Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Paul Günther

Sophus Lie

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 9 (1968), No. 1, 5--26

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/119875

1968 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 27

SOPHUS LIE

VON PAUL GÜNTHER

(Eingelangt am 20. Juni 1967)

Unter den Mathematikern, die im Laufe der Jahrhunderte an der Leipziger Universität wirkten, gebührt dem Norweger Sophus Lie ein besonderer Ehrenplatz.

I

Marius Sophus Lie wurde am 17. 12. 1842 in Nordfjordeide am Eidsfjord, einem Zweige des Nordfjords, als Sohn eines Pfarrers und als jüngstes von sechs Geschwistern geboren.[1]) Er besuchte von 1857 an eine Lateinschule in Kristiania, dem heutigen Oslo, und studierte danach von 1859—65 an der dortigen Universität die „Realfächer", ohne daß dabei eine besondere Neigung für Mathematik zutage getreten wäre. Lie berichtet später,[2]) daß er 1862 bei seinem Landsmann L. Sylow (1832—1918) eine kurze Vorlesung über die Galoissche Theorie gehört habe, die damals unter den Mathematikern ganz allmählich bekannt wurde. Als Lie 1865 seine Studien mit dem Lehrerexamen abschließt, ist er noch recht im Zweifel, welchem Beruf er sich zuwenden soll; er versucht sich zwar nicht ohne Erfolg in öffentlichen Vorträgen über Astronomie, doch gewährt ihm dies, ebenso wie das Erteilen von mathematischem Privatunterricht keine rechte Befriedigung.

Aber im Jahre 1868 erwacht der Drang zum Schöpferischen; angeregt insbesondere durch die geometrischen Werke von I. V. Poncelet (1788—1867) und I. Plücker (1801—1868), faßt er den Gedanken, „in der Mathematik als Schriftsteller aufzutreten",[3]) — und dies führt er 30 Jahre lang mit seltener Intensität durch. Seine ersten Arbeiten sind geometrischer Natur und zeichnen sich bereits durch eine reiche Gedankenvielfalt aus.

1869 erhält Lie ein Reisestipendium und verbringt den Winter in Berlin, wo er an den Seminaren von Weierstraß und Kummer teilnimmt, aber doch wohl mehr seinen eigenen Arbeiten nachhängt. Hier lernt er auch Felix Klein[4]) (1849—1925) kennen, mit dem er sogleich in regen Gedankenaustausch tritt, der sich in späterem Briefwechsel fortsetzt. Im Frühjahr 1870 setzt Lie seine

[1]) Wir stützen uns vielfach auf die folgenden beiden Nachrufe auf S. Lie: F. Engel, Leipziger Berichte **51**, XI—LXI, (1899); M. Noether, Math. Ann. **53**, 1—41, (1900).

[2]) S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen, Band 3, Leipzig 1893, S. XXIII. — Dieses Werk zitieren wir im folgenden unter der Abkürzung „TG".

[3]) Siehe Fußnote [2]).

[4]) Von 1880 bis 1886 ord. Prof. in Leipzig.

Reise über Göttingen nach Paris fort, wo er mit G. Darboux und C. Jordan, später mit dem nachgereisten F. Klein zusammentrifft. Als dieser wegen des inzwischen ausgebrochenen Krieges nach Deutschland zurückkehrt, faßt Lie, — zeit seines Lebens ein rüstiger Fußwanderer —, den Plan, zu Fuß nach Italien zu gelangen; er wird allerdings schon in Fontainebleau als angeblicher deutscher Spion einen Monat lang im Gefängnis festgehalten, kommt aber schließlich doch nach Italien und kehrt über die Schweiz und Deutschland nach Kristiania zurück. Während dieser Reise arbeitet Lie unentwegt, er findet den allgemeinen Begriff der Berührungstransformation und seine berühmte Geraden-Kugeltransformation; beides wendet er auf Differentialgleichungen an. Als Universitätsstipendiat in Kristiania erwirbt Lie 1871 den philosophischen Doktorgrad, der gleichzeitig die Habilitation beinhaltete.

Im folgenden Winter bewirbt sich Lie um eine erledigte Professur in Lund (Schweden), was ihm als patriotischem Norweger nicht leicht fiel. Norwegen war ja damals, nachdem es 1814 seine Unabhängigkeit von Dänemark erlangt hatte, durch Personalunion mit Schweden verbunden, doch war das gegenseitige Verhältnis recht spannungsreich, und die Norweger strebten nach völliger Selbständigkeit, die sie schließlich 1905 erlangten. Die Absicht Lies, nach Lund zu gehen, weckte Bestrebungen zu seinen Gunsten und am 26. 3. 1872 beschloß der Storthing (norwegisches Parlament) eine persönliche Professur für Lie in Kristiania einzurichten. Diese Stellung empfand Lie „als sehr angenehm", seine Vorlesungen konnte er nach Belieben einrichten, er klagte lediglich über die vielen Prüfungen. Weihnachten darauf verlobt sich Lie mit Anna Birch; der 1874 geschlossenen Ehe entstammten zwei Töchter und ein Sohn.

1872 findet Lie seine neue Integrationsmethode für partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung. Im Spätherbst trifft er wieder mit Klein, diesmal in Erlangen zusammen; auf dieser Reise lernt er auch Adolph Mayer[5]) (1839 bis 1908) in Leipzig kennen, dessen Arbeiten über Differentialgleichungen mit den seinen eng zusammenhängen und mit dem er auch später Briefe wechselt. Schließlich gelangt er 1873 zu den Anfängen seiner Theorie der Transformationsgruppen. Damit hat Lie in dem knappen Zeitraum von nur 5 Jahren fast alle seine späteren Theorien und grundlegenden Ideen wenigstens im Ansatz erarbeitet. Ihrer Ausarbeitung und ständigen Ausdehnung widmet er sich fortan mit gewaltiger Arbeitskraft, immer auf die tragenden Ideen und Gedanken konzentriert.

Gemeinsam mit Worm Müller und G. O. Sars gründet Lie 1876 eine eigene, noch heute bestehende Zeitschrift, das „*Archiv for Mathematik og Naturvidenskab*"; er brauchte so nicht mehr auf den langsam vonstatten gehenden Druck seiner Arbeiten in den Verhandlungen der Kristianiaer Gesellschaft der Wissenschaften zu warten. Auch arbeitet er 8 Jahre lang zusammen mit L. Sylow an der Neuausgabe von Abels Werken.

Erwähnt sei noch die Reise von 1882, auf der Lie in Paris mit G. Halphen (1844—1889) wissenschaftlichen Kontakt gewinnt und dadurch zur weiteren Ausarbeitung seiner Theorie der Differentialinvarianten der Gruppen der Ebene und der Theorie eines vollständigen Systems mit bekannter Gruppe veranlaßt wird. Leider fanden damals die Lieschen Arbeiten noch nicht die rechte Beachtung, die sie verdient hätten. „*Wenn ich nur wüßte, wie ich die*

[5]) Ab 1871 a. o. Prof., ab 1890 ord. Prof. in Leipzig.

Mathematiker dazu bringen könnte, sich für die Transformationsgruppen und daraufbegründete Behandlung der Differentialgleichungen zu interessieren. Ich bin so gewiß, absolut gewiß, daß diese Theorien einmal in der Zukunft als fundamental anerkannt werden, Wenn ich wünschte, bald eine solche Auffassung zu schaffen, so ist es u. a., weil ich dann zehnmal mehr machen könnte."[6]) Lies Pläne, seine Theorien durch eine lehrbuchmäßige Darstellung bekannter zu machen, blieben zunächst liegen. 1884 jedoch kam Friedrich Engel[7]) (1861 bis 1941) auf Anregung von F. Klein, seit 1880 ord. Professor für Geometrie in Leipzig, und A. Mayer nach Kristiania, um Lie bei der Ausarbeitung eines Werkes über Transformationsgruppen zu helfen. Die Mittel zu dieser Reise entstammten Stipendien der Leipziger philosophischen Fakultät und der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften.[8]) In dem Dreivierteljahr, das Engel in Kristiania verbrachte, wurde der erste Teil des 3-bändigen Werkes konzipiert, die Vollendung des Ganzen zog sich freilich noch 8 Jahre lang hin.

Zu Ostern 1886 folgt F. Klein einem Ruf nach Göttingen und Lie erhält an seiner Stelle vom sächsischen Kultusministerium eine Berufung als ord. Professor für Geometrie nach Leipzig, die er auch nach kurzem Zögern annimmt. Am 29. 3. 1886 hält er in der Aula der Universität seine Antrittsvorlesung; „*Über den Einfluß der Geometrie auf die Entwicklung der Mathematik.*"[9])

Seine Mathematikerkollegen in Leipzig waren W. Scheibner [10]) (1826—1908) und C. Neumann[11]) (1832—1925) als Ordinarien, dann der schon erwähnte A. Mayer (ab 1890 ord. Prof.); ferner sind F. Schur[12]) (1856—1932) und E. Study[13]) (1862—1930) zu erwähnen; auch F. Engel hatte sich 1885 in Leipzig habilitiert.

Hier in Leipzig hoffte Lie ganz anders als in dem engeren Rahmen von Kristiania für die Verbreitung seiner Ideen wirken zu können, besonders auch durch die Gewinnung von Schülern. In den seinen eigenen Theorien gewidmeten Vorlesungen hatte er stets eine befriedigende Zahl von Hörern. Er findet Mitarbeiter, die ihm bei der Abfassung größerer Werke zur Hand gehen: allen voran Engel bei der schweren Arbeit an der „*Theorie der Transformationsgruppen*" deren letzter Band 1892 erscheint, dann aber auch G. Scheffers (1866—1945), der die „*Geometrie der Berührungstransformationen*, 1. Band"[14]) redigiert, und auch die Bearbeitung der „*Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen*"[15]) und der „*Vorlesungen über continuierliche Gruppen*"[16]) übernimmt. Alle diese Bücher erscheinen im Verlag von B. G. Teubner in Leipzig. Unter den deutschen Schülern ist

[6]) Brief von Lie an A. Mayer, abgedruckt in dem Nekrolog von Engel, (Fußnote 1), S. XLIX.

