Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Stanislav Trávníček

Poznámky o charakteristické rovnici jisté transformace

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 7 (1966), No. 1, 97--108

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/119862

1966 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS.
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 21.

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: z. prof. RNDr. et CSc. Miroslav Laitoch

POZNÁMKY O CHARAKTERISTICKÉ ROVNICI JISTÉ TRANSFORMACE

STANISLAV TRÁVNÍČEK

(Došlo dne 28. dubna 1965)

V této práci jde o ty transformace řešení soustavy diferenciálních rovnic na řešení téže soustavy, které byly studovány v [1]. Nejprve je odvozen vztah mezi počátečními hodnotami K_0, Z_0 a maticí A transformace. Odvozená charakteristická rovnice se podrobněji zkoumá v případě $n = 2$ [2], kdy se vyšetřuje vliv počátečních hodnot K_0, Z_0 na kvalitu kořenů (typ řešení) charakteristické rovnice. Je též probrán zvláštní případ $\beta(t) \equiv 0$, čímž jsou řešeny problémy vzniklé v [3].

1. Uvažujeme soustavu lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu

$$y' = M(t)\, y, \tag{a_n}$$

kde

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \qquad M(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Předpokládáme, že funkce $a_{ik}(t)$ $(i, k = 1, 2, \dots, n)$ jsou spojité v intervalu j a že je v tomto intervalu definováno řešení $u(t)$ počátečními podmínkami $u(t_0) = u_0$, kde $t_0 \in j$ a u_0 je n-tice čísel u_{i0} $(i = 1, 2, \dots, n)$. Nechť $Z_0 \in j$, funkce $Z(t)$ zobrazuje interval $i \subset j$ na interval $I \subset j$ a daný vnitřní bod $t_0 \in i$ na vnitřní bod $Z_0 \in I$, $Z'(t)$ je spojitá v i. Označme

$$K(t) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(t) & \dots & \alpha_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1}(t) & \dots & \alpha_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad K_0 = \begin{pmatrix} \alpha^0_{11} & \dots & \alpha^0_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha^0_{n1} & \dots & \alpha^0_{nn} \end{pmatrix}.$$

V [1] je definována transformace $\boldsymbol{A}$ řešení $u(t)$ soustavy (a_n) na řešení $u\boldsymbol{A}$ téže soustavy ve tvaru

$$u\boldsymbol{A} = K(t)\, u[Z(t)] \tag{1}$$

s počátečními podmínkami

$$(u\boldsymbol{A})_{t=t_0} = K_0 u_0, \tag{1*}$$

kde $K(t)$ spolu s funkcí $Z(t)$ hoví rovnici

$$K'(t) = M(t)\,K(t) - K(t)\,M[Z(t)]\,Z'(t). \tag{2}$$

Transformace $\boldsymbol{A}$ je lineární a za předpokladu $|K(t)| \neq 0$ je regulární.

Nechť $u^{(i)}(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tvoří fundamentální soustavu řešení soustavy (a_n). Každé řešení soustavy (a_n) lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i u^{(i)}(t),$$

kde c_i jsou vhodné konstanty. Pak rovněž

$$u^{(i)}(t)\,\boldsymbol{A} = \sum_{k=1}^{n} r_{ik} u^{(k)}(t), \tag{3}$$

kde r_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ jsou vhodné konstanty. Matice $A = (r_{ik})$ je maticí transformace $\boldsymbol{A}$ vzhledem k fundamentální soustavě řešení $u^{(i)}(t)$ a ježto je $\boldsymbol{A}$ regulární, platí $|A| \neq 0$. Označme

$$\omega(t) = \begin{pmatrix} u_1^{(1)}(t) & \ldots & u_1^{(n)}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_n^{(1)}(t) & \ldots & u_n^{(n)}(t) \end{pmatrix},$$

podobně $\overline{\omega}(t)$ označme matici transformovaných řešení. Rovnice (3) (pro $i = 1, 2, \ldots, n$) lze zapsat v maticovém tvaru

$$\overline{\omega}(t) = \omega(t)\,A^T, \tag{4}$$

kde A^T je transponovaná matice k matici A. Jestliže rovnici (1) použijeme postupně na všechna řešení $u^{(i)}(t)$, dostaneme

$$\overline{\omega}(t) = K(t)\,\omega[Z(t)] \tag{5}$$

(viz též [1], lemma 5). Z rovnic (4) a (5) máme

$$A^T = \omega^{-1}(t)\,K(t)\,\omega[Z(t)]. \tag{6}$$

Pro determinanty pak platí

$$|A| = |A^T| = |\omega^{-1}(t)|\,|K(t)|\,|\omega[Z(t)]|,$$

tj.

