

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum
Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Jiří Kepřt

Některá explicitní vyjádření optické funkce přenosu

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol.
8 (1967), No. 1, 91--112

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/119871>

Terms of use:

© Palacký University Olomouc, Faculty of Science, 1967

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

*Katedra teoretické fyziky a astronomie přírodovědecké fakulty
 Vedoucí katedry: prof. RNDr. Bedřich Havelka, doktor věd*

Některá explicitní vyjádření optické funkce přenosu

Jiří Keprt

(Předloženo dne 7. června 1966)

Úkolem práce je ukázat možnost explicitního vyjádření optické funkce přenosu v několika uvažovaných případech. Tyto jsou důležité nejen z důvodů ryze teoretických, tj. že se dají vyjádřit jednoduchým analytickým výrazem, ale mají hlavně význam pro studium kvality optického zobrazení některých přístrojů (Cassegrainův dalekohled, spektroskop atd.), a to pro hodnocení jakosti zobrazení, jeho zdokonalení a v budoucnu snad i pro konstrukční aplikace ve vývoji optických soustav s nekonstantním rozložením propustnosti v pupile. Předpokládáme, že zobrazovaný předmět vysílá nekoherentní světlo.

1. Úvod. Zobrazení rozlehlého předmětu

Na obr. 1a, 1b je znázorněna rotačně symetrická optická soustava, která zobrazuje předmětovou rovinu y, z v obrazovou rovinu y', z' . Nechť bod $P(y, z)$ se zobrazí soustavou do bodu $P'(y', z')$. Libovolný paprsek má pravoúhlé sférické souřadnice na referenční předmětové, resp. obrazové vlnoploše η, ξ a η', ξ' . V případě ne příliš velké apertury je možno zavést redukované pravoúhlé souřadnice stejné pro vstupní i výstupní pupilu:

$$v = \frac{\eta}{h} = \frac{\eta'}{h'}; \quad w = \frac{\xi}{h} = \frac{\xi'}{h'}. \quad (1)$$

Redukované souřadnice y, z a y', z' v předmětové a obrazové rovině souvisí s pravoúhlými geometrickými souřadnicemi Y, Z a Y', Z' vztahy:

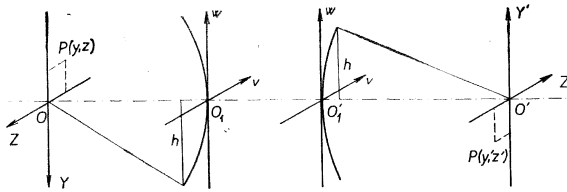
$$\begin{aligned} y &= \frac{\pi}{\lambda c} Y; & z &= \frac{\pi}{\lambda c} Z \\ y' &= \frac{\pi}{\lambda c} Y'; & z' &= \frac{\pi}{\lambda c} Z' \end{aligned} \quad (2)$$

kde λ je vlnová délka užitého světla a c clonové číslo soustavy.

Redukované prostorové frekvence s, t souvisí s geometrickými prostorovými frekvencemi μ, ν podle vztahů:

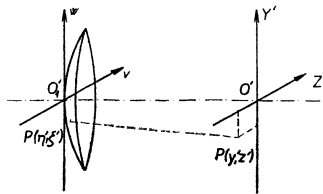
$$\begin{aligned} s &= 2\mu\lambda c \\ t &= 2\nu\lambda c. \end{aligned} \quad (3)$$

kde λ , c jsou veličiny téhož významu jako v předcházejícím odstavci a μ resp. v značí počet period sinusového testu vzhledem k ose Y resp. Z na 1 mm délky. Na obr. 2 je znázorněn průběh Foucaultova pravoúhlého testu, kde p značí délku periody v mm.

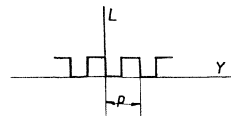


Obr. 1a.

Bod $P(y, z)$, který leží na optické ose, nebo v oblasti optické ose blízké, zobrazí se za předpokladu fyzikálně dokonalé soustavy jako rozptylová funkce $G(y' - \beta y, z' - \beta z)$ v okolí bodu $P(\beta y, \beta z)$, kde β je příčné zvětšení soustavy. Pro jednoduchost volíme v dalším $\beta = 1$. Rozptylová funkce je tedy konečného tvaru $G(y' - y, z' - z)$.



Obr. 1b.



Obr. 2.

Je-li funkce rozdělení jasu zobrazovaného předmětu $L(y, z)$, pak osvětlení $B(y', z')$ v obrazové rovině se získá jako součet osvětlení vyvolaných obrazy všech bodů předmětu:

$$B(y', z') = K \iint_{-\infty}^{+\infty} L(y, z) G(y' - y, z' - z) dy dz. \quad (4)$$

Aplikujeme-li konvoluční poučku na vztah (4), obdržíme:

$$b(s, t) = l(s, t) \cdot g(s, t), \quad (5)$$

kde

$$g(s, t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} G(\bar{y}, \bar{z}) e^{-i(\bar{y}s + \bar{z}t)} d\bar{y} d\bar{z} \quad (6)$$

a

$$l(s, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L(y, z) e^{-i(yt + zt')} dy dz \quad (7)$$

jsou inverzní Fourierovy transformace k funkcím $G(y, z)$ a $L(y, z)$. Dosadíme-li zpět do rovnice (5) pak

$$b(s, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L(y, z) e^{-i(yt + zt')} dy dz \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\bar{y}, \bar{z}) e^{-i(\bar{y}s + \bar{z}t')} d\bar{y} d\bar{z} \quad (8)$$

a volíme-li \bar{y}, \bar{z} tak, aby platilo: $\bar{y} = y' - y, z = z' - z$, nabude pravá strana předcházejícího vztahu tvaru:

$$b(s, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L(y, z) G(y' - y, z' - z) e^{-i(y's + z't')} dy dz dy' dz'. \quad (9)$$

Ale

$$b(s, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B(y', z') e^{-i(y's + z't')} dy' dz' \quad (10)$$

a srovnáním s výrazem (9) obdržíme:

$$B(y', z') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L(y, z) G(y' - y, z' - z) dy dz, \quad (11)$$

v soulase s (4).