[7]) Ab 1885 Privatdozent, von 1889—1904 Prof. extr. in Leipzig, später in Greifswald und Gießen.

[8]) Jetzt: Sächsische Akademie der Wissenschaften zu Leipzig.

[9]) S. Lie, Gesammelte Abhandlungen, Band VII, Nr. XXXV. — Dieses Werk zitieren wir im folgenden unter der Abkürzung „GA".

[10]) Ab 1868 ord. Prof. in Leipzig.

[11]) Von 1868 bis 1911 ord. Prof. in Leipzig.

[12]) Ab 1881 Privatdozent, von 1885 bis 1888 Prof. extr. in Leipzig.

[13]) Von 1885 bis 1893 Privatdozent in Leipzig.

[14]) erschienen 1896; vom geplanten 2. Band sind 3 Kapitel in GA, Bd. II, 2 abgedruckt. Dieses Buch zitieren wir im folgenden unter der Abkürzung „GB".

[15]) erschienen 1891.

[16]) erschienen 1893.

noch G. Kowalewski (1876—1950) zu nennen. W. Killing (1847—1923), F. Schur, E. Study und später auch L. Maurer (1859—1927) greifen in ihren Arbeiten Liesche Gedanken auf. Schließlich kommen auch eine ganze Reihe ausländischer Studenten nach Leipzig, um bei Lie zu studieren, u. a. auf Veranlassung Picards (1856—1941) von der berühmten Pariser École Normale, — dieser Schule widmet Lie dann auch den 3. Band seiner „*Transformationsgruppen*".

Seit 1886 ist Lie auch Mitglied der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, nachdem er schon seit 1872 Mitglied der Gesellschaften von Kristiania und Göttingen (in dieser als korrespondierendes Mitglied) war. In den „*Leipziger Berichten*" und „*Leipziger Abhandlungen*", die damals auf einem gerade in mathematischer Hinsicht hohen Niveau standen, publiziert Lie zahlreiche bedeutende Arbeiten, (38), u. a. seine Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie. Später wurde Lie Miglied aller bedeutender Akademien und erhielt 1897 bei der erstmaligen Verleihung den Lobatschefskijpreis zuerkannt.

Im Winter 1889/90 erlitt Lie infolge der unerhörten Willensanspannung, mit der er jahrzehntelang gearbeitet hatte, einen Nervenzusammenbruch. Wenn er auch wieder genas und ein Jahr später seine Vorlesungen und Arbeiten wieder aufnehmen konnte, so blieb doch ein Mißtrauen zurück, das ihm früher nicht eigen gewesen war, und das die Verstimmungen erklärt, die sich allmählich zwischen ihm und seinen Freunden einschlichen.

Seit 1896 bemühte man sich in Norwegen ernstlich, Lie durch ein glänzendes Angebot wieder nach Kristiania zu ziehen. Er sollte eine Professur für Transformationsgruppen erhalten, die ihm kaum amtliche Verpflichtungen auferlegte. Diesmal zögerte Lie lange und nimmt erst im Frühjahr 1898 seine Entlassung in Leipzig. Als ein todkranker Mann kehrt er in seine Heimat zurück, deren Schönheit er in Leipzig so vermißt hatte. Am 18. 2. 1899 erliegt er einer perniciösen Anämie.

Die „*Gesammelten Abhandlungen*" von Lie (6 Bände und ein Nachlaßband) begannen 1922 zu erscheinen, der letzte (Nachlaßband) erschien 1960. Sie wurden vom norwegischen mathematischen Verein (unterstützt durch den norwegischen Forschungsfonds, die Kristianiaer Gesellschaft und die Akademie zu Leipzig) durch F. Engel und Poul Heegaard herausgegeben.[17])

II

Durch sein gedankenreiches mathematisches Werk hat Lie eine ganze Reihe neuer Forschungsgebiete und -methoden erschlossen und einen nachhaltigen Einfluß auf die Entwicklung der Mathematik in unserem Jahrhundert ausgeübt. Von einigen, relativ einfachen Grundbegriffen ausgehend, entwickelte Lie grundlegende Gedanken, denen sich alle seine Arbeiten unterordnen und an denen er unbeirrbar festhielt, während er an ihrem ständigen Ausbau arbeitete.

Im folgenden wird versucht, auch einem mit Lies Gedankenwelt nicht ver-

[17]) Über den Gang der Herausgabe berichtet F. Engel in der Einleitung zu GA, Bd. III. — Zu den ersten 6 Bänden existieren höchst wertvolle und umfangreiche Anmerkungen der Herausgeber.

trauten Leser einen gewissen Eindruck davon zu geben; freilich muß man sich dabei im klaren sein, daß die Betrachtung der Pfeiler nur eine unvollständige Kenntnis des von ihnen getragenen Baues liefern kann.

§ 1 BERÜHRUNGSTRANSFORMATIONEN

„Der Begriff der Transformation ist aus der Geometrie hervorgegangen. ... Auch mir ist die Bedeutung des Begriffs der Transformation zuerst in der Geometrie klar geworden. Indem ich Plückers Ideen über den Wechsel des Raumelementes weiter verfolgte, gelangte ich schon 1868 *zu dem allgemeinen Begriffe der Berührungstransformation.*"[1])

Unter einer Transformation φ versteht man eine eineindeutige Abbildung einer Menge $\mathfrak{M}$ auf sich selbst. Sind φ und ψ zwei solche Transformationen von $\mathfrak{M}$, so wird durch Hintereinanderausführung eine neue Transformation $\psi\varphi$ gewonnen. Diese Zusammensetzung genügt stets dem Assoziativgesetz. Eine Menge Σ von Transformationen der gleichen Menge $\mathfrak{M}$ bildet eine Gruppe, wenn mit φ, ψ auch stets $\varphi\psi^{-1}$ zu Σ gehört.

Es muß bemerkt werden, daß der Begriff Transformation aber auch im Sinne einer bloßen Abbildung einer Menge $\mathfrak{M}_1$ in bzw. auf eine zweite Menge $\mathfrak{M}_2$ gebraucht wird.[2]) Bei Lie kommen Transformationen i. a. in folgendem Sinne vor: Die Menge der Urbilder wird durch Angabe von n Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ charakterisiert, ebenso die Menge der Bildelemente durch $(x_1', \ldots, x_n')$ und es gilt

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

wo die f_i meist analytische Funktionen in einem gewissen Bereich sind.

Unter einem Flächenelement des $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Raumes R_{n+1} mit den rechtwinkligen Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n, z)$ versteht Lie eine Figur, die aus einem Punkt P und einer n-dimensionalen Hyperebene E durch P besteht. Sind die Richtungskosinus der Normalen von E proportional zu

$$p_1, \ldots, p_n, -1,$$

so wird jedes der ∞^{2n+1} Flächenelemente durch die $(2n+1)$ Zahlen $(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)$ charakterisiert. Ein Elementverein[3]) $\mathfrak{M}_r$ ist eine von r Parametern $u_1, \ldots, u_r$ abhängige Schar von Flächenelementen, für die identisch in den u_i und $\mathrm{d}u_i$ gilt:

$$\mathrm{d}z - p_1\,\mathrm{d}x^1 - \ldots - p_n\,\mathrm{d}x^n = 0. \tag{1}$$

Dies ist eine sinnvolle Verallgemeinerung des Flächenbegriffes, denn eine Fläche $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ bildet mit ihren Punkten und Tangentialebenen, $p_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, stets einen n-dimensionalen Elementverein (man kann hierbei $u^i = x^i$ wählen!)

[1]) TG, Bd. 3, S. XV.
[2]) besonders in der älteren Literatur.
[3]) Der Ausdruck „Verein" stammt von Engel, Lie spricht von einer Elementmannigfaltigkeit.

Zwei infinitesimal benachbarte Flächenelemente[4]) (x, z, p) und $(x + \mathrm{d}x, z + \mathrm{d}z, p + \mathrm{d}p)$ nennt Lie „*vereinigt*", wenn der Punkt des einen Elements in der Ebene des anderen liegt. Die Bedingung dafür ist (1). Ein Elementverein ist demnach eine Schar von Elementen, bei der jedes Element mit allen infinitesimal benachbarten Elementen der Schar vereinigt liegt. Ein Verein werde durch $\mathfrak{M}_r^k$, $0 \leqq k \leqq r$, bezeichnet, wenn die Punkte der beteiligten Flächenelemente eine k-dimensionale Fläche bilden. Es ist stets $r \leqq n$. Ein $\mathfrak{M}_n^0$ besteht aus allen Elementen durch einen Punkt, ein $\mathfrak{M}_n^1$ aus den Punkten einer Kurve mit sämtlichen Ebenen tangential an die Kurve, usw. Lie deutet die Elemente des R_{n+1} auch als Punkte eines R_{2n+1} mit den Koordinaten (x, z, p). Elementvereine sind dann Mannigfaltigkeiten des R_{2n+1}, die der Pfaffschen Gleichung (1) genügen.