$$|A| = \frac{|\omega\,Z[(t)]|}{|\omega(t)|}\,|K(t)|. \tag{7}$$

Věta 1. *Jestliže v soustavě (a_n) platí $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t) = 0$ pro všechna $t \in j$, pak pro libovolnou transformaci tvaru* (1) *platí $|A| = |K_0|$.*

Důkaz: Podle Jacobiho vzorce platí $|\omega[Z(t)]| = |\omega(t)|$ $(\neq 0)$ a podle [1], poznámky 2, platí $|K(t)| = |K(t_0)|$ $(= |K_0|)$. Po dosazení do (7) dostáváme tvrzení věty.

Poznámka 1. Z rovnosti (6) dostáváme pro $t = t_0$

$$A^T = \omega^{-1}(t_0)\, K_0\, \omega(Z_0), \tag{8}$$

odkud je zřejmý způsob závislosti A na počátečních hodnotách K_0, Z_0. Vidíme, že pro $\omega(Z_0) = \omega(t_0)$ jsou matice A^T, K_0 podobné.

Zkoumejme existenci normálních řešení $U^{(i)}(t)$, tj. řešení, pro něž

$$U^{(i)}(t)\ \mathbf{A} = s_i U^{(i)}(t). \tag{9}$$

Nechť

$$U^{(i)}(t) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} u^{(j)}(t), \tag{10}$$

kde β_{ij} jsou zatím neznámé konstanty ($j = 1, 2, \ldots, n$). Z (10) a (3) máme

$$U^{(i)}\ \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} u^{(j)}(t)\ \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \beta_{ij} r_{jk} u^{(k)}(t),$$

a podle (9), (10) je

$$U^{(i)}\mathbf{A} = s_i \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} u^{(k)}(t).$$

Po porovnání pravých stran máme

$$\sum_{k=1}^{n} u^{(k)}(t) \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} r_{jk} - s_i \beta_{ik}\right) = 0.$$

Ježto $u^{(k)}(t)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) jsou řešení lineárně nezávislá, musí $\beta_i(s = 1, 2, \ldots, n)$ hovět soustavě homogenních algebraických rovnic

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} r_{jk} - s_i \beta_{ik} = 0 \tag{11}$$

($k = 1, 2, \ldots, n$). Netriviální řešení této soustavy tedy dostáváme, je-li s_i kořenem charakteristické rovnice transformace $\mathbf{A}$

$$| A - sE | = 0, \tag{12}$$

kde E je jednotková matice. Absolutní člen této rovnice je $| A |$, tj. v případě popsaném větou 1 je absolutní člen $| K_0 |$.

2. Uvažujme případ $n = 2$ studovaný v [2]. Zůstaneme při označení tam zavedeném, tedy $a_{11}(t) = a_{22}(t) = 0$, $a_{12}(t) = b(t)$, $a_{21}(t) = c(t)$ (a tuto soustavu označíme (a_2')), $\alpha_{11}(t) = \alpha(t)$, $\alpha_{12}(t) = \beta(t)$, $\alpha_{21}(t) = \gamma(t)$, $\alpha_{22}(t) = \delta(t)$,

$$K_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix}.$$

Charakteristická rovnice (12) má v tomto případě tvar

$$s^2 - spA \, . \, s + | A | = 0. \tag{s}$$

Ke studiu této rovnice použijeme pomocné fundamentální soustavy $u(t)$, $v(t)$ řešení soustavy (a_2'), kde

$$u(t_0) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad v(t_0) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Z (3) plyne

$$\left.\begin{aligned} u\boldsymbol{A} &= r_{11}u + r_{12}v \\ v\boldsymbol{A} &= r_{21}u + r_{22}v \end{aligned}\right\}. \tag{14}$$

Položíme-li tu $t = t_0$, pak podle (1), (13) máme

$$\left.\begin{aligned} r_{11} &= \alpha_0 u_1(Z_0) + \beta_0 u_2(Z_0) \\ r_{12} &= \gamma_0 u_1(Z_0) + \delta_0 u_2(Z_0) \\ r_{21} &= \alpha_0 v_1(Z_0) + \beta_0 v_2(Z_0) \\ r_{22} &= \gamma_0 v_1(Z_0) + \delta_0 v_2(Z_0) \end{aligned}\right\}. \tag{15}$$