Rovnice (11) vyjadřuje matematicky zobrazení rovinného předmětu. Jak již bylo řečeno v úvodu, ovlivňuje rozptylová funkce bodu obraz rozlehlého předmětu. Její Fourierův obraz $g(s, t)$ nám podává informaci, s jakým kontrastem přenáší soustava prostorové frekvence, z nichž se předmět skládá [viz. 3]. Optická funkce přenosu je definována jako podíl:

$$D(s, t) = \frac{g(s, t)}{g(o, o)} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(y', z') e^{-i(y's + z't')} dy' dz'}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(y', z') dy' dz'}. \quad (12)$$

Pro výpočet optické funkce přenosu se ukázal jako nejvhodnější způsob jejího vyjádření pomocí pupilové funkce $f(v, w)$. Je-li pro kruhovou pupilu v případě fyzikálně dokonalé soustavy

$$G(y', z') = \left[\frac{2J_1(\sqrt{y'^2 + z'^2})}{\sqrt{y'^2 + z'^2}} \right]^2 = F(y', z') \cdot F^*(y', z'), \quad (13)$$

pak amplitudová funkce

$$F(y', z') = \frac{2J_1(\sqrt{y'^2 + z'^2})}{\sqrt{y'^2 + z'^2}}. \quad (14)$$

Její inverzní Fourierova transformace

$$f(v, w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(y', z') e^{-i(y'v + z'w)} dy' dz' \quad (15)$$

je funkce kruhová

$$f(v, w) = \begin{cases} 1 & \text{pro } v^2 + w^2 \leq 1 \\ 0 & \text{pro } v^2 + w^2 > 1 \end{cases}, \quad (16)$$

což je vlastně pupilová funkce, která má konstantní hodnotu jasu přes celou plochu pupily a nulovou hodnotu vně pupily o poloměru $v^2 + w^2 = 1$.

Platí-li vztahy (15) a (16), pak

$$F(y', z') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(v, w) e^{i(y'v + z'w)} dv dw \quad (17)$$

a položíme-li

$$\begin{aligned} y' &= \tau \cos \varphi; & v &= u \cos \psi \\ z' &= \tau \sin \varphi; & w &= u \sin \psi, \end{aligned}$$

obdržíme v polárních souřadnicích

$$F(\tau, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{i\tau u \cos(\varphi - \psi)} u du d\psi.$$

V důsledku rotační symetrie je dále

$$F(\tau) = \int_0^1 J_0(\tau u) u du,$$

takže

$$F(\tau) = \frac{J_1(\tau)}{\tau}. \quad (18)$$

Ale tento výraz se liší od rovnice (14) pouze konstantním činitelem. Souhlas obdržíme normováním:

$$F(0) = \frac{1}{2},$$

a tedy

$$F_1(\tau) = \frac{2J_1(\tau)}{\tau}.$$

Ze vztahů (6) a (13) dále plyne:

$$g(s, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(y', z') F^*(y', z') e^{-i(y's + z't)} dy' dz' \quad (19)$$

a užijeme-li rovnice (17), obdržíme:

$$g(s, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(v, w) F^*(y', z') e^{i[y'(v-s) + z'(w-t)]} dy' dz' dv dw.$$

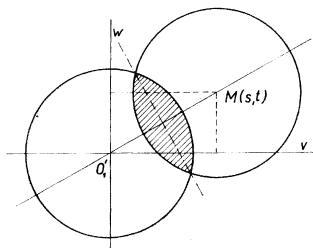
Označíme-li dále

$$f^*(v-s, w-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(y', z') e^{i[y'(v-s) + z'(w-t)]} dy' dz',$$

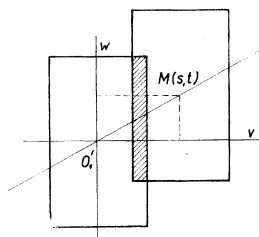
dostaneme konečný tvar funkce $g(s, t)$ vhodný pro výpočet. Tedy

$$g(s, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(v, w) f^*(v-s, w-t) dv dw. \quad (20)$$

Definiční obor funkce $f(v, w)$ je v případě kruhové pupily kruh $v^2 + w^2 \leq 1$. Pro funkci $f^*(v-s, w-t)$ je definičním oborem opět plocha pupily se středem v bodě $M(s, t)$. Integrační oblast součmu těchto dvou funkcí bude tedy společná část dvou kruhů se středy v počátku a bodě M . Obr. 3a, 3b ukazují integrační oblast v případě kruhové a obdélníkové pupily.



Obr. 3a.



Obr. 3b.

Hodnota integrálu se nezmění, provedeme-li následující zjednodušení. Nejprve změnou počátku převedeme funkci $g(s, t)$ na souměrný tvar:

$$g(s, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(v + \frac{1}{2}s, w + \frac{1}{2}t\right) f^*\left(v - \frac{1}{2}s, w - \frac{1}{2}t\right) dv dw. \quad (21)$$

Pro kruhovou pupilu je možno dále položit $t = 0$, čímž převedeme funkci dvou proměnných na funkci jedné proměnné $g(s, 0)$. Tedy

$$g(s, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(v + \frac{1}{2}s, w\right) f^*\left(v - \frac{1}{2}s, w\right) dv dw. \quad (22)$$

Zavedeme-li polární souřadnice

$$\begin{aligned} s &= 2\varrho \cos \psi \\ t &= 2\varrho \sin \psi, \end{aligned}$$

odpovídá funkci $g(s, t)$ funkce $g(\varrho, \psi)$ a za předpokladu uvažovaných zjednodušení přejde rovnice (22) na tvar

$$g(\varrho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(v + \varrho, w) f^*(v - \varrho, w) dv dw, \quad (23)$$

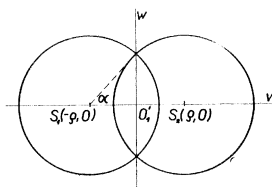
který bude výchozím vztahem většiny našich dalších integrálních výpočtů.

2. Fyzikálně dokonalá soustava zatížená vadou rozostření

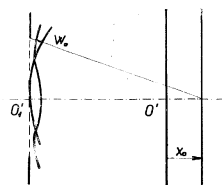
Jak je z vlnové teorie světla známo, je obecně vyjádřená pupilová funkce dána výrazem

$$f(v, w) = \begin{cases} K(v, w) e^{ikW(v, w)} \\ 0 \end{cases} \quad \text{pro } \begin{cases} v^2 + w^2 \leq 1 \\ > 1, \end{cases} \quad (24)$$

kde $K(v, w)$ je funkce propustnosti, $W(v, w)$ vlnová aberace soustavy a $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ vlnové číslo. V našem případě uvažujeme konstantní rozložení intenzity v rozsahu celé apertury, proto pokládáme v dalším $K(v, w) = 1$. Integrační oblast ve vztahu (23) je společná část dvou kruhů se středy v bodech $S_1(-\varrho, 0)$ a $S_2(\varrho, 0)$ (obr. 4).