Eine Transformation

$$x_i' = X_i(x, z, p), \quad z' = Z(x, z, p), \quad p_i' = P_i(x, z, p), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

heißt nach Lie eine Berührungstransformation, wenn sie die Gleichung (1) invariant läßt, d. h. wenn aus (1) stets

$$\mathrm{d}z' - p_1' \,\mathrm{d}x^{1'} - \ldots - p_n' \,\mathrm{d}x^{n'} = 0 \tag{3}$$

folgt. Dies kann nur eintreten, wenn vermöge (2) stets gilt:

$$\mathrm{d}z' - p_1' \,\mathrm{d}x^{1'} - \ldots - p_n' \,\mathrm{d}x'^n = \varrho\{\mathrm{d}z - p_1 \,\mathrm{d}x^1 - \ldots - p_n \,\mathrm{d}x^n\}, \tag{4}$$

mit einer Funktion $\varrho \neq 0$. Begrifflich kann man dies so deuten: (2) liefert eine Berührungstransformation, wenn jeder Elementverein wieder in einen Elementverein übergeht.

Unter diesen Begriff der Berührungstransformation fällt die Polarverwandtschaft bei Flächen zweiter Ordnung (Dualität), die natürlich schon vor Lie bekannt war (Poncelet, Gergonne), ferner die sog. Legendretransformation, die auch schon bei Euler vorkommt, aber rein analytisch gehandhabt wurde. Schließlich benutzte Jacobi — ebenfalls rein analytisch — allgemeine kanonische Transformationen, die mit den Berührungstransformationen ganz eng zusammenhängen. Lie kommt neben der Verknüpfung des Geometrischen mit dem Analytischen das Verdienst der systematischen Untersuchung der Berührungstransformationen zu.

Geht bei der Transformation (2) ein $\mathfrak{M}_n^0$ in einen Verein $\mathfrak{M}_n^{n+1-q}$ über, so lassen sich aus den Gleichungen (2) durch Elimination der p_i und p_i' gerade q unabhängige Gleichungen zwischen x_i, z und x_i', z' herleiten:

$$\Omega_1(x, z; x', z') = 0, \ldots, \Omega_q(x, z; x', z') = 0. \tag{5}$$

(Direktrixgleichungen). Für $q = n + 1$ ergeben sich die auf die Flächenelemente erweiterten Punkttransformationen. Umgekehrt kann man aus gegebenen Gleichungen (5) unter gewissen Randbedingungen auch eine Berührungstransformation gewinnen.

Im übrigen verzichten wir darauf, die Gleichungen explizit aufzuschreiben, denen die in (2) vorkommenden Funktionen X_i, Z, P_i und ϱ genügen müssen,

[4]) (x, z, p) steht für $(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)$.

damit sie eine Berührungstransformation bilden.[5]) Wir bemerken lediglich, daß die Menge aller Berührungstransformationen des R_{n+1} natürlich eine Gruppe bildet.

Lie studierte ausführlich die Berührungstransformationen; er wandte sie für geometrische Zwecke an, ganz besonders aber auch zur Umformung von Differentialgleichungsproblemen, in die er auf diese Weise geometrische Gesichtspunkte hineintrug.

§ 2 GERADEN-KUGEL-TRANSFORMATION

„Ich entdeckte eine merkwürdige Berührungstransformation, die gerade Linien in Kugeln umwandelte und transformierte hierdurch mit einem Schlage die Plückersche Liniengeometrie in eine neue Kugelgeometrie. Hierbei ergab sich unter anderem, daß die Gruppe aller projektivischen Transformationen des Raumes sich in die Gruppe aller derjenigen Berührungstransformationen, die Kugeln in Kugeln überführen, umwandeln läßt“.[6])

Diese berühmte Liesche Geraden-Kugel Transformation ist eine Berührungstransformation des R_3. Sind x, y, z rechtwinklige Koordinaten, so lassen sich ihre Direktrixgleichungen in die Gestalt setzen:[7])

$$\begin{aligned} &x' + iy' + xz' + z = 0, \\ &x(x' - iy') - z' + y = 0; \qquad i^2 = -1. \end{aligned} \tag{1}$$

Halten wir (x, y, z) fest, so liefert (1) in den laufenden Koordinaten x', y', z' eine (imaginäre) Gerade; diese hat die Eigenschaft, daß irgendzwei ihrer Punkte die Entfernung Null voneinander haben; solche Geraden nennt man Minimalgeraden. Man erkennt dies aus den durch Differentiation entstehenden Gleichungen

$$\mathrm{d}x' + i\,\mathrm{d}y' + x\,\mathrm{d}z' = 0, \qquad x(\mathrm{d}x' - i\,\mathrm{d}y') - \mathrm{d}z' = 0,$$

aus denen

$$x(\mathrm{d}x'^2 + \mathrm{d}y'^2 + \mathrm{d}z'^2) = 0$$

folgt. Die Bilder der Flächenelemente durch den festen Punkt (x, y, z) sind also die Flächenelemente durch eine Minimalgerade. Betrachtet man jetzt die Elemente, deren Trägerpunkte auf einer Geraden $\mathfrak{G}$ liegen, so müssen die Trägerpunkte der Bildelemente eine einparametrige Schar $\mathfrak{S}$ von Minimalgeraden durchlaufen. $\mathfrak{G}$ habe die Parameterdarstellung

$$x = rz + \varrho, \qquad y = sz + \sigma, \qquad -\infty < z < \infty \tag{2}$$

Eliminiert man x, y, z aus (1) und (2), so erhält man:

$$\left(x' - \frac{\varrho + s}{2r}\right)^2 + \left(y' - \frac{\varrho - s}{2r}\right)^2 + \left(z' - \frac{\eta - 1}{2r}\right)^2 = \left(\frac{\eta + 1}{2r}\right)^2, \tag{3}$$

[5]) Siehe etwa: GA, Bd. III, Nr. IX.

[6]) GA, Bd. IV, Nr. II, S. 99. Lie wurde auf diese Berührungstransformation durch seine Untersuchungen über den tetraedalen (Reye'schen) Komplex geführt; dieser besteht aus der Menge aller Geraden, welche die Seiten eines Tetraeders unter dem gleichen Doppelverhältnis schneiden.

[7]) Vgl. GB, Kap. 10.

mit:

$$\eta = s\varrho - r\sigma.$$

Aus dieser Rechnung erkennt man, daß die Schar $\mathfrak{S}$ auf einer Kugel $\mathfrak{R}$ liegt. Demnach kann man der Geraden $\mathfrak{G}$ die Kugel $\mathfrak{R}$ zuordnen. Auf $\mathfrak{R}$ verläuft noch eine zweite Schar $\mathfrak{S}'$ von Minimalgeraden, es gibt dann eine weitere Gerade $\mathfrak{G}'$, die vermittels $\mathfrak{S}'$ auf $\mathfrak{R}$ abgebildet wird. $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ sind übrigens bezüglich eines bestimmten linearen Geradenkomplexes konjugiert. Die Abbildung der Geraden auf die Kugeln ist also ein-zwei-deutig. Aus den Eigenschaften einer Berührungstransformation folgt, daß zwei sich schneidende Geraden auf zwei sich berührende Kugeln abgebildet werden.

Demnach kann man jeden Satz der Geradengeometrie umdeuten in einen Satz über Kugeln. So erhält man die Liesche Kugelgeometrie.

Heutzutage pflegt man die Liesche Kugelgeometrie unter Benutzung des von E. Laguerre (1834—1886) herrührenden Begriffs der „*orientierten Kugel*" darzustellen.[8]) Die Menge der orientierten Kugeln und Ebenen (einschließlich der nichtorientierten Punkte und eines uneigentlichen Punktes) lassen sich mittels hexasphärischer homogener Koordinaten auf eine nichtausgeartete Fläche zweiter Ordnung des 5-dimensionalen projektiven Raumes P_5 abbilden. Das gleiche gilt von der Menge der Geraden des P_3, falls man die homogenen Geradenkoordinaten benutzt. Beide Flächen des P_5 gehen durch eine (nichtreelle) Projektivität ineinander über, die sich im Dreidimensionalen als die Liesche Transformation umdeutet.

Lie hatte sogleich die schöne differentialgeometrische Eigenschaft seiner Geraden-Kugel-Transformation erkannt, die Asymptotenlinien einer Fläche auf die Krümmungslinien der Bildfläche abzubilden. Sein Gedankengang kann etwa wie folgt wiedergegeben werden: Beim Fortschreiten in einer Asymptotenrichtung dreht sich die Tangentialebene der Fläche um eben diese Richtung, während sie sich beim Fortschreiten in einer Hauptkrümmungsrichtung um die orthogonale Richtung dreht. Zwei infinitesimal benachbarte Elemente einer Asymptotenlinie gehören also zum Elementverein einer Geraden, während sie bei einer Krümmungslinie dem Verein einer Kugel angehören. Da nun beide Kurvenklassen durch diese Eigenschaften auch charakterisiert werden, so müssen sie bei der Geraden-Kugel-Transformation ineinander übergeführt werden. Unter Ausnutzung dieses Zusammenhangs konnte Lie z. B. aus den bekannten Krümmungslinien der damals viel untersuchten Kummerschen Fläche (4. Ord. u. 4. Klasse) die Asymptotenlinien bestimmen.

§ 3 INFINITESIMALE TRANSFORMATIONEN

Der Begriff „*infinitesimale Transformation*" stammt zwar nicht von Lie selbst, ist aber dennoch ein wichtiger Baustein in seinem Werk; erstaunlich, was er alles damit erreichte.