Podle (15) a věty 1 je diskriminant D rovnice (s) roven

$$D = [\alpha_0 u_1(Z_0) + \beta_0 u_2(Z_0) + \gamma_0 v_1(Z_0) + \delta_0 v_2(Z_0)]^2 - 4\,|\,K_0\,|. \tag{D}$$

Lemma 1. *Při transformaci tvaru* (1) *lze v každé soustavě* (a_2') *dosáhnout vhodnou volbou počátečních hodnot* K_0, Z_0 *toho, že odpovídající charakteristická rovnice* (s) *transformace má kořeny těchto typů: a) dva reálné různé, b) jeden dvojnásobný, c) imaginární sdružené.*

Důkaz: Diskriminant D je kvadratická forma vzhledem k α_0, β_0, γ_0, δ_0. Matice koeficientů je (vynecháváme pro stručnost argumenty Z_0)

$$M_4 = \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & u_1v_1 & u_1v_2 - 2 \\ u_1u_2 & u_2^2 & u_2v_1 + 2 & u_2v_2 \\ u_1v_1 & u_2v_1 + 2 & v_1^2 & v_1v_2 \\ u_1v_2 - 2 & u_2v_2 & v_1v_2 & v_2^2 \end{pmatrix}.$$

Nechť Z_0 není nulovým bodem funkce $u_1(t)$, tj. $u_1(Z_0) \neq 0$ (případ $u_1(Z_0) = 0$ bude ještě probrán později). Platí

$$|\,M_1\,| = u_1^2(Z_0) > 0$$

$$|\,M_3\,| = \begin{vmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & u_1v_1 \\ u_1u_2 & u_2^2 & u_2v_1 + 2 \\ u_1v_1 & u_2v_1 + 2 & v_1^2 \end{vmatrix} = -4u_1^2(Z_0) < 0.$$

Podle Sylvestrovy věty lze tak pro vhodné hodnoty α_0, β_0, γ_0, δ_0 dosáhnout toho, že *a)* $D > 0$, *b)* $D = 0$, *c)* $D < 0$, c. b. d.

Lemma 2. *Forma D má hodnost rovnu třem a signaturu rovnu jedné.*

Důkaz: Předně lehce zjistíme, že $|\,M_4\,| = 0$. Platí-li $u_1(Z_0) \neq 0$, je $|\,M_3\,| \neq 0$; jinak je nutně $u_2(Z_0) \neq 0$ a pak determinant, který vznikne z M_4 vyškrtnutím 3. řádku a sloupce, je roven $-4u_2^2(Z_0) \neq 0$.

Druhá část tvrzení lemmatu plyne z kanonického tvaru D:

a) Nechť $u_2(Z_0)v_1(Z_0) \neq 0$, $\varepsilon = \operatorname{sgn} u_2(Z_0)v_1(Z_0)$. Pro $\varepsilon = 1$ je splněno a pro $\varepsilon = -1$ předpokládejme $u_1(Z_0) \neq 0$. Pak

$$D = X^2 + \varepsilon Y^2 - \varepsilon Z^2, \tag{16}$$

kde (opět vynecháváme argument Z_0)

$$X = \alpha_0 u_1 + \beta_0 u_2 + \gamma_0 v_1 + \left(v_2 - \frac{2}{u_1}\right)\delta_0,$$

$$Y = \delta_0 \frac{2}{u_1}\sqrt{|u_2 v_1|} + \varepsilon\beta_0 \frac{u_2}{\sqrt{|u_2 v_1|}} + \varepsilon\gamma_0 \frac{v_1}{\sqrt{|u_2 v_1|}},$$

$$Z = \beta_0 \frac{u_2}{\sqrt{|u_2 v_1|}} - \varepsilon\gamma_0 \frac{v_1}{\sqrt{|u_2 v_1|}}.$$

b) Nechť $u_1(Z_0) = 0$, pak $u_2(Z_0)\, v_1(Z_0) = -1$ a platí

$$D = X^2 - Y^2 + Z^2, \tag{17}$$

kde

$$X = \beta_0 u_2 - \gamma_0 v_1 + \delta_0 v_2,$$
$$Y = \alpha_0 + \delta_0 - \gamma_0 v_1 v_2,$$
$$Z = \alpha_0 - \delta_0 - \gamma_0 v_1 v_2.$$

