBARKEIT DER ALLGEMEINEN OPTISCHEN PRINZIPE BEI DER BESTIMMUNG DER REFLEXIONS- UND BRECHUNGSGESETZE AN DER GRENZE ZWEIER ANISOTROPEN DURCHSICHTIGEN KRISTALLE

*Pavel Chmela*

In dieser Arbeit wurde die Verwendbarkeit der allgemeinen optischen Prinzipie bei der Bestimmung der Reflexions- und Brechungsgesetze an der Grenze zweier anisotropen durchsichtigen Kristalle studiert. Es handelt sich um folgende Prinzipie:

1. Fermatsches Prinzip
2. Huygenssches Prinzip
3. Prinzip der Stetigkeit der elektrischen und magnetischen Vektoren
4. Prinzip der Impulserhaltung.

Es zeigt sich da, dass man im 1. und 2. Falle wie die Brechungs- und Reflektionsgesetze für die Strahlenrichtung, als auch dieselben für die Normenrichtung erhalten kann, wogegen man im 3. und 4. Falle nur die Brechungs- und Reflektionsgesetze für Normalenrichtung erhält.