Ein simultanes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dx^1}{dt} = \xi^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, \frac{dx^n}{dt} = \xi^n(x^1, \ldots, x^n) \tag{1}$$

[8]) Siehe: F. Klein, Vorlesungen über höhere Geometrie, 3. Auflage, Berlin 1929; W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Band 3, Berlin 1929.

deutet Lie als eine infinitesimale Transformation, bei der ein Punkt $(x^1, \ldots, x^n)$ auf den Punkt $(x^1 + \delta x^1, \ldots, x^n + \delta x^n)$ abgebildet wird, wobei

$$\delta x^i = \xi^i(x^1, \ldots, x^n)\, \delta t \tag{2}$$

mit einem Differential δt ist. Verschwinden die ξ^i für einen Punkt nicht alle, so geht durch diesen Punkt eine bestimmte Integralkurve von (1) — eine Bahnkurve. Der betreffende Punkt wird bei der infinitesimalen Transformation auf dieser Bahnkurve infinitesimal verschoben.

Die allgemeine Lösung von (1) hat die Gestalt:

$$x^i = f^i(t; \mathring{x}^1, \ldots, \mathring{x}^n) \qquad \text{mit} \qquad f^i(0; \mathring{x}^1, \ldots, \mathring{x}^n) = \mathring{x}^i;$$

die Funktionen f^i bestimmen eine von t abhängige Schar S_t von (endlichen) Transformationen:

$$x'^i = f^i(t; x^1, \ldots, x^n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Die Punkte, die man aus einem festen Punkt durch Anwendung aller S_t erhält, bilden gerade eine Bahnkurve von (1). Im übrigen besitzt die Schar S_t die Gruppeneigenschaft, denn es ist

$$S_{t_1+t_2} = S_{t_1}(S_{t_2}).$$

Dies folgt aus dem Eindeutigkeitssatz für das System (1). S_t ist eine „*eingliedrige Gruppe von Transformationen*", die von der infinitesimalen Transformation (2) „*erzeugt*" wird.

Ist $f(x^1, \ldots, x^n)$ eine gegebene Funktion, so sei δf der Zuwachs der Funktion f bei der infinitesimalen Transformation (2), definiert durch[9])

$$\delta f = f(x^1 + \delta x^1, \ldots, x^n + \delta x^n) - f(x^1, \ldots, x^n) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \xi^i \delta t.$$

Lie setzt nun $X(f) = \sum \xi^i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ und bezeichnet $X(f)$ als das Symbol der inf. Transformation, demnach $\delta f = X(f)\, \delta t$. Ist $X(f) = 0$, so bleibt f bei der inf. Transformation ungeändert (und nur dann), aber dann auch bei allen endlichen Transformationen der eingliedrigen Gruppe; f hat längs einer jeden Bahnkurve einen festen Wert. Sind $n - 1$ unabhängige Lösungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ von $X(f) = 0$ bekannt, so stellen die Gleichungen

$$\varphi_1 = c_1 = \text{const}, \ldots, \qquad \varphi_{n-1} = c_{n-1} = \text{const}.$$

die sämtlichen Bahnkurven dar.

Sind $X(f)$, $Y(f)$ Symbole zweier inf. Transformationen, so ist

$$X(Y(f)) - Y(X(f)) = (X, Y)(f) \tag{4}$$

wieder Symbol einer inf. Transformation, da sich in (4) die zweiten Ableitungen von f wegheben. (4) ist das Jacobische Klammersymbol. Sei

$$\delta x^i = \xi^i(x)\, \delta t$$

[9]) Es werden stets nur die in δt linearen Glieder betrachtet! Im übrigen wird im folgenden „*infinitesimal*" durch „*inf.*" abgekürzt.

die zu $X(f)$ gehörige inf. Transformation, so kann man rechts und links auf x^i die zu $Y(f)$ gehörige inf. Transformation

$$\delta' x^i = \eta^i(x)\, \delta' \tau$$

anwenden und erhält eine neue inf. Transformation mit dem Symbol

$$X(f) + \delta'\tau \,.\, (Y, X)\,(f).$$

In dieser Lieschen Auffassung ist (Y, X) der Zuwachs der Transformation X bei der Transformation Y. Ist $(Y, X) = 0$, so bleibt X bei Anwendung von Y ungeändert; dann und nur dann sind die endlichen Transformationen der beiden eingliedrigen Gruppen miteinander vertauschbar.

In der neueren Auffassung betrachtet man die Vektorfelder ξ^i und η^i. Das zu (Y, X) gehörige Vektorfeld

$$\sum_{j} \left(\eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} - \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \right)$$

wird als Liesche Ableitung $\mathfrak{L}_\eta(\xi^i)$ von ξ^i bezüglich η^i bezeichnet. Eine solche Liesche Ableitung läßt sich auch für Tensorfelder und allgemeinere geometrische Objekte wie Übertragungsparameter oder dgl. definieren. Immer ist das Verschwinden der Lieschen Ableitung notwendig und hinreichend dafür, daß das betreffende Objekt bei den endlichen Transformationen der eingliedrigen Gruppe ungeändert bleibt.[10])

In Lies Arbeiten kommen immer wieder vollständige Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung vor, sei es als Hilfsmittel, sei es als Gegenstand der Untersuchung selbst. Sind $X_1(f), \ldots, X_r(f)$ die Symbole von r inf. Transformationen, so werden die Gleichungen

$$X_1(f) = 0, \ldots, X_r(f) = 0 \tag{5}$$

betrachtet. Jede Lösung f von (5) erfüllt auch die Gleichungen

$$(X_i, X_k)\,(f) = 0, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, r. \tag{6}$$

Das System (5) heißt (nach Clebsch) vollständig, wenn die linken Seiten von (6) Linearkombinationen von $X_1(f), \ldots, X_r(f)$ sind. (Dies sind die Integrabilitätsbedingungen).

Durch einfache Umformungen kann man dann $(X_i, X_k) = 0$ erreichen (Jacobische Systeme). Ein vollständiges System (5) in n Variablen besitzt $(n - r)$ unabhängige Lösungen. Nach Lie zerlegen diese $n - r$ Lösungen den n-dimensionalen Raum in ∞^{n-r} r-dimensionale Mannigfaltigkeiten, von denen jede durch ∞^{r-1} Bahnkurven einer inf. Transformation der Gestalt

$$\psi_1 X_1(f) + \ldots + \psi_r X_r(f), \qquad \psi_i = \psi_i(x_1, \ldots, x_n)$$

erzeugt wird.[11])

Durch das sog. Mayersche Theorem, das von Lie immer sehr hoch geschätzt wurde und dessen Inhalt er mit einer gewissen Einschränkung auch selbst

---

[10]) Siehe: J. A. Schouten, Ricci-Calculus, 2 nd. edition, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1954, p. 102 ff.; K. Yano, The Theory of Lie derivative and its applications Amsterdam-Groningen, 1955.

[11]) TG Bd. 1, Kap. 6.

gefunden hatte, wird die Auffindung einer Lösung von (5) zurückgeführt auf die Auffindung einer Lösung einer einzigen bestimmten linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit $n - r + 1$ unabhängigen Variablen.

Eine inf. Transformation

$$X(f) = \sum_i \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \sum_i \pi^i \frac{\partial f}{\partial p_i} \tag{7}$$

im $(2n + 1)$-dimensionalen Raum der $(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)$ kann als eine inf. Transformation der Flächenelemente des R_{n+1} gedeutet werden. Wann ist dies eine inf. Berührungstransformation? Lie findet:[12]) Zu jeder inf. Berührungstransformation gibt es genau eine Funktion $F(x, z, p)$, so daß:

$$\xi^i = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \zeta = \sum_i p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} - F, \quad \pi^i = -\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z}\right). \tag{8}$$

Umgekehrt gewinnt man aus jeder Funktion F auf diese Weise eine inf. Berührungstransformation. Sind Φ, Ψ zwei Funktionen von (x, z, p), so führt man den Poissonschen Klammerausdruck $[\Phi, \Psi]$ ein durch:

$$[\Phi, \Psi] = \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) - \sum_i \frac{\partial \Psi}{\partial p_i}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right).$$

Damit läßt sich das Symbol einer inf. Berührungstransformation schreiben:

$$X(f) = [F, f] - F \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Mit Hilfe der inf. Berührungstransformation und der zugehörigen eingliedrigen Gruppe gibt Lie eine schöne Deutung der Cauchyschen Charakteristikentheorie der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung $F(x, z, p) = 0$. Lie erweitert das Integrationsproblem zu der Frage nach allen n-dimensionalen Elementvereinen, die der Gleichung $F = 0$ genügen, während die übliche Auffassung nur die Vereine der Gestalt: $z = z(x_1, \ldots, x_n)$, $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$ betrachtet. Die inf. Berührungstransformation (7), (8) führt nun jedes Flächenelement (x, z, p) mit $F(x, z, p) = 0$ in ein benachbartes, mit ihm vereinigtes Flächenelement über, das ebenfalls der Gleichung $F = 0$ genügt. Denn erstens ist $dz - \Sigma p_i dx^i = (\zeta - \Sigma p_i \xi^i)\, \delta t = 0$ für $F = 0$, und zweitens ist der Zuwachs von F durch

$$\delta F = \left\{[F, F] - F \frac{\partial F}{\partial z}\right\} \delta t = -F \frac{\partial F}{\partial z}\, \delta t$$

gegeben und demnach $\delta F = 0$ für $F = 0$. Längs einer Bahnkurve, die durch ein Element mit $F = 0$ geht, ist also ständig $F = 0$; im übrigen bildet diese Bahnkurve einen eindimensionalen Elementverein des R_{n+1}, ,,*Charakteristischer Streifen*" genannt. Um also n-dimensionale Vereine mit $F = 0$ zu erhalten, hat man auf $(n - 1)$-dimensionale Vereine mit $F = 0$ die endlichen Berührungstransformationen der zu F gehörigen eingliedrigen Gruppe auszuüben. Die Bestimmung der $(n - 1)$-dimensionalen Vereine mit $F = 0$ ist aber kein

[12]) TG Bd. 2, Kap. 14.