c) Nechť $u_2(Z_0)\, v_1(Z_0) = 0$, tj. $u_1(Z_0)\, v_2(Z_0) = 1$. Pak

$$D = X^2 + Y^2 - Z^2, \tag{18}$$

kde

$$X = \alpha_0 u_1 + \beta_0 u_2 + \gamma_0 v_1 - \delta_0 v_2,$$
$$Y = \beta_0 + \gamma_0 + \delta_0 v_2(u_2 + v_1),$$
$$Z = \beta_0 - \gamma_0 - \delta_0 v_2(u_2 - v_1),$$

a kde ovšem $u_2(Z_0) = 0$ nebo $v_1(Z_0) = 0$.

Lemma 3. *Pro libovolné Z_0 lze vhodnou volbou hodnot α_0, β_0, γ_0, δ_0 dostat libovolný typ řešení rovnice (s).*

Důkaz: Jestliže Z_0 není kořenem funkce $u_1(t)$, pak tvrzení plyne z lemmatu 1. Je-li $u_1(Z_0) = 0$, pak tvrzení plyne z lemmatu 2, případ *b*.

Poznámka 2. Kanonických tvarů (16), (17), (18) lze použít jak k formulaci vět o typu řešení rovnice (*s*) (o existenci normálních řešení), tak i k explicitnímu vyjádření kořenů této rovnice prostřednictvím pomocné fundamentální soustavy.

Uveďme si příklad takové věty.

Věta 2. *Nechť Z_0 je nulovým bodem funkcí $u_2(t)$, $v_1(t)$ (tj. např. $Z_0 = t_0$), a nechť $\beta_0 = 0$ nebo $\gamma_0 = 0$. Pak v případě, že*

$$\frac{\alpha_0}{\delta_0} \neq v_2^2(Z_0)$$

existují dvě lineárně nezávislá normální řešení U, V, pro něž platí $U\mathbf{A} = s_1 U$, $V\mathbf{A} = s_2 V$, kde $s_1 = \alpha_0 u_1(Z_0)$, $s_2 = \delta_0 v_2(Z_0)$, a všechna další normální řešení jsou konstantním násobkem jednoho z uvedených. Je-li

$$\frac{\alpha_0}{\delta_0} = v_2^2(Z_0),$$

pak pro $\beta^2 + \gamma^2 \neq 0$ existuje normální řešení U, pro něž platí $U\mathbf{A} = s_0 U$, kde $s_0 = \alpha_0 u_1(Z_0)$, a všechna další normální řešení jsou jeho konstantním násobkem, a pro $\beta_0 = \gamma_0 = 0$ platí $y\mathbf{A} = s_0 y$ pro všechna řešení y soustavy (a_2'), tj. všechna řešení jsou normální.

Důkaz: Platí $r_{11} = \alpha_0 u_1(Z_0)$, $r_{12} = \gamma_0 u_1(Z_0)$, $r_{21} = \beta_0 v_2(Z_0)$, $r_{22} = \delta_0 v_2(Z_0)$. Charakteristická rovnice

$$s^2 - [\alpha_0 u_1(Z_0) + \delta_0 v_2(Z_0)]\, s + \alpha_0 \delta_0 = 0$$

má kořeny

$$s_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\alpha_0 u_1(Z_0) + \delta_0 v_2(Z_0) \pm \sqrt{[\alpha_0 u_1(Z_0) - \delta_0 v_2(Z_0)]^2}\right]. \tag{19}$$

Nechť nejprve $\frac{\alpha_0}{\delta_0} \neq v_2^2(Z_0)$, tedy $\alpha_0 u_1(Z_0) \neq \delta_0 v_2(Z_0)$. Pak z (19) plyne $s_1 = \alpha_0 u_1(Z_0)$, $s_2 = \delta_0 v_2(Z_0)$, odkud vyplývá první část tvrzení (neboť víme, že normální řešení příslušná k různým kořenům charakteristické rovnice jsou lineárně nezávislá). Je-li $\frac{\alpha_0}{\delta_0} = v_2^2(Z_0)$, tedy $\alpha_0 u_1(Z_0) = \delta_0 v_2(Z_0)$, pak existuje dvojnásobný kořen s_0 rovnice (s), který je podle (19) roven $s_0 = \alpha_0 u_1(Z_0)$. Pro $\beta_0^2 + \gamma_0^2 \neq 0$ je hodnost h matice $A - s_0 E$ rovna jedné, pro $\beta_0 = \gamma_0 = 0$ je $h = 0$. Ježto hodnost h je zřejmě pro všechny podobné matice A táž, plynou zbývající tvrzení z Jordanova tvaru této matice.