Obr. 4.



Obr. 5.

Posuv obrazové roviny z paraxiální polohy o vzdálenost x_0 způsobuje úměrný vzrůst vlnové aberace W_0 (obr. 5), pro níž platí:

$$W_0 = \frac{x_0}{8c^2} (v^2 + w^2).$$

Pak

$$kW_0 = b(v^2 + w^2),$$

kde

$$b = \frac{\pi x_0}{4\lambda c^2}. \quad (25)$$

Jelikož pro $W = 0$ a $\varrho = 0$ vychází z (23) užitím (24)

$$g(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-w^2}} dv dw = \frac{1}{2}, \quad (26)$$

pak optickou funkci přenosu definovanou podílem (12) určíme ze vztahu

$$D(\varrho) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\sqrt{1-\varrho^2}} \int_0^{\sqrt{1-w^2}-\varrho} e^{iav} dv dw, \quad (27)$$

kde

$$a = \frac{\pi x_0}{\lambda c^2} \varrho. \quad (28)$$

Neboť

$$b\langle[(v + \varrho)^2 + w^2] - [(v - \varrho)^2 + w^2]\rangle = 4b\varrho v = av.$$

Rozvineme-li funkci e^{iav} v řadu a pro malé hodnoty exponentu se omezíme na první členy rozvoje, obdržíme:

$$D(\varrho) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\sqrt{1-\varrho^2}} \int_0^{\sqrt{1-w^2}-\varrho} dv dw - \frac{2a^2}{\pi} \int_0^{\sqrt{1-\varrho^2}} \int_0^{\sqrt{1-w^2}-\varrho} v^2 dv dw. \quad (29)$$

Imaginární část rozvoje se po integraci v důsledku souměrnosti integrační oblasti rovná nule. Dané integrály lze vyhodnotit velmi snadno substitucí $\sin \alpha = w$, kde α je úhel vyznačený na obr. 4. Pro mezní α plyne:

$$\alpha = \arccos \varrho. \quad (30)$$

Pro zjednodušení zápisu zavádíme dále:

$$\sin \alpha = \sqrt{1-\varrho^2} = \varepsilon. \quad (31)$$

Po integraci lze (29) zapsat ve tvaru:

$$D(\varrho) = D_0(\varrho) - D_1(\varrho), \quad (32)$$

kde

$$D_0(\varrho) = \frac{2}{\pi} (\alpha - \varrho\varepsilon) \quad (33)$$

je funkce přenosu fyzikálně dokonalé optické soustavy pro Gaussovu obrazovou rovinu.

Posuv obrazové roviny z nejpříznivější paraxiální polohy o vzdálenost x_0 se projeví snížením kontrastu pro jednotlivé prostorové frekvence. Příslušný pokles spočítáme ze vztahu:

$$D_1(\varrho) = \left(\frac{x_0}{\lambda c^2}\right)^2 \frac{2\pi}{3} \varrho^2 \left[\frac{3}{2} \left(\varrho^2 + \frac{1}{4}\right) \alpha - \frac{13}{8} \varrho\varepsilon - \frac{1}{4} \varrho^3\varepsilon \right]. \quad (34)$$

Vztah (34) platí ovšem jen pro malé rozostření, prakticky do $2\lambda c^2$. Pro $x_0 \leq 2\lambda c^2$ neklesne také podle Rayleiho kriteria $W_0 \leq 0,25\lambda$ intenzita ve středu ohybového obrazce pod $0,8I_0$. Příslušný průběh optické funkce přenosu pro rozostření $x_0 = 0$,

$x_0 = \lambda c^2$, $x_0 = 2\lambda c^2$ je naznačen na obr. 6, křivky 1, 2, 3. Pro soustavu, jež má $c = 10$ a pro $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$ mm je $x_0 = \lambda c^2 = 0,05$ mm a $x_0 = 2\lambda c^2 = 0,1$ mm. Pro větší rozostření je možno výpočet opravit funkcí $D_s(\varrho)$, kterou určíme z dalšího členu rozvoje integrandu ve vztahu (27)

$$D_s(\varrho) = \frac{4a^2}{5! \pi} \int_0^{\sqrt{1-\varrho^2}} (\sqrt{1-w^2} - \varrho)^5 dw. \quad (35)$$

Tedy

$$D(\varrho) = D_0(\varrho) - D_1(\varrho) + D_s(\varrho), \quad (36)$$

kde

$$D_s(\varrho) = \left(\frac{x_0}{\lambda c^2}\right)^4 \frac{4\pi^3}{5!} \varrho^4 \left[\frac{5}{2} \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{2} \varrho^2 + \varrho^4 \right) \alpha - \frac{113}{48} \varrho \varepsilon - \frac{97}{24} \varrho^3 \varepsilon - \frac{1}{6} \varrho^5 \varepsilon \right]. \quad (37)$$

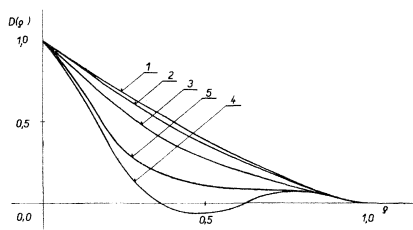
Vztah (36) je možno zapsat ve tvaru:

$$D(\varrho) = D_0(\varrho) - \left(\frac{x_0}{\lambda c^2}\right)^2 A_1(\varrho) + \left(\frac{x_0}{\lambda c^2}\right)^4 A_2(\varrho). \quad (38)$$

přičemž výrazy $A_1(\varrho)$ a $A_2(\varrho)$ lze předem vyčíslit. Praktický výpočet se provádí užitím tabulky 1.

Tabulka 1

ϱ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$D_0(\varrho)$	0,8729	0,7471	0,6238	0,5046	0,3910	0,2848	0,1881	0,1041	0,0374
$A_1(\varrho) \cdot 10^2$	0,862	2,31	3,28	3,44	2,86	1,91	0,956	0,304	0,034
$A_2(\varrho) \cdot 10^4$	0,286	2,41	5,88	8,03	7,24	4,42	1,70	0,264	0,018



Obr. 6.

Na obr. 6 jsou křivky 2, 3, 4 počítány ze vzorce (32) pro rozostření $x_0 = \lambda c^2$, $2\lambda c^2$, $4\lambda c^2$. Křivka 5 udává průběh optické funkce přenosu pro rozostření $x_0 = 4\lambda c^2$ užitím rovnice (36).