Integrationsproblem. Im übrigen sind die „*singulären Elemente*“ auszuschließen, für diese ist $\xi^i = \zeta = \pi^i = 0$, so daß es keine Bahnkurve gibt, die durch ein solches singuläres Element geht.[13])

Mit den vorstehenden Bemerkungen sind wir schon bei Lies Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen angelangt.

§ 4 DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

„*Unter allen Disziplinen der Mathematik ist die Theorie der Differentialgleichungen die wichtigste. Alle Zweige der Physik stellen uns Probleme, die auf die Integration von Differentialgleichungen hinauskommen. Es gibt ja überhaupt die Theorie der Differentialgleichungen den Weg zur Erklärung aller elementaren Naturphänomene, die Zeit brauchen. Hat somit die Theorie der Differentialgleichungen eine unendliche praktische Bedeutung, so hat sie auf der anderen Seite dadurch eine entsprechende theoretische Wichtigkeit, daß sie in rationeller Weise zum Studium neuer wichtiger Funktionen, beziehungsweise Funktionenklassen leitet.*“[14])

Man entnimmt hieraus, welche große Bedeutung Lie der Theorie der Differentialgleichungen beimaß. In seinen Arbeiten gibt er immer wieder darauf bezügliche Fragestellungen und Methoden zu deren Lösung an; bei vielen schon bekannten Verfahren deckt er die inneren Gründe für den Erfolg des Verfahrens auf und stellt vielfach Verstreutes unter einheitliche Gesichtspunkte. Aus der Fülle des Materials kann nur wenig herausgegriffen werden.

Im Jahre 1872 fand Lie seine Integrationsmethode für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Ein simultanes System von m Differentialgleichungen erster Ordnung für eine gesuchte Funktion z von n Unabhängigen $x_1, \ldots, x_n$ der Gestalt[15])

$$F_1(x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n) = 0, \ldots, F_m(x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n) = 0, \quad p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \tag{1}$$

läßt sich stets auf den Fall eines „*Involutionssystems*“ zurückführen, bei dem die F paarweise in Involution liegen, d. h. die Gleichungen[16])

$$(F_i, F_j) = \sum_l \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_l} \frac{\partial F_j}{\partial x_l} - \frac{\partial F_j}{\partial p_l} \frac{\partial F_i}{\partial x_l} \right) = 0 \tag{2}$$

erfüllen. Auf ein solches Involutionssystem konnte Lie die Cauchysche Charakteristikentheorie für eine Gleichung erweitern, wobei an Stelle der früher betrachteten eindimensionalen charakteristischen Streifen jetzt m-dimensionale charakteristische Vereine treten. Ferner entdeckte Lie, daß sich die Integration eines m-gliedrigen Involutionssystems (1) auf die Integration einer einzigen partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung in $n - m + 1$ unabhängigen

[13]) Über eingliedrige Gruppen von Berührungstransformationen in der Variationsrechnung vgl. E. Hölder, Jber. Dt. Math. Ver. **49**, 162—178, (1939).

[14]) GA, Bd. VI, Nr. XX, s. 540.

[15]) Wir betrachten nur den Fall, daß z explizit in den Gleichungen nicht auftritt.

[16]) Die hier benutzte runde Klammer stimmt mit der in § 3 benutzten eckigen Klammer überein, falls z in den betrachteten Funktionen nicht vorkommt.

Variablen zurückführen läßt. Falls das System (1) linear ist, ist dies gerade das Mayersche Theorem.

Die Liesche Integrationsmethode für eine Gleichung $F(x, p) = 0$ verläuft nun so: Man sucht zunächst eine Lösung $f = f_1(x, p)$ der linearen partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$(F, f) = 0. \tag{3}$$

f_1 ist dann längs jedes charakteristischen Streifens konstant. Nun ist $F = 0$, $f_1 = a =$ const. ein 2-gliedriges Involutionssystem, das sich auf eine partielle Differentialgleichung $F_1 = 0$ in $n - 1$ Variablen zurückführen läßt. Diese behandelt man analog, bis man nach $n - 1$ Schritten zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung kommt. Bei jedem Schritt erhält man eine lineare partielle Differentialgleichung, von der man eine Lösung kennt und eine weitere bestimmen muß. ($f = F$ ist ja Lösung von (3)). Bei der sog. Jacobischen Methode, die von Mayer wesentlich verbessert wurde, sind gleichartige Integrationsoperationen nötig. Das Liesche Verfahren erlaubt aber, zufällig eintretende Umstände besser zu nutzen.

a) Hat man mehrere, paarweise in Involution liegende Lösungen von (3) gefunden, so kann man auch entsprechend viele Integrationsschritte gleichzeitig ausführen.

b) Hat man mehrere, nicht in Involution liegende Lösungen von (3) gefunden, so kann man mittels des Poissonschen Theorems neue Lösungen von (3) finden. Das genannte Theorem besagt: Mit f_1, f_2 ist auch (f_1, f_2) eine Lösung von (3). Man kommt so zu r Funktionen $f_1, \ldots, f_r$ bei denen die Klammerbildung nichts Neues liefert, d. h. es ist

$$(f_i, f_j) = w_{ij}(f_1, \ldots, f_r).$$

Alle Funktionen der Gestalt $w(f_1, \ldots, f_r)$ bilden eine Funktionengruppe. Die Theorie solcher Funktionenmengen ist ebenfalls eine bedeutende Leistung Lies.[17]) Hier möge die Bemerkung genügen, daß man durch Lösen von vollständigen Systemen eine maximale, involutorische Untergruppe finden kann; diese werde etwa von $f_1, \ldots, f_p$ erzeugt. Irgend 2 Funktionen der Gestalt $w(f_1, \ldots, f_p)$ liegen dann in Involution. Mit diesen Funktionen $f_1, \ldots, f_p$ kann man dann nach a) verfahren. Die geschilderte Methode b) ist die sogenannte letzte Integrationsmethode von Lie.[18])

Lie fand seine Integrationsmethoden auf begrifflich-geometrischem Weg, und formulierte sie zuerst auch so, wodurch er seinen Zeitgenossen unverständlich blieb, die bei der Behandlung von Differentialgleichungen aufs Rechnerisch — Analytische eingestellt waren. Integrationsprobleme wurden von Lie immer als Transformationsproblem aufgefaßt. Er ging von der Frage aus, ob man eine gegebene Differentialgleichung oder ein System von Differentialgleichungen durch eine geeignete Punkt- oder Berührungs-

---

[17]) TG, Bd. 2, Kap. 6—13.

[18]) Vgl.: Engel, Faber, Die Liesche Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung, Leipzig u. Berlin, 1932; C. Carathéodory, Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen 1. Ord., Leipzig 1935. — Es sei noch auf den heute vielfach verwandten Kalkül der alternierenden Differentialformen hingewiesen, in den auch Liesche Gedanken mit eingeflossen sind, der aber auch in den Arbeiten anderer Mathematiker wurzelt.

transformation auf eine besonders einfache (kanonische) Form bringen kann und wie man diese Transformationen gegebenenfalls findet. So läßt sich z. B. jede partielle Differentialgleichung 1. Ordnung durch Berührungstransformationen auf die Form $p_1 = 0$ und jedes m-gliedrige Involutionssystem auf die Form $p_1 = 0, \ldots, p_m = 0$ bringen. Bei dieser transformationstheoretischen Auffassung stellt sich die Frage ein, ob es Transformationen gibt, welche die vorgelegten Differentialgleichungen in sich überführen; solche Transformationen müssen dann notwendig eine Gruppe bilden. Nur wenn man die zu zwei Differentialgleichungen (oder Systemen) gehörigen Gruppen ineinander überführen kann, darf man hoffen, die Differentialgleichungen selbst ineinander transformieren zu können. Unter diesen von Lie selbst ausgesprochenen Gesichtspunkten[19]) hat man seine zahlreichen Arbeiten zu betrachten, die sich mit Differentialgleichungen befassen, welche eine Gruppe von Transformationen gestatten. Auch die Analogie der dabei entstehenden Theorie mit der Galoisschen Theorie der algebraischen Gleichungen ist von Lie hervorgehoben worden, worauf wir in § 7 noch kurz zurückkommen werden. Doch wenden wir uns zunächst derjenigen Lieschen Schöpfung zu, die in der Folge die meiste Beachtung gefunden hat, seiner Gruppentheorie.

§ 5 TRANSFORMATIONSGRUPPEN

„*Andererseits entwickelte ich in den Jahren* 1870—74 *den Begriff der endlichen kontinuierlichen Gruppe und erkannte seine weitreichende Bedeutung für die Geometrie und für die Theorie der Differentialgleichungen... So traten für mich die Begriffe Transformation und Transformationsgruppe immer mehr in den Vordergrund und ich entwickelte nach und nach eine allgemeine Transformationstheorie*“.[20])

Obwohl sich Lie im Fortgang seiner Untersuchungen auch mit sogenannten unendlichen kontinuierlichen Gruppen beschäftigte, beschränken wir uns im folgenden auf die eben genannten endlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen (Liesche Gruppen). Sie sind zu unterscheiden von den Transformationsgruppen[21]) endlicher Mengen (Permutationsgruppen), die in der Galoisschen Theorie vorkommen und deren Theorie zu Lies Zeiten schon recht weit entwickelt war, — C. Jordans „*Traité des substitutions*“ war 1870 erschienen —.