Věta 3. *Nechť pro počáteční hodnoty K_0 transformace $\mathbf{A}$ platí $|K_0| < 0$. Pak charakteristická rovnice (s) této transformace má dva reálné různé kořeny.*

Důkaz plyne ihned z rovnice (D).

Poznámka 3. Vztah mezi počátečními hodnotami α_0, β_0, γ_0, δ_0 a hodnotou Z_0 (vzhledem k typu řešení rovnice (s)) máme vyjádřen lemmatem 3. Věta 3 ukazuje, že tento vztah nelze obrátit, tj. že existují hodnoty α_0, β_0, γ_0, δ_0, jimiž už je dán typ řešení rovnice (s) nezávisle na hodnotě Z_0.

Vztahy mezi K_0 a Z_0 ilustrujme na následujícím příkladě.

Příklad: Uvažujme soustavu (a), kde

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální systém řešení

$$u = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

splňuje pro $t_0 = 0$ podmínky (13). Nechť $Z(t) = kt + q$ (tedy $Z_0 = q$). Pak soustava (2) má tvar

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \quad k\beta + \gamma \\ \beta' &= -k\alpha \quad + \delta \\ \gamma' &= -\alpha \quad + k\delta \\ \delta' &= \quad -\beta - k\gamma \end{aligned}\right\}. \tag{b}$$

Soustava (*b*) má fundamentální systém řešení

$$\begin{array}{ll} \alpha_1(t) = \sin (k + 1)\, t, & \beta_1(t) = \cos (k + 1)\, t, \\ \alpha_2(t) = -\cos (k + 1)\, t, & \beta_2(t) = \sin (k + 1)\, t, \\ \alpha_3(t) = \sin (k - 1)\, t, & \beta_3(t) = \cos (k - 1)\, t, \\ \alpha_4(t) = \cos (k - 1)\, t, & \beta_4(t) = -\sin (k - 1)\, t, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \gamma_1(t) = \cos (k + 1)\, t, & \delta_1(t) = -\sin (k + 1)\, t, \\ \gamma_2(t) = \sin (k + 1)\, t, & \delta_2(t) = \cos (k + 1)\, t, \\ \gamma_3(t) = -\cos (k - 1)\, t, & \delta_3(t) = \sin (k - 1)\, t, \\ \gamma_4(t) = \sin (k - 1)\, t, & \delta_4(t) = \cos (k - 1)\, t. \end{array}$$

Transformaci tvaru (1), kde

$$K_i(t) = \begin{pmatrix} \alpha_i(t) & \beta_i(t) \\ \gamma_i(t) & \delta_i(t) \end{pmatrix},$$

$i = 1, 2, 3, 4$, nazveme $\boldsymbol{A}_i$.

1. Transformace $\boldsymbol{A}_1$:

$$\begin{aligned} u\boldsymbol{A}_1 &= -u \sin q + v \cos q, \\ v\boldsymbol{A}_1 &= u \cos q + v \sin q, \end{aligned}$$

tedy $r_{22} = -r_{11} = \sin q$, $r_{12} = r_{21} = \cos q$; charakteristická rovnice je

$$s^2 - 1 = 0. \tag{s'}$$

Normální řešení příslušná ke kořenům $s_{1,2} = \pm 1$ lze zapsat ve tvaru

$$U = \begin{pmatrix} \sin t + \cos (t - q) \\ \cos t - \sin (t - q) \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} \sin t - \cos (t - q) \\ \cos t + \sin (t - q) \end{pmatrix}.$$

2. Transformace $\boldsymbol{A}_2$:

$$\begin{aligned} u\boldsymbol{A}_2 &= -u \cos q - v \sin q, \\ v\boldsymbol{A}_2 &= -u \sin q + v \cos q, \end{aligned}$$

takže $r_{22} = -r_{11} = \cos q$, $r_{12} = r_{21} = -\sin q$; charakteristická rovnice je (s'). Normální řešení příslušná ke kořenům $s_{1,2} = \pm 1$ lze zapsat ve tvaru

$$U = \begin{pmatrix} \sin t + \sin (t - q) \\ \cos t + \cos (t - q) \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} \sin t - \sin (t - q) \\ \cos t - \cos (t - q) \end{pmatrix}.$$