Úplný výpočet integrálu v (27) podává Hopkins [viz. 4]

$$D(\varrho) = \frac{4}{\pi a} \int_0^{\sqrt{1-\varrho^2}} \sin a(\sqrt{1-w^2}-\varrho) dw. \quad (39)$$

Užitím substituce $\sin \alpha = w$ obdržíme

$$D(\varrho) = \frac{4}{\pi a} \int_0^{\alpha} \sin a(\cos \alpha - \varrho) \cos \alpha d\alpha,$$

kde $\alpha = \arccos \varrho$. Užitím známých goniometrických vztahů dostaneme dále:

$$D(\varrho) = \frac{4}{\pi a} \cos a\varrho \int_0^{\alpha} \sin(a \cos \alpha) \cos \alpha d\alpha - \frac{4}{\pi a} \sin a\varrho \int_0^{\alpha} \cos(a \cos \alpha) \cos \alpha d\alpha.$$

Rozvineme-li pak $\sin(a \cos \alpha)$ a $\cos(a \cos \alpha)$ pomocí Besselových funkcí, lze oba integrály snadno vypočítat. Výsledek lze vyjádřit ve tvaru řady:

$$D(\varrho) = \frac{4}{\pi a} \cos a\varrho \left\{ \alpha J_1(a) + \frac{1}{2} \sin 2\alpha [J_1(a) - J_3(a)] - \frac{1}{4} \sin 4\alpha [J_3(a) - J_5(a)] + \dots \right\} - \frac{4}{\pi a} \sin a\varrho \left\{ \sin \alpha [J_0(a) - J_2(a)] - \frac{1}{3} \sin 3\alpha [J_2(a) - J_4(a)] + \dots \right\}, \quad (40)$$

kde opět $a = \frac{\pi x_0}{\lambda c^2} \varrho$ a $\alpha = \arccos \varrho$. Užitím tohoto vztahu jsou počítány přenosové funkce pro rozostření do $8\lambda c^2$ s přesností 10^{-4} (tab. 2).

Tabulka 2

x_0 \ ϱ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,8729	0,7471	0,6238	0,5046	0,3910	0,2848	0,1881	0,1041	0,0374
1	0,8617	0,7223	0,5901	0,4700	0,3626	0,2656	0,1783	0,1008	0,0369
2	0,8366	0,6574	0,5011	0,3794	0,2875	0,2153	0,1524	0,0922	0,0359
3	0,7959	0,5580	0,3726	0,2549	0,1862	0,1461	0,1150	0,0791	0,0343
4	0,7410	0,4358	0,2309	0,1272	0,0857	0,0749	0,0733	0,0628	0,0321
5	0,6742	0,3049	0,1002	0,0241	0,0085	0,0172	0,0347	0,0454	0,0295
6	0,5979	0,1787	0,0012	-0,0371	-0,0328	-0,0175	0,0052	0,0284	0,0264
7	0,5210	0,0698	-0,0556	-0,0543	-0,0388	-0,0279	-0,0123	0,0136	0,0230
8	0,4284	-0,0131	-0,0706	-0,0383	-0,0212	-0,0198	-0,0176	0,0022	0,0196

Nabývá-li rozostření značně velkých hodnot ($x_0 \geq 16\lambda c^2$), pak účinek ohybu nemusíme uvažovat a obraz bodu $G(y', z')$ můžeme chápat z hlediska geometrické optiky jako kroužek konstantního osvětlení o poloměru B (obr. 7).

Funkce obrazu bodu je tedy funkcí kruhovou

$$G(y', z') = \begin{cases} \frac{1}{b^2} & \text{pro } y'^2 + z'^2 \leq b^2 \\ 0 & > b^2 \end{cases}, \quad (41)$$

kde $b = \frac{\pi}{\lambda c} B$. Protože $\omega' = \frac{h}{f'} - \frac{1}{2c}$ je $b = \frac{1}{2} \frac{\pi x_0}{\lambda c^2}$. Výpočet můžeme pak provést přímo užitím definičních vztahů (6) a (12). Pro oblast S , která je kroužkem o poloměru b , platí:

$$\iint_S G(y', z') dy dz = \pi,$$

a tudíž

$$D(s, t) = \frac{1}{\pi} \iint_S G(y', z') e^{-i(y's + z't)} dy' dz'.$$

Zavedeme-li polární souřadnice

$$y' = \tau \cos \varphi; \quad s = 2\varrho \cos \psi$$

$$z' = \tau \sin \varphi; \quad t = 2\varrho \sin \psi$$

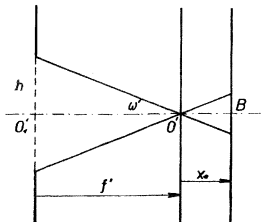
obdržíme po integraci

$$D(\varrho) = \frac{J_1(2b\varrho)}{b\varrho},$$

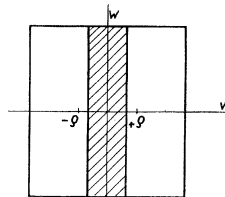
ale položíme-li $2b\varrho = a$, dostaneme konečný výraz v jednoduchém tvaru

$$D(\varrho) = \frac{2J_1(a)}{a}, \quad (42)$$

kde opět $a = \frac{\pi x_0}{\lambda c^2} \varrho$.



Obr. 7.



Obr. 8.

Rozlišovací mez soustavy zatížené velkými vadami určíme pak snadno z podmínky $J_1(a) = 0$. Tedy $a = 3,83$, z čehož plyne $\varrho = 1,22 \frac{\lambda c^2}{x_0}$. Volíme-li $x_0 = 16\lambda c^2$,

vychází $\varrho = 0,075\lambda c^2$. Pro $c = 10$ a $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$ mm dostáváme $\mu = \frac{\varrho}{\lambda c^2} = 15$ č/mm. Soustava rozliší frekvence menší než 15 č/mm.

3. Obdélníková pupila

V teorii spektrografu je důležitý případ obrazu čarové struktury, jež je rovnoběžná s jednou stranou obdélníkové pupily. Uvažujeme-li poloviční šířku apertury $v = 1$ a w_0 poloviční délku štěrbin, pak

$$g(0, 0) = \frac{1}{2\pi} 4w_0,$$

neboť pro zobrazení spektrografem studujeme čarovou strukturu rovnoběžnou s w , a tudíž prostorová frekvence $v = 0$ a také $t = 0$.