Lies Arbeiten wurden in seinem schon zitierten großen Werk „*Theorie der Transformationsgruppen*“ zusammenfassend dargestellt. Es sei

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

eine Schar von Transformationen des n-dimensionalen Zahlenraumes; jedes Element der Schar wird durch Angabe von $(a_1, \ldots, a_r)$ festgelegt und transformiert den Punkt $(x_1, \ldots, x_n)$ in den Punkt $(x_1', \ldots, x_n')$. Für $a_i = 0$, $i = 1, \ldots, r$ möge (1) die identische Transformation liefern, im übrigen seien die Transformationen (1) auch für alle genügend kleinen a_i erklärt. Besitzt die Schar nun noch die Gruppeneigenschaft, so sagt man, die Transformationen

[19]) TG, Bd. 3, S. XX—XXI; siehe auch den bei F. Engel, Leipziger Ber. 51, S. XLII, (1899) auszugsweise abgedruckten Brief an A. Mayer.

[20]) TG, Bd. 3, S. XVI.

[21]) Jede Gruppe kann als Transformationsgruppe aufgefaßt werden.

(1) bilden eine endliche (r-gliedrige) kontinuierliche Transformationsgruppe. Die von inf. Transformationen erzeugten eingliedrigen Gruppen besprachen wir schon. Eine r-gliedrige Gruppe wird nun in bestimmter Weise von inf. Transformationen erzeugt. Dies ergibt sich aus den von Lie aufgestellten drei Fundamentalsätzen der Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen.[22]

I. Bilden die Transformationen (1) eine Gruppe, so genügen die x' als Funktionen der a den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a_1, \ldots, a_r)\, \xi_{ji}(x'_1, \ldots, x'_n) \qquad \begin{matrix} i = 1, \ldots, n, \\ k = 1, \ldots, r, \end{matrix} \tag{2}$$

mit gewissen Funktionen ψ_{jk} und ξ_{ji}, wobei $\psi_{jk}(0, \ldots, 0) = \delta_{jk}$. Die inf. Transformationen

$$X_k(f) = \sum_i \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad k = 1, \ldots, r \tag{3}$$

sind (bei konstanten Koeffizienten) linear unabhängig. Besitzt umgekehrt ein System der Form (2) Lösungen $f^i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_r)$ mit den Anfangsbedingungen $f^i(x_1, \ldots, x_n;\ 0, \ldots, 0) = x^i$ bei beliebigen x^i, so bilden diese eine r-gliedrige Transformationsgruppe. Jedes Element dieser Gruppe gehört genau einer derjenigen eingliedrigen Gruppen an, deren zugehörige inf. Transformationen die Gestalt

$$e^1 X_1(f) + \ldots + e^r X_r(f) \tag{4}$$

mit konstanten e^i haben.

Man erhält also die $X_k(f)$, indem man $\dfrac{\partial f^i}{\partial a^k}(x_1, \ldots, x_n;\ 0, \ldots, 0)$ bildet. (4) liefert die inf. Transformationen der Gruppe.

II. r linear unabhängige Transformationen $X_1(f), \ldots, X_r(f)$ erzeugen dann und nur dann auf die in I. beschriebene Weise eine r-gliedrige Gruppe, wenn gilt:

$$(X_i, X_j)(f) = \sum_{k=1}^{r} c_{ijk} X_k(f), \tag{5}$$

wo die c_{ijk} Konstante sind.

M. a. W.: Die Jacobische Klammer zweier Elemente (4) muß wieder ein solches Element sein.

III. Sind $X_1(f), \ldots, X_r(f)$ linear unabhängige inf. Transformationen einer Gruppe, so gilt für die in II. vorkommenden Konstanten

$$c_{ijk} + c_{jik} = 0 \tag{6}$$

$$\sum_l \{c_{ijl} c_{lhk} + c_{jhl} c_{lik} + c_{hil} c_{ljk}\} = 0 \tag{7}$$

Sind umgekehrt r^3 Konstanten c_{ijk} bekannt, die (6) und (7) erfüllen, so lassen sich in einem Raum von genügend vielen Dimensionen r linear unabhängige Transformationen $X_1, \ldots, X_r$ finden, die (5) erfüllen und demnach eine r-gliedrige Gruppe erzeugen.

---

[22]) Vgl. die Zusammenfassung in TG, Bd. 3, Kap. 25.

Beispiele für diesen Gruppenbegriff bieten sich in Hülle und Fülle an. Wir erwähnen etwa die Gruppe der Translationen des 3-dimensionalen euklidischen Raumes mit den inf. Transformationen

$$\boxed{p_1, p_2, p_3}$$

(Hierbei steht p_i für $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. — Die Umrahmung pflegte Lie stets vorzunehmen: „*wir machen für die Gruppe ein Haus.*“[23])). Die Gruppe der euklidischen Bewegungen hat 6 Parameter und die inf. Transformationen

$$\boxed{p_1, p_2, p_3, x_2p_3 - x_3p_2, x_3p_1 - x_1p_3, x_1p_2 - x_2p_1}$$

Die Gruppe aller zentralaffinen Abbildungen des R_n hat n^2 Parameter und die inf. Transformationen:

$$\boxed{x_ip_j \qquad i, j = 1, \ldots, n.}$$

Sind für 2 Gruppen die Zahlen r gleich und kann man die Parameter a_i so transformieren, daß die c_{ijk}, die „*Strukturkonstanten*“, gleich werden, so heißen die Gruppen gleichzusammengesetzt (isomorph). Kann man 2 Gruppen durch Transformation der x_i und durch gleichzeitige gleiche Transformation der x_i' ineinander überführen, so heißen sie ähnlich. Ähnliche Gruppen sind gleichzusammengesetzt, aber nicht umgekehrt.

Von diesen Resultaten ausgehend konnte Lie viele Begriffe aus der Theorie der Substitutionsgruppen (endliche Permutationsgruppen) auf endliche kontinuierliche Gruppen ausdehnen. So die Begriffe: Untergruppe, invariante Untergruppe (Normalteiler), Transitivität, Intransitivität, Primitivität und Imprimitivität. In den zugehörigen Sätzen wurde gezeigt, wie man die entsprechenden Eigenschaften der Gruppe an ihren inf. Transformationen bzw. an den Strukturkonstanten ablesen kann. Aber auch neue Begriffe kamen hinzu. So die Begriffe der adjungierten und der Parametergruppe.

Lie hat sich vielfach damit beschäftigt, alle Transformationsgruppen mit bestimmten Eigenschaften anzugeben und hat auch seinen Schülern immer wieder solche Aufgaben gestellt.[24]) Das letzte, in der Ferne liegende Ziel war dabei natürlich, einen möglichst umfassenden Überblick über alle Transformationsgruppen zu bekommen. Sehr einfach ist es, alle Transformationsgruppen eines eindimensionalen Raumes zu bestimmen. Diese sind mit den Untergruppen der projektiven Gruppe

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d}, \qquad ad - bc \neq 0$$

ähnlich. Auch alle Gruppen eines zweidimensionalen Raumes hat Lie schon 1874 bestimmt, später auch des 3-dimensionalen Raumes, sowie die sämtlichen

[23]) G. Kowalewski, Bestand und Wandel, München 1950, S. 74.

[24]) Vgl. die Besprechung „gruppentheoretischer Arbeiten Anderer“ in TG, Bd. 3, Kap. 29.

Untergruppen der projektiven Gruppe dieses Raumes.[25]) Diese Untersuchungen sind mit oft recht umfangreichen Rechnungen verbunden.

Mit seiner Theorie der endlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen hatte Lie ein Gebiet eröffnet, das ihm immer wieder neue und tiefliegende Fragestellungen schenkte, die er unermüdlich bearbeitete und die er durch zahlreiche Anwendungen auf Geometrie und Analysis den Mathematikern seiner Zeit nahezubringen versuchte.

§ 6 INVARIANTENTHEORIE

Die Invariantentheorie liefert das Bindeglied zwischen der Gruppentheorie und ihrer Anwendung in der Geometrie. Dies wurde besonders in dem bekannten Erlanger Programm von F. Klein aus dem Jahre 1872 betont, wonach zu jeder Art von Geometrie eine für diese Geometrie charakteristische Transformationsgruppe gehört, als deren Invariantentheorie sie aufgefaßt werden kann.[26]) Wir gehen kurz auf Lies Invariantentheorie der endlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen ein.

Es sei

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

eine r-gliedrige Transformationsgruppe in n Veränderlichen. Eine Funktion $\Omega(x_1, \ldots, x_n)$ heißt eine (absolute) Invariante von (1), wenn die Gleichung

$$\Omega(x_1', \ldots, x_n') = \Omega(x_1, \ldots, x_n) \tag{2}$$

stets richtig ist, falls man links die x_i' mittels (1) durch die x_i ersetzt. Denken wir uns eine eingliedrige Untergruppe $\mathfrak{g}$ von (1), so muß Ω längs jeder Bahnkurve von $\mathfrak{g}$ konstant sein, also $X(\Omega) = 0$ falls $X(f)$ die zu $\mathfrak{g}$ gehörige inf. Transformation ist. Wird demnach (1) von $X_1(f), \ldots, X_r(f)$ erzeugt, so muß sein:

$$X_1(\Omega) = 0, \ldots, X_r(\Omega) = 0. \tag{3}$$

Diese Gleichungen sind aber auch hinreichend dafür, daß Ω eine Invariante von (1) ist. Die Bestimmung aller Invarianten läuft somit auf die Lösung der Differentialgleichungen (3) hinaus, die wegen § 5, II ein vollständiges System bilden. Möglicherweise gibt es nur die triviale Lösung $\Omega = \text{const.}$ Falls man die endlichen Gleichungen (1) der Gruppe kennt, kann man auch durch Elimination der a_i aus (1) zu den Invarianten gelangen, doch muß dieser Weg nicht unbedingt vorteilhafter sein.