3. Transformace $\boldsymbol{A}_3$:

$$u\boldsymbol{A}_3 = -u \sin q - v \cos q,$$
$$v\boldsymbol{A}_3 = u \cos q - v \sin q,$$

takže $r_{11} = r_{22} = -\sin q$, $r_{21} = -r_{12} = \cos q$; charakteristická rovnice je

$$s^2 + 2s \sin q + 1 = 0, \tag{s''}$$

$D = \sin^2 q - 1$, tedy rovnice (s'') má pro $q = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$ (m je libovolné celé číslo) dvojnásobný kořen, pro $q \neq (2m + 1)\frac{\pi}{2}$ imaginární kořeny. Pro

a) $q = (4m + 1)\frac{\pi}{2}$ je $s_{1,2} = -1$,

b) $q = (4m - 1)\frac{\pi}{2}$ je $s_{1,2} = 1$.

V obou případech je $r_{12} = r_{21} = 0$, $r_{11} = r_{22} = s_{1,2}$. Matice transformace mají diagonální tvar, tj. každé řešení soustavy (a) je normální. Transformací $\boldsymbol{A}_3$ tedy každé řešení v případě *a)* přejde v opačné, v případě *b)* je invariantní. Je-li $q \neq (2m + 1)\frac{\pi}{2}$, je $D < 0$ a $s_{1,2} = -\sin q \pm i \cos q$. Normální řešení v komplexním oboru jsou $U = ui - v$, $V = ui + v$.

4. Transformace $\boldsymbol{A}_4$:

$$u\boldsymbol{A}_4 = u \cos q - v \sin q,$$
$$v\boldsymbol{A}_4 = u \sin q + v \cos q,$$

takže $r_{11} = r_{22} = \cos q$, $r_{21} = -r_{12} = \sin q$; charakteristická rovnice je

$$s^2 - 2s \cos q + 1 = 0, \tag{s'''}$$

$D = \cos^2 q - 1$. Podobně jako v případě 3. dostáváme dvojnásobný kořen 1 nebo -1 pro $q = m\pi$, a pro $q \neq m\pi$ imaginární kořeny $s_{1,2} = \cos q \pm i \sin q$. Normální řešení v komplexním oboru jsou $U = ui - v$, $V = ui + v$.

V případech 1 až 4 jsou $\boldsymbol{A}_i$ transformace odpovídající uvedeným partikulárním řešením soustavy (b). Jestliže počáteční hodnoty K_0 transformace $\boldsymbol{A}$ jsou α_0, β_0, γ_0, δ_0, pak zřejmě

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{4} c_i \boldsymbol{A}_i,$$

kde $c_1 = \frac{1}{2}(\beta_0 + \gamma_0)$, $c_2 = \frac{1}{2}(\delta_0 - \alpha_0)$, $c_3 = \frac{1}{2}(\beta_0 - \gamma_0)$, $c_4 = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \delta_0)$.

5. Nechť $\boldsymbol{A}_5$ je transformace s počátečními hodnotami $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$, $\gamma_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$, $\delta_0 = 0$. Pak zřejmě $\boldsymbol{A}_5 = \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_3$, $r_{11} = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)\sin q$,

$r_{12} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) \cos q$, $r_{21} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) \cos q$, $r_{22} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) \sin q$; charakteristická rovnice je

$$s^2 + 2s \sin q + \frac{1}{4} = 0$$

a její diskriminant $D = \sin^2 q - \frac{1}{4}$. Je-li $q = (6m + 1) \frac{\pi}{6}$ nebo $q = (6m - 1) \frac{\pi}{6}$, pak $D = 0$.

a) Pro $q = (12\,m + 1) \frac{\pi}{6}$ a pro $q = (12\,m + 5) \frac{\pi}{6}$ je $\sin q = \frac{1}{2}$, tj. $s_{1,2} = -\frac{1}{2}$;

b) pro $q = (12m - 5) \frac{\pi}{6}$ a pro $q = (12m - 1) \frac{\pi}{6}$ je $\sin q = -\frac{1}{2}$, tj. $s_{1,2} = \frac{1}{2}$;

c) pro $(6m + 1) \frac{\pi}{6} < q < (6m + 5) \frac{\pi}{6}$ má charakteristická rovnice dva reálné různé kořeny;

d) pro $(6m - 1) \frac{\pi}{6} < q < (6m + 1) \frac{\pi}{6}$ má charakteristická rovnice imaginární kořeny.