Pro obdélníkovou pupilu nabývá rovnice (27) tvaru:

$$D(\varrho) = \frac{1}{4w_0} \int_S \int e^{iuv} dv dw, \quad (43)$$

kde integrační oblast je společná část obdélníků o stranách 2 a $2w_0$ se středy v bodech $\pm\varrho$ (obr. 8). Jako v předcházejícím případě $a = \frac{\pi w_0}{\lambda c^2} \varrho$. Je proto

$$D(\varrho) = \frac{1}{4w_0} \int_{-w_0}^{w_0} \int_{-(1-\varrho)}^{1-\varrho} e^{iuv} dv dw$$

a po integraci

$$D(\varrho) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{2i} [e^{ia(1-\varrho)} - e^{-ia(1-\varrho)}],$$

nebo lépe

$$D(\varrho) = \frac{1}{a} \sin a(1-\varrho). \quad (44)$$

V paraxiální rovině je

$$D(\varrho) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \sin a(1-\varrho),$$

což je přímka

$$D(\varrho) = 1 - \varrho. \quad (45)$$

Užitím tabulek funkcí $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ lze pak snadno určit průběh optické funkce přenosu pro jakékoli rozostření, neboť

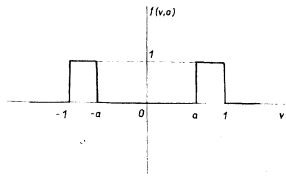
$$D(\varrho) = (1 - \varrho) \frac{\sin \alpha}{\alpha},$$

přičemž

$$\alpha = \pi \frac{\lambda c^2}{x_0} \varrho(1 - \varrho).$$

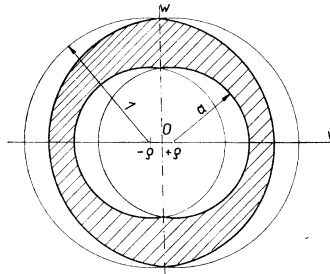
4. Pupila ve tvaru mezikruží

U zrcadlových dalekohledů některých typů nastává případ, že výstupní pupila je ve tvaru mezikruží, což příznivě působí na rozlišení jemných detailů např. dvojhvězd.



Obr. 9.

Uvažujme zobrazení fyzikálně dokonalou soustavou v nejpříznivější tj. v paraxiální obrazové rovině. Pupilová funkce $f(v, w) = 1$ pro oblast $a^2 \leq v^2 + w^2 \leq 1$. Nad oborem všech ostatních bodů je $f(v, w) = 0$ (obr. 9). Poloměr středového zaclonění $0 < a < 1$.

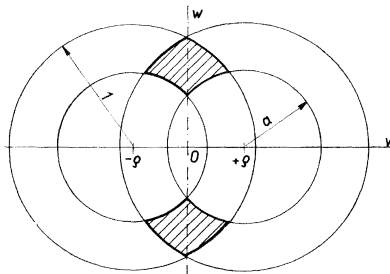


Obr. 10a.

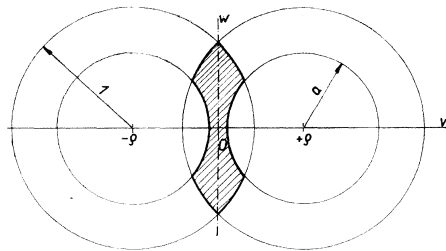
Výpočet optické funkce přenosu užitím vztahu (23) se redukuje na planimetrickou úlohu, tj. na výpočet velikosti společné oblasti dvou mezikruží se středy v bodech $\pm \rho$. Situaci znázorňují postupně obr. 10a, 10b, 10c, 10d. Příslušné explicitní výrazy vhodné pro výpočet přenosové funkce jsou závislé na vzájemné poloze středu a zaclonění.

Pro $0 \leq \rho \leq \frac{1-a}{2}$ platí

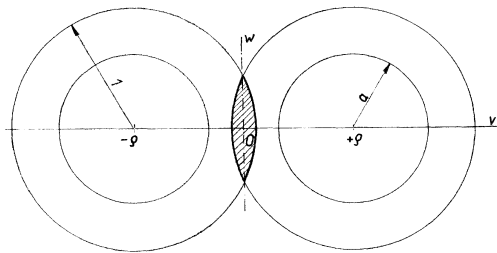
$$D(\rho) = \frac{2}{\pi(1-a^2)} [B_0(\rho) - B_1(\rho)]. \quad (46)$$



Obr. 10b.



Obr. 10c.



Obr. 10d.

Jestliže dále $\frac{1-a}{2} \leq \varrho \leq a$ počítáme $D(\varrho)$ ze vztahu

$$D(\varrho) = \frac{2}{\pi(1-a^2)} [B_0(\varrho) - B_1(\varrho) + B_2(\varrho) - B_3(\varrho)]. \quad (47)$$

V dalším intervalu $a \leq \varrho \leq \frac{1+a}{2}$ platí

$$D(\varrho) = \frac{2}{\pi(1-a^2)} [B_0(\varrho) - B_3(\varrho) - B_4(\varrho)]. \quad (48)$$

Nakonec pro $\frac{1+a}{2} \leq \varrho \leq 1$ obdržíme

$$D(\varrho) = \frac{2}{\pi(1-a^2)} B_0(\varrho). \quad (49)$$

Přičemž:

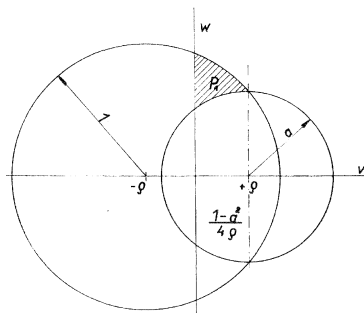
$$B_0(\varrho) = \arccos \varrho - \varrho \sqrt{1-\varrho^2}, \quad (50)$$

$$B_1(\varrho) = a^2 \left[\pi - \arccos \frac{\varrho}{a} + \frac{\varrho}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{\varrho}{a}\right)^2} \right], \quad (51)$$

$$B_2(\varrho) = a^2 \arccos \frac{1}{a} \left(\frac{1-a^2}{4\varrho} - \varrho \right) - \left(\frac{1-a^2}{4\varrho} - \varrho \right) \sqrt{1 - \left(\frac{1-a^2}{4\varrho} + \varrho \right)^2}, \quad (52)$$

$$B_3(\varrho) = \arccos \left(\frac{1-a^2}{4\varrho} + \varrho \right) - \left(\frac{1-a^2}{4\varrho} + \varrho \right) \sqrt{1 - \left(\frac{1-a^2}{4\varrho} + \varrho \right)^2}, \quad (53)$$

$$B_4(\varrho) = a^2 \arccos \frac{1}{a} \left(\varrho - \frac{1-a^2}{4\varrho} \right) - \left(\varrho - \frac{1-a^2}{4\varrho} \right) \sqrt{1 - \left(\varrho + \frac{1-a^2}{4\varrho} \right)^2}. \quad (54)$$



Obr. 11.