Die Gruppe (1) läßt sich nun auf vielfache Weise „*erweitern*". Man kann z. B. noch ein weiteres n-Tupel $\bar{x}_i$ betrachten, das durch (1) in $\bar{x}_i'$ transformiert werden möge. Dann lassen sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_i' &= f_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_r) \\ \bar{x}_i' &= f_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n;\ a_1, \ldots, a_r) \end{aligned} \qquad i = 1, \ldots, n \tag{4}$$

[25]) Vgl. TG, Bd. 3, S. V, VI.

[26]) F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, abgedruckt in Math. Ann. 43' (1893) — Lie betont die Unabhängigkeit seiner Invariantentheorien gegenüber Klein, z. B. in TG, Bd., 3 XVII.

als eine r-gliedrige Transformationsgruppe in den $2n$ Variablen $x_1, \ldots, x_n$, $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ auffassen, die mit (1) gleichzusammengesetzt ist. Eine Invariante dieser Gruppe beschreibt eine Eigenschaft der von 2 Punkten gebildeten Figur, die bei allen Transformationen (1) ungeändert bleibt, (z. B. die Entfernung zweier Punkte bei der Gruppe der Bewegungen des euklidischen Raumes). Natürlich kann man auch noch weitere Punkte hinzunehmen, oder auch andere geometrische Gebilde, die sich durch Koordinaten festlegen lassen. Hat man nur genügend viele, so ist in dem entstehenden vollständigen System für die Invarianten die Anzahl N der Variablen größer als die Anzahl ϱ der unabhängigen Gleichungen, so daß die Existenz nichttrivialer Invarianten gesichert ist. (Z. B. das Doppelverhältnis von 4 Punkten einer Geraden.)

Auch die Differentialgeometrie ordnet sich dem invariantentheoretischen Gesichtspunkt unter. Wir fassen in (1) q der Variablen, etwa $x_1, \ldots, x_q$ als unabhängige, die restlichen als abhängige Veränderliche auf und setzen:

$$x_{q+1} = y_1, \ldots, \quad x_n = y_{n-q}.$$

Dann kann man (1) erweitern, in dem man noch die Transformationsformeln für die Ableitungen (bis zur μ-ten Ordnung) der y nach den x hinzufügt. Man erhält wieder eine Gruppe in N Variablen, die mit (1) gleichzusammengesetzt ist. Ihre Invarianten sind die Differentialinvarianten μ-ter Ordnung von (1). Jede endliche kontinuierliche Gruppe besitzt unendliche viele Differentialinvarianten, die durch Integration von vollständigen Systemen gefunden werden können. Die Anwendung auf die Differentialgeometrie ergibt sich daraus, daß im Raum der x, y jede q-dimensionale Fläche durch Vorgabe der y als Funktionen der x beschrieben wird. Krümmung und Windung einer Raumkurve, Gaußsche und mittlere Krümmung einer Fläche sind die einfachsten Beispiele solcher Differentialinvarianten. Je nachdem welche Gruppe man zugrundelegt, bekommt man in Übereinstimmung mit dem Erlanger Programm die Differentialgeometrie der verschiedenen Geometrien: z. B. affine oder projektive Differentialgeometrie. Man ersieht hieraus die Bedeutung der Lieschen Invariantentheorie.[27])

Doch auch für die Theorie der Differentialgleichungen hat Lie seine invariantentheoretischen Untersuchungen fruchtbar gemacht. Setzt man eine Differentialinvariante von (1) gleich Null, so erhält man eine Differentialgleichung, welche die Gruppe (1) gestattet. Davon war schon in § 4 die Rede. In dem einfachen Fall einer Differentialinvariante erster Ordnung für eine eingliedrige Gruppe in 2 Variablen x und y erhält man eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung $F(x, y, y') = 0$. Aus der bloßen Kenntnis der Gruppe kann man ohne Integration die Differentialgleichung auf eine Form bringen, in der sie durch Quadraturen lösbar ist. Ja, es genügt schon die Kenntnis der zugehörigen inf. Transformation, um einen (Eulerschen) Multiplikator zu gewinnen. So erklären sich die meisten der sogenannten elementaren Integrationsmethoden.

Es sei schließlich noch bemerkt, daß Lie die Theorie der in § 4 erwähnten Funktionengruppen als Invariantentheorie der Berührungstransformationen auffaßte.

---

[27]) Neben ihr behauptet die algebraische Invariantentheorie ein selbständiges Interesse.

§ 7 VOLLSTÄNDIGE SYSTEME MIT BEKANNTEN TRANSFORMATIONEN

Aus dem großen Reichtum der von Lie aufgedeckten und untersuchten Beziehungen zwischen Gruppentheorie, Invariantentheorie und Differentialgleichungen sei noch auf die Frage eingegangen, welchen Nutzen man für die Integration eines vollständigen Systems von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$X_1(f) = 0, \, .., X_r(f) = 0 \tag{1}$$

ziehen kann, wenn man gewisse endliche oder inf. Transformationen kennt, welche das System (1) in sich überführen. Eine inf. Transformation $B(f)$ führt dabei (1) in sich über, falls $(X_i, B)(f) = 0$ eine Folge der Gleichungen (1) ist; man sagt: Das System (1) gestattet die inf. Transformation $B(f)$. Kennt man mehrere inf. Transformationen $B_1(f), \ldots, B_l(f)$, die von (1) gestattet werden, so kann Lie durch verschiedene vorbereitende Operationen immer den Fall herstellen, daß die $B_i(f)$ eine Gruppe im Sinne von § 5, II erzeugen. Wir begnügen uns mit dem folgenden „*Normalproblem*".

Es sei die Differentialgleichung

$$A(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x, x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$$

gegeben. Sie gestatte die n inf. Transformationen

$$B_i(f) = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik}(x, x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

Dabei mögen die $B_i(f)$ keine nichttriviale Relation der Gestalt $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i B_i(f) = 0$ erfüllen und es sei

$$(A, B_i) = 0, \quad (B_i, B_j) = \sum_k c_{ijk} B_k$$

mit konstanten c_{ijk}. $\mathfrak{G}$ sei die von den B_i erzeugte n-gliedrige Gruppe, deren endliche Transformationen bekannt seien. Das Problem, die Gleichung $A(f) = 0$ unter den gegebenen Umständen zu integrieren, bezeichnen wir mit (P_n).

Hat nun die Gruppe $\mathfrak{G}$ eine invariante, m_1-gliedrige Untergruppe $\mathfrak{G}_1$, so kann Lie die Lösung von (P_n) auf die Lösung zweier gleichartiger Probleme (P_{n-m_1}) und (P_{m_1}) zurückführen. Zum Problem (P_{n-m_1}) gehört die Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1$, während $\mathfrak{G}_1$ zum Problem (P_{m_1}) gehört. Kennt man eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}_1$, so kann man (P_{m_1}) weiter zerlegen. Besitzt schließlich $\mathfrak{G}$ eine Reihe von Untergruppen

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \supset \mathfrak{G}_1 \supset \mathfrak{G}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{G}_l,$$

wo jedes $\mathfrak{G}_{i+1}$ invariant in der m_i-gliedrigen Gruppe $\mathfrak{G}_i$ ist (Normalreihe), so ist (P_n) zurückführbar auf eine Reihe von Problemen

$$(P_{n-m_1}), \quad (P_{m_1-m_2}), \ldots, (P_{m_{l-1}-m_l}), \quad (P_{m_l}).$$

Ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ speziell auflösbar (Lie sagt „*integrabel*"), d. h. ist stets $m_{i+1} = m_i - 1$, $m_l = 1$, so hat man (P_n) auf eine Reihe von Problemen (P_1) zu-

rückgeführt. Ein Problem (P_1) ist aber in Wahrheit eine gewöhnliche Differentialgleichung, die eine bekannte inf. Transformation gestattet (§ 6), also durch Quadraturen zu lösen ist. Demnach ist für auflösbare Gruppen $\mathfrak{G}$ das Problem (P_n) durch Quadraturen lösbar.

Man wird leicht die Analogie zur Galoisschen Gleichungstheorie bemerken. Eine solche Analogie wird auch in den Untersuchungen von Picard und E. Vessiot (1865—1952) über lineare gewöhnliche Differentialgleichungen im Komplexen erreicht.[28])

§ 8 RIEMANN—HELMHOLTZ—LIESCHES RAUMPROBLEM

Die Arbeiten Lies über die Grundlagen der Geometrie knüpfen an die Untersuchungen von Riemann und Helmholtz an und stellen auch eine Anwendung seiner Gruppentheorie dar, deren Nützlichkeit er dabei besonders eindrucksvoll zu demonstrieren hoffte.