Poznámka 4. Vztah mezi K_0 a Z_0 (vzhledem k typu řešení rovnice (s)) uvedený v poznámce 3 lze na základě poznatků z tohoto příkladu doplnit takto: existují takové transformace soustav, že při daných hodnotách α_0, β_0, γ_0, δ_0 závisí typ řešení charakteristické rovnice na hodnotě Z_0.

3. Zabývejme se nyní speciální transformací, kde $\beta(t) \equiv 0$. Podle [2] jsou za předpokladů 2° prvky $K(t)$ dány vzorci 2°', kde $Z(t)$ je řešením diferenciální rovnice $(b_{1,1})$ daným počátečními podmínkami $Z(t_0) = Z_0$, $Z'(t_0) = Z_0' (\neq 0)$, $Z''(t_0) = Z_0''$ (je tu ovšem $T = t$, $B(T) \equiv b(t)$, $C(T) \equiv c(t)$). Platí tedy

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= M \sqrt{\frac{b(t_0)}{b(Z_0)}} \frac{1}{\sqrt{|Z_0'|}}, \quad (\beta_0 = 0), \\ \gamma_0 &= \frac{M}{2b(t_0)} \left[\frac{b'(t_0)}{b(t_0)} - \frac{b'(Z_0)}{b(Z_0)} Z_0' - \frac{Z_0''}{Z_0'} \right] \sqrt{\frac{b(t_0)}{b(Z_0)}} \frac{1}{\sqrt{|Z_0'|}}, \\ \delta_0 &= M \sqrt{\frac{b(Z_0)}{b(t_0)}} \sqrt{|Z_0'|} \operatorname{sgn} Z_0' \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Danými hodnotami Z_0, Z_0', Z_0'', M jsou tak určeny hodnoty α_0, γ_0, δ_0.

Lemma 4. *Danými hodnotami* α_0, γ_0, δ_0, Z_0 *jsou určeny hodnoty* Z_0', Z_0'', M *tak, že hoví rovnicím* (20).

Důkaz: Najdeme vyjádření těchto hodnot pomocí daných. Z první a třetí rovnice (20) máme

$$\frac{\delta_0}{\alpha_0} = \frac{b(Z_0)}{b(t_0)} \mid Z_0' \mid \operatorname{sgn} Z_0',$$

odkud

$$Z_0' = \frac{b(t_0)}{b(Z_0)} \frac{\delta_0}{\alpha_0}, \tag{21}$$

$$\operatorname{sgn} Z_0' = \operatorname{sgn} \alpha_0\delta_0. \tag{22}$$

Dosazením (21) do první rovnice (20) dostáváme $\alpha_0 = M \sqrt{\left|\frac{\alpha_0}{\delta_0}\right|}$, odkud

$$M = \sqrt{\mid \alpha_0\delta_0 \mid} \operatorname{sgn} \alpha_0. \tag{23}$$

Dosazením se přesvědčíme, že Z_0', M dané rovnicemi (21), (23) hoví první a třetí rovnici (20) (uvážíme též (22)). Z druhé rovnice (20) pak máme

$$Z_0'' = \frac{b(t_0)}{b(Z_0)} \frac{\delta_0}{\alpha_0} \left[\frac{b'(t_0)}{b(t_0)} - \frac{b'(Z_0)\, b(t_0)}{b^2(Z_0)} \frac{\delta_0}{\alpha_0} - \frac{2b(t_0)\,\gamma_0}{\alpha_0} \right] \tag{24}$$

(ježto nám jde o regulární transformace, je $\alpha_0\delta_0 \neq 0$). Dosazením se přesvědčíme, že i druhá rovnice (20) je splněna.