Stanovení integrálu si ozejmíme výpočtem vztahu (47). Ostatní vztahy lze odvodit obdobně. Na obr. 11 je šrafovaná část čtvrtinou definované oblasti, kterou určíme vyhodnocením integrálu:

$$P = 4P_1 = 4 \int_0^{\frac{1-a^2}{4\varrho}} \int_{\frac{1-(v+\varrho)^2}{|a^2-(v-\varrho)^2}}^{\frac{1-a^2}{4\varrho}} \frac{|1-(v+\varrho)^2|}{|a^2-(v-\varrho)^2|} dv dw.$$

Proměnné meze určíme z analytického vyjádření kružnic:

$$(v + \varrho)^2 + w^2 = 1; \quad (v - \varrho)^2 + w^2 = a^2.$$

Výpočet převedeme na jednoduché integrace:

$$I_1 = 4 \int_0^{\frac{1-a^2}{4\varrho}} \sqrt{1 - (v + \varrho)^2} dv \quad (55)$$

a

$$I_2 = 4 \int_0^{\frac{1-a^2}{4\varrho}} \sqrt{a^2 - (v - \varrho)^2} dv, \quad (56)$$

přičemž

$$P = I_1 - I_2.$$

Integrál (55) určíme užitím jednoduché substituce

$$v + \varrho = \cos \alpha, \quad (57)$$

a tudíž nové meze

$$v = 0, \quad v = \frac{1-a^2}{4\varrho},$$

$$\alpha = \arccos \varrho, \quad \alpha = \arccos \left(\frac{1-a^2}{4\varrho} + \varrho \right).$$

Integrál v rovnici (56) stanovíme podobně pomocí substituce

$$v - \varrho = a \cos \beta, \quad (58)$$

přičemž pro

$$v = 0, \quad v = \frac{1-a^2}{4\varrho},$$

je

$$\beta = \pi - \arccos \frac{\varrho}{a}, \quad \beta = \arccos \frac{1}{a} \left(\frac{1-a^2}{4\varrho} - \varrho \right).$$

Tudíž

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \int_{\arccos \left(\frac{1-a^2}{4\varrho} + \varrho \right)}^{\arccos \varrho} (1 - \cos 2\alpha) d\alpha = \\ &= 2 \left\{ \left[\arccos \varrho - \varrho \sqrt{1 - \varrho^2} \right] - \left[\arccos \left(\frac{1-a^2}{4\varrho} + \varrho \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{1-a^2}{4\varrho} + \varrho \right) \sqrt{1 - \left(\frac{1-a^2}{4\varrho} + \varrho \right)^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

což lze užitím vztahů (50) a (53) zapsat zjednodušeně

$$I_1 = 2[B_0(\varrho) - B_3(\varrho)]. \quad (59)$$

Obdobně:

$$I_2 = 2a^2 \int_{\arccos \frac{1}{a} \sqrt{\frac{1-a^2}{4\varrho} - \varrho}}^{\pi - \arccos \frac{\varrho}{a}} (1 - \cos 2\beta) d\beta =$$

$$= 2 \left\{ a^2 \left[\pi - \arccos \frac{\varrho}{a} + \frac{\varrho}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{\varrho}{a}\right)^2} \right] - \left[a^2 \arccos \frac{1}{a} \left(\frac{1-a^2}{4\varrho} - \varrho \right) - \left(\frac{1-a^2}{4\varrho} - \varrho \right) \sqrt{a^2 - \left(\frac{1-a^2}{4\varrho} - \varrho \right)^2} \right] \right\},$$

ale výrazy v lomených závorkách jsou rovnice (51) a (52). Tedy:

$$I_2 = 2[B_1(\varrho) - B_2(\varrho)], \quad (60)$$

neboť platí identita:

$$a^2 - \left(\frac{1-a^2}{4\varrho} - \varrho \right)^2 = 1 - \left(\frac{1-a^2}{4\varrho} + \varrho \right)^2.$$

Základní vztah (23) lze v našem případě zapsat ve tvaru:

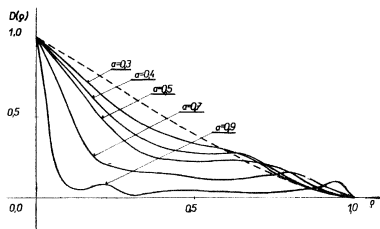
$$g(\varrho) = \frac{1}{2\pi} P. \quad (61)$$

Pro $\varrho = 0$ je P obsah mezikruží $P = \pi(1 - a^2)$, tudíž

$$g(0) = \frac{1}{2} (1 - a^2). \quad (62)$$

Optická funkce přenosu

$$D(\varrho) = \frac{g(\varrho)}{g(0)} = \frac{1}{\pi(1 - a^2)} P. \quad (63)$$



Obr. 12.

Na obr. 12 je zakreslen průběh přenosové funkce pro různá středová zaclonění. Čárkovaná křivka značí nezacloněnou soustavu $a = 0$. Pro tento případ ztrácí výrazy B_1, B_2, B_3, B_4 reálný význam a platí tudíž v celém oboru $D(\varrho) = \frac{2}{\pi} B_0(\varrho)$.

což je rovnice (33). Z obr. 12 vidíme, že zvětšováním středového zaclonění se snižuje kontrast pro nízké frekvence, ale naopak rozlišení detailů bude lepší než pro nezaclonenou soustavu.

5. Apodisace

Teoretické studium zvýšení rozlišovací schopnosti optických přístrojů vedlo k hledání metody, která by odstranila vznik vedlejších maxim a minim v ohybovém obrazení bodu, nebo naopak zvýšila příspěvek světla v prvním vedlejším maximu, což se příznivě projeví zúžením hlavního maxima a přiblížením prvního minima ke středu ohybového obrazce. Tohoto cíle lze teoreticky snadno dosáhnout užitím filtru, nebo nanesením nějaké absorpční vrstvy na některou plochu objektivu tak, aby propustnost ve středu byla největší a k okrajům se zmenšovala, nebo naopak.