In seinem 1854 gehaltenen Habilitationsvortrag[29]) begründete Riemann die heute nach ihm benannte Geometrie, in der durch eine quadratische Differentialform in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit eine Metrik festgelegt wird. Mit deren Hilfe konnte Riemann eine Krümmungstheorie entwickeln, und die Räume konstanter Krümmung erwiesen sich als mit den nichteuklidischen identisch. Diese Riemannsche Begründung der Geometrie wurde von Helmholtz[30]) verworfen (zu Unrecht übrigens); er selbst ging von einer Mannigfaltigkeit (ohne Differentialform!) aus, in der eine „*freie Beweglichkeit*“ für die starren Körper möglich ist. Dies läuft etwa darauf hinaus, daß eine Gruppe von Transformationen der Mannigfaltigkeit gegeben ist, die gewisse Forderungen erfüllen. Freilich kommt der Gruppenbegriff explizit bei Helmholtz gar nicht vor; überhaupt sind die Helmholtzschen Formulierungen recht undeutlich. Lie unterzieht zunächst die Arbeit von Helmholtz einer eingehenden Kritik und zeigt, daß Helmholtz die „*freie Beweglichkeit im Infinitesimalen*“ benutzt. Sodann gibt Lie zwei verschiedene Lösungen des Problems an. Die erste sieht etwa so aus: Der Raum ist eine 3-dimensionale Zahlenmannigfaltigkeit, in der eine Gruppe G von Transformationen — Bewegungen — gegeben ist. Diese ist eine der nichteuklidischen Bewegungsgruppen, falls sie „*in einem festen Punkt P von allgemeiner Lage*“ die freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzt. Diese definiert Lie aber wie folgt: „*Hält man den Punkt P und ein beliebiges hindurchgehendes reelles Linienelement fest, so soll stets noch kontinuierliche Bewegung möglich sein, hält man dagegen außer P und jenem Linienelement noch ein beliebiges reelles Flächenelement fest, das durch beide geht, so soll keine kontinuierliche Bewegung mehr möglich sein*“. Diese erste Lösung hat Lie auch für beliebige Dimensionen formuliert.

Die zweite Lösung ist problematischer. Sie benutzt die freie Beweglichkeit im Endlichen. Lie setzt die Existenz von „*Pseudokugeln*“ voraus und fordert,

---

[28]) Siehe: Enzykl. d. math. Wiss. II, A, 4 b: E. Vessiot, Gewöhnliche Differentialgleichungen; elementare Integrationsmethoden.

[29]) B. Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen. Gesamm. Werke, Leipzig, 1876, S. 254—269.

[30]) H. v. Helmholtz, Über die Tatsachen, die der Geometrie zugrunde liegen. Wiss. Abh. II, 618—639, (1883).

daß nach Festhaltung des Mittelpunkts ein weiterer Punkt noch auf der durch ihn gehenden Pseudokugel frei beweglich ist.

Wie groß auch der Fortschritt eingeschätzt werden mag, den Lies Arbeiten zum Raumproblem gegenüber Helmholtz darstellen, so waren seine Sätze doch noch nicht recht befriedigend; so werden z. B. die topologischen Schwierigkeiten kaum beachtet. Dies bedeutet keine Einschränkung der Leistung Lies, sondern zeigt nur die Schwierigkeit des Problems, die schon bei seiner Formulierung anfängt. Es haben in der Folge viele Mathematiker an diesem heute nach Riemann, Helmholtz und Lie genannten Problem gearbeitet, wobei einige der klangvollsten Namen zu nennen wären.[31]) Die erzielten Resultate liefern eine wirkliche Lösung des Problems.

§ 9 AUSBLICK

Sophus Lie hat vornehmlich durch seinen Ideenreichtum auf die Mathematik unseres Jahrhunderts eingewirkt. Ob seine Resultate im einzelnen noch den heutigen Anforderungen an die Strenge der Beweise genügen, ist eine andere Frage. Hier bleibt, namentlich im Hinblick auf Lies Arbeiten über Differentialgleichungen, noch viel zu tun für die heutigen Mathematiker. Mächtig weiterentwickelt und in aller begrifflichen Schärfe ausgebaut wurde indessen die Liesche Gruppentheorie,[32]) worauf hier noch in aller Kürze eingegangen werden soll.

Eine Liesche Gruppe G definiert man heute als eine Gruppe, die gleichzeitig auch eine analytische Mannigfaltigkeit ist, so daß die Abbildung $(\sigma, \tau) \to \sigma\tau^{-1}$ von $G \times G$ auf G analytisch ist. Dabei sieht man zunächst davon ab, daß die Elemente von G eventuell Transformationen einer anderen Mannigfaltigkeit sind.[33]) Beschränkt man sich auf eine Umgebung des Einselementes, so erhält man eine lokale Gruppe G_1.[34]) Die inf. Transformationen, die G_1 im Sinne von Lie erzeugen, faßt man zu einem rein algebraischen Objekt, der „*Lieschen Algebra*" $\mathfrak{G}$ zusammen. $\mathfrak{G}$ ist ein endlichdimensionaler Vektorraum, $\dim \mathfrak{G} = \dim G$, in dem eine bilineare Verknüpfung zweier Vektoren X und Y zu (X, Y) gegeben ist, so daß

$$(X, Y) = -(Y, X), \quad (X, (Y, Z)) + (Y, (Z, X)) + (Z, (X, Y)) = 0.$$

Die Struktur der lokalen Gruppe G_1 wird dann durch $\mathfrak{G}$ vollständig beschrieben. Lokal isomorphe Gruppen haben gleiche Liesche Algebra und umgekehrt. Alle untereinander lokal isomorphen (zusammenhängenden) Lieschen Grup-

---

31) Eine Zusammenfassung der Entwicklung des Problems findet sich bei H. Freudenthal, Neuere Fassungen des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems, in J. Naas u. K. Schröder, Der Begriff des Raumes in der Geometrie, Berlin, 1957, S. 92—97.

32) An neueren Darstellung seien genannt: L. S. Pontrjagin, Topologische Gruppen, Teil 2, Leipzig 1958 (Übersetz. aus dem Russ.); C. Chevalley, Theory of Lie groups, I, Princeton 1946; S. Helgasson, Differential geometry and symmetric spaces, New York and London, 1962.

33) Man betrachtet also die Parametergruppe(n). Das Studium transitiver Transformationsgruppen läuft dann auf das Studium der Paare (G, H) hinaus, wo H Untergruppe von G ist.

34) Durch die genaue Fassung dieser Begriffe, insbesondere auch in topologischer Hinsicht, wird eine weit größere Strenge als bei Lie erreicht.

pen kann man aus der zugehörigen universellen Überlagerungsgruppe durch Faktorengruppenbildung[35]) nach einem diskreten Normalteiler gewinnen.

Der 3. Liesche Fundamentalsatz beinhaltet die Existenz einer lokalen Lieschen Gruppe zu gegebener Liescher Algebra. Aber auch eine vollständige Liesche Gruppe läßt sich stets zu gegebener Liescher Algebra konstruktieren. Für Algebren ohne Zentrum ist dies mit Hilfe der adjungierten Gruppe besonders einfach.

Bei der Untersuchung der Lieschen Algebren spielen die Begriffe der auflösbaren und der halbeinfachen Algebra eine besondere Rolle. Jede Liesche Algebra kann gewissermaßen in eine auflösbare und eine halbeinfache Liesche Algebra zerlegt werden.[36]) Jede halbeinfache Liesche Algebra zerlegt sich in einfache und diese sind vollständig klassifiziert worden, und zwar zuerst durch Killing, dessen Beweise und Resultate von E. Cartan (1869—1951) verbessert wurden. Beider Arbeiten wurden noch von Lie selbst gewürdigt.[37]) Eine besondere Schwierigkeit ergab sich dabei durch den notwendigen Übergang ins Komplexe, da nämlich rückwärts eine komplexe Algebra verschiedene reelle Formen haben kann. Hier ist wieder E. Cartan zu nennen, der überhaupt in vieler Hinsicht als der Nachfolger Lies gelten kann.

Im Jahre 1900 stellt D. Hilbert (1862—1943) eine Reihe von Problemen[38]) auf, deren Lösung er für den Fortschritt der mathematischen Wissenschaften besonders wünschenswert hielt. Das fünfte dieser Probleme bezieht sich auf Liesche Gruppen und läuft auf die Frage hinaus, ob man in der obigen Definition einer Lieschen Gruppe das Wort „*analytisch*" durch „*stetig*" ersetzen kann. Diese Frage ist auch im Hinblick auf das Raumproblem von Bedeutung und hat viele Mathematiker in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts beschäftigt. Es ist heute in bejahendem Sinne gelöst.

Es gibt noch eine Vielzahl von Theorien, die sich auf Liesche Gruppen beziehen und in den letzten Jahrzehnten entstanden sind: Darstellungstheorie, Theorie der invarianten Übertragungen auf Lieschen Gruppen, invarianten Differentialformen, Theorie von Hodge für Liesche Gruppen, die Bestimmung der Betti-Zahlen und Poincaré-Polynome kompakter Liescher Gruppen, symmetrische und homogene Räume usw. Die Erwähnung dieser Dinge kann hier nur den Sinn haben, die Lebenskraft der Lieschen Gruppentheorie bis in unsere Tage zu zeigen.

Wir schließen, indem wir F. Engel zitieren, der ja Zeit seines Lebens in seltener Treue bemüht war, den Mathematikern Lies Werk zu erschließen:

„*Wenn die Erfinderkraft der wahre Maßstab für die Größe eines Mathematikers ist, so muß Sophus Lie unter die ersten Mathematiker aller Zeiten gerechnet werden. ... Die Anregungen aber, die er in verschwenderischer Fülle ausgestreut hat, werden auf noch viel länger hinaus wirken, und niemand vermag abzusehen, wann einmal ihre Fruchtbarkeit erschöpft sein wird, wenn das überhaupt möglich ist.*"[39])

[35]) Den Begriff der Faktorgruppe verdankt man übrigens Lies Nachfolger in Leipzig, Otto Hölder, geb. 1859, gest. 1937, von 1899 bis 1928 ord. Prof. in Leipzig.

[36]) Allerdings nicht im Sinne einer direkten Zerlegung.

[37]) TG, Bd. 3, Kap. 29.

[38]) D. Hilbert, Ges. Abh., Bd. III, S. 290—329. — Hilbert begründet die Wichtigkeit des Problems gerade auch im Hinblick auf Lies Arbeiten über die Grundlagen der Geometrie.

[39]) Leipziger Berichte 51, (1899), S. XI.

Karl-Marx-Universität Leipzig,
Mathematisches Institut