Kruhová pupila

Studium zobrazení rozlehlých předmětů užitím optické funkce přenosu ukazuje podobné efekty jako v případě mezikruží. Uvažujme opět fyzikálně dokonalou soustavu a zobrazení v paraxiální obrazové rovině. Předpokládáme tedy, že $W(v, w) = 0$. Vzhledem k (24) je pupilová funkce dána vztahem:

$$f(v, w) = \begin{cases} K(v, w) & \text{pro } v^2 + w^2 \leq 1 \\ 0 & \text{pro } v^2 + w^2 > 1 \end{cases}. \quad (64)$$

Užijeme-li jako funkce propustnosti paraboly, obdržíme:

$$K(v, w) = 1 - \beta(v^2 + w^2), \quad (65)$$

kde β je koeficient charakterisující propustnost.

K výpočtu přenosové funkce užijeme opět rovnice (23). Platí:

$$f(v + \varrho, w) = 1 - \beta[(v + \varrho)^2 + w^2]$$

a

$$f^*(v - \varrho, w) = 1 - \beta[(v - \varrho)^2 + w^2].$$

Proto jejich součin

$$\begin{aligned} f(v + \varrho, w) f^*(v - \varrho, w) &= \\ &= (1 - \beta\varrho^2)^2 - 2\beta(1 + \beta\varrho^2)v^2 + \beta^2v^4 - 2\beta(1 - \beta\varrho^2)w^2 + 2\beta^2v^2w^2 + \beta^2w^4. \end{aligned}$$

Dosazením do (23) obdržíme:

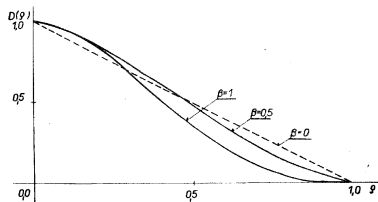
$$\begin{aligned} g(\varrho) &= \frac{1}{2\pi} \left[(1 - 2\beta\varrho^2 + \beta^2\varrho^4) \iint_S dv dw - 2\beta(1 + \beta\varrho^2) \iint_S v^2 dv dw + \right. \\ &\quad \left. + \beta^2 \iint_S v^4 dv dw + 2\beta^2 \iint_S v^2 w^2 dv dw - \right. \\ &\quad \left. - 2\beta(1 - \beta\varrho^2) \iint_S w^2 dv dw + \beta^2 \iint_S w^4 dv dw \right], \quad (66) \end{aligned}$$

kde integrační oblast S je opět společná část kruhů se středy v bodech $\pm\varrho$.

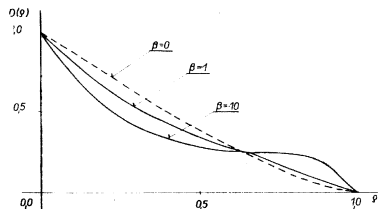
Vyhodnocení integrálů lze provést obdobně jako v případě soustavy zatížené vadou rozostření, tj. pomocí substituce $\sin \alpha = w$. Dosazením do vztahu (66) a normováním pro $\varrho = 0$ obdržíme vyjádření přenosové funkce v konečném analytickém tvaru:

$$D(\varrho) = \frac{1}{\pi \left(1 - \beta + \frac{1}{3} \beta^2\right)} \left[2 \left(1 - \beta + \frac{1}{3} \beta^2\right) \alpha - 4\beta(2 - \beta) \varrho^2 \alpha - \right. \\ \left. - 2 \left(1 - 3\beta + \frac{5}{3} \beta^2\right) \varrho \varepsilon + 4\beta \left(1 - \frac{1}{9} \beta\right) \varrho^3 \varepsilon - \frac{4}{5} \beta^2 \varrho^5 \varepsilon \right], \quad (67)$$

kde opět $\alpha = \arccos \varrho$ a $\varepsilon = \sqrt{1 - \varrho^2}$.



Obr. 13a.



Obr. 13b.

Jestliže $\beta = 0$ pak obecný výraz (67) přejde na známý vztah (33), což je přenosová funkce pro případ konstantní propustnosti. Na obr. 13a, 13b jsou zakresleny křivky funkce kontrastu pro různé případy kladné a záporné propustnosti. Čárkovaná křivka značí přenosovou funkci pro konstantní propustnost. Na obr. 13a je vidět přínos kontrastu pro nízké frekvence při poklesu propustnosti k obvodu pupily, na obr. 13b přínos kontrastu pro frekvence vysoké při snížení středové propustnosti. Právě tento druhý případ připomíná průběh kontrastu u zacloněné pupily, jak se také dalo již předem očekávat.

Obdélníková pupila

Propustnost obdélníkové pupily je závislá na jedné proměnné veličině v , tedy

$$K(v, w) = 1 - \beta v^2. \quad (68)$$

Platí proto pro pupilovou funkci:

$$f(v + \varrho, w) = 1 - \beta(v + \varrho)^2$$

a

$$f^*(v - \varrho, w) = 1 - \beta(v - \varrho)^2.$$

Analytický výraz vyjadřující součin komplexně sdružených výrazů a také integrace bude tudíž podstatně jednodušší:

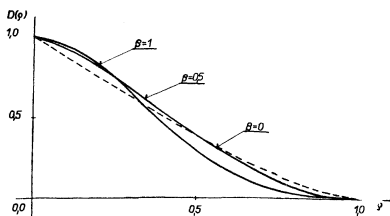
$$f(v + \varrho, w)f^*(v - \varrho, w) = 1 + \beta\varrho^2(\beta\varrho^2 - 2) - 2\beta(1 + \beta\varrho^2)v^2 + \beta^2v^4.$$

Uvažujeme-li opět poloviční šířku apertury $v = 1$ a w_0 poloviční délku štěrby, obdržíme po dosazení do rovnice (23)

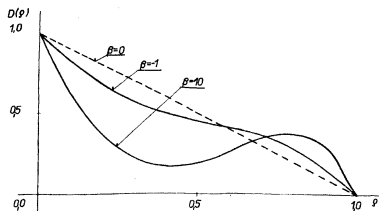
$$g(\varrho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-w_0}^{+w_0} \int_{-(1-\varrho)}^{1-\varrho} [1 + \beta\varrho^2(\beta\varrho^2 - 2) - 2\beta(1 + \beta\varrho^2)v^2 + \beta^2v^4] dv dw. \quad (69)$$

Integrací pro $\varrho = 0$ určíme normovacího činitele

$$g(0) = \frac{2w_0}{\pi} \left[1 - \frac{2}{3}\beta + \frac{\beta^2}{5} \right].$$



Obr. 14a.



Obr. 14b.

Vyhodnocením integrálů v (69) a normováním dostaneme přenosovou funkci obdélníkové pupily s nekonstantní propustností ve tvaru:

$$D(\varrho) = \frac{1 - \varrho}{1 - \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{5}} \frac{\beta^2}{\beta^2} \left[1 + \beta \varrho^2 (\beta \varrho^2 - 2) - \frac{2}{3} \beta (1 + \beta \varrho^2) (1 - \varrho)^2 + \frac{1}{5} \beta^2 (1 - \varrho)^4 \right]. \quad (70)$$

V případě konstantní propustnosti, tj. pro $\beta = 0$, obdržíme známý výraz:

$$D(\varrho) = 1 - \varrho.$$

Obr. 14a, 14b ukazují průběh optické funkce přenosu pro různé případy propustnosti, obdobně jako pro pupilu kruhovou.

Literatura

- [1] *Havelka B.*: Geometrická optika I, ČSAV Praha 1955.
- [2] *Havelka B.*: Geometrická optika II, ČSAV Praha 1956.
- [3] *Maréchal et Françon*: Diffraction structure des images, Paris 1960.
- [4] *Hopkins H. H.*: The frequency response of a defocused optical system. Proc. Roy. Soc. 231, 1955.
- [5] *Linfoot E. H.*: Qualitätsbewertung optischer Bilder. Verfahrens- und Messkunde der Naturwissenschaft. Braunschweig 1960.
- [6] *Keprt J.*: The response function of an optical system in the presence of a filter with non-constant release. Physics Letters 18, number 1, 1965.

Резюме

Некоторые явные виды оптической функции переноса

ИРЖИ КЕПРТ

Работа содержит уже раньше опубликованные результаты вычисления функций переноса вместе с результатами собственного наблюдения. Приводятся только те случаи и ограничения, которые ведут к искомым эксплицитным выражениям.

Для идеальной симметрической системы, которая обременена только aberrацией дефокусировки, можно вывести эксплицированную форму функции переноса, приводимую отношением (40), у которого λ является длиной волны, численной диафрагмой системы, ϱ пространственной частотой, x_0 расстоянием между фокусом и плоскостью изображения. Из таблицы 2 виден ход функции на отдельных дефокусировках, которые приведены в кратном λc^2 . Для $a = 0$ (это обозначает изображение в параксиальной плоскости) действительно известно отношение (33). Для больших расстояний ($x_0 < 16\lambda c^2$) можно оставить дифракцию света и функция переноса задана простым аналитическим выражением.

Физически отличная оптическая система с прямоугольным зрачком, применяемая в спектроскопии, характеризуется уравнением (44). Функцию переноса для отдельных дефокусировок можно вычислять по приложению

таблицы $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$. В самой благоприятной фокальной плоскости опять $a = 0$ и функцией переноса прямая задана отношением (45).

Во время изучения изображения оптической системой, зрачок которой находится в форме кругового кольца, мы ограничимся только исчислением функции переноса в параксиальной плоскости изображения, потому что только таким образом можно получить результаты в эксплицинтной форме. Но тоже при этих ограничениях является данное изучение очень полезным, потому что из результатов видна зависимость контраста от радиуса задиафрагмирования a .

Ход контраста выражают эксплицитно уравнения (46), (47), (48), (49), предполагая, что действительны отношения (50), (51), (52), (53), (54). На картине 12 видно, что увеличением центрального задиафрагмирования значительно уменьшается контраст у низких частот, но, наоборот, улучшается различие деталей.

Последняя глава изучает зависимость контраста в параксиальной плоскости от коэффициента пропускания β в случае кругового зрачка и прямоугольного зрачка.

В обоих случаях является функцией пропускания $K(v, \omega)$ парабола, заданная выражением (65) у кругового зрачка и (68) у прямоугольного зрачка. Выражение, которое определяет эксплицитно функцию переноса кругового зрачка, определено уравнением (67), для прямоугольного зрачка выведено более простое отношение (70).

Картини 13а, 13б и 14а, 14б показывает ход контраста для отдельных случаев коэффициента пропускания. Для отрицательных коэффициентов показывается тот же эффект, как в случае кругового кольца, что можно было уже заранее ожидать.

Summary

Some explicit expressions of the optical response function

JIRÍ KEPRT

The original study on the frequency response with the results already published are mentioned. Only those cases are considered which lead to the desired analytical expressions of the response function.

The expression (40) is showing the frequency response of a defocused rotation symmetrical optical system, where λ is wavelength of the used light, c the screen number, ρ the spatial frequency and x_0 the defocusion of the image plane. Table 2 is showing the frequency response for single defocutions which are given as the multiplications of the expression λc^2 . In case $a = 0$, that means the form of the image in the paraxial plane, then we can obtain the known expression (33). For larger distances ($x_0 > 16\lambda c^2$) the diffraction of light may be neglected and the response function is then determined by single analytical formula (42).

The image formation of a line structure an defocused optical system provided with rectangular aperture, used in the theory of the spectrograph, is given by the equation (44). The frequency response for single defects of focus may be simple

calculated by function $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ which is tabeled. In the best image plane is again $a = 0$ and transmission function is the line given by expression (45).

The aberration free optical system provided with the ring aperture is considered by the form of the image in the true focal plane, because only for this case we obtain desired explicit expressions. Nevertheless for this restriction is study very usefull because we can see the dependence of the contrast to the radius of the screen a .

The course of contrast is described analytically by equations (46), (47), (48), (49), provided validity of the expressions (50), (51), (52), (53), (54). From figure 12 we can see that the increasing of the screen brings the decrease of the contrast for low frequencies but the contrast and the distinction of fine details is better.

The dependence of the contrast to the coefficient of transparency β is being studied in the last chapter, again for the aberrations free optical system.

Both for the circular and for the rectangular aperture the release function $K(v, w)$ is a parabola given by expressions (65) and (68). The response function of the circular pupil is determined by equation (67), that one for the rectangular aperture by more simple equation (70). Figures 13a, 13b and 14a, 14b are showing the course of contrast for single coefficients of transparency β . In case of negative coefficients we can see the similar effect as for the ring aperture, how it could be expected in advance.