Lemma 5. *Diskriminant D má* ($\beta_0 = 0$) *signaturu rovnu jedné a hodnost pro* $v_1(Z_0) \neq 0$ *rovnu třem, pro* $v_1(Z_0) = 0$ *rovnu jedné.*

Důkaz: Matice koeficientů formy D je

$$\overline{M}_3 = \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1v_1 & u_1v_2 - 2 \\ u_1v_1 & v_1^2 & v_1v_2 \\ u_1v_2 - 2 & v_1v_2 & v_2^2 \end{pmatrix}.$$

Platí $\mid \overline{M}_3 \mid = -4v_1^2$, takže pro $v_1(Z_0) \neq 0$ je hodnost $\overline{M}_3$ rovna 3. Je-li $v_1(Z_0) = 0$, vidíme, že $\mid \overline{M}_3 \mid$ a rovněž všechny dvojřadé subdeterminanty $\overline{M}_3$ jsou rovny nule, tedy hodnost $\overline{M}_3$ je rovna jedné $[u_1(Z_0) \neq 0]$. Tvrzení o signatuře plyne z lemmatu 2, neboť případy *a)*, *b)* a *c)* pro $v_1(Z_0) \neq 0$ jsou tytéž a pro $v_1(Z_0) = 0$ je $D = X^2$, c. b. d.

Lemma 6. *Pro libovolné* Z_0, *které není kořenem funkce* $v_1(t)$ *lze vhodnou volbou* Z_0', Z_0'' *dostat libovolný typ řešení rovnice* (*s*).

Důkaz: Nechť Z_0 je libovolné pevné číslo, pro něž $v_1(Z_0) \neq 0$. Z lemmatu 5 plyne, že pro vhodné hodnoty α_0, γ_0, δ_0 lze dostat libovolný typ řešení rovnice (*s*). Podle lemmatu 4 jsou těmito hodnotami určeny Z_0', Z_0'', M tak, že z nich pomocí rovnic (20) opět dostaneme původní α_0, γ_0, δ_0. Ježto typ řešení zřejmě nezávisí na M, je lemma dokázáno.

Na základě lemmatu 6 platí poznámka 2 i v našem případě $\beta(t) \equiv 0$. Uveďme příklad věty, o jaké jde v této poznámce.

V ě t a 4. *Nechť* Z_0 *je nulovým bodem funkce* $v_1(t)$ *(tj. např.* $Z_0 = t_0$*). Pak pro* $Z_0' \neq \frac{b(t_0)}{b(Z_0)} u_1^2(Z_0)$ *existují dvě lineárně nezávislá normální řešení* U, V, *pro něž platí* $U\mathbf{A} = s_1 U$, $V\mathbf{A} = s_2 V$, *kde* $s_1 = M \sqrt{\frac{b(t_0)}{b(Z_0)}} \frac{u_1(Z_0)}{\sqrt{|Z_0'|}}$, $s_2 = M \sqrt{\frac{b(Z_0)}{b(t_0)}} \sqrt{|Z_0'|}\, v_2(Z_0) \operatorname{sgn} Z_0'$ *a všechna další normální řešení jsou násobkem jednoho z uvedených. Je-li*

$$Z_0' = \frac{b(t_0)}{b(Z_0)} u_1^2(Z_0), \qquad Z_0'' \neq \frac{b't_0)}{b(Z_0)} u_1^2(Z_0) - \frac{b'(Z_0)\, b^2(t_0)}{b^3(Z_0)} u_1^4(Z_0), \tag{25}$$

pak existuje normální řešení U, *pro něž platí* $U\mathbf{A} = s_0 U$, *kde* $s_0 = M \sqrt{\frac{b(t_0)}{b(Z_0)}} \frac{u_1(Z_0)}{\sqrt{|Z_0'|}}$, *a všechna další normální řešení jsou jeho konstantním násobkem; jestliže ve (25) platí rovnost, pak všechna řešení jsou normální:* $y\mathbf{A} = s_0 y$.

D ů k a z: Lehce zjistíme, že předpoklady této věty lze pomocí vztahů (20) až (24) převést na předpoklady věty 2, odkud pak plyne tvrzení.

V ě t a 5. *Nechť při transformaci* $\mathbf{A}$, *kde* $\beta(t) \equiv 0$, *platí* $Z_0' < 0$. *Pak charakteristická rovnice (s) této transformace má dva reálné různé kořeny.*

D ů k a z: Platí totiž $|K_0| = \alpha_0 \delta_0 = M^2 \operatorname{sgn} Z_0'$ a tvrzení plyne z věty 3.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Травничек, С.:* О преобразованиях решений систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка. „Acta Universitatis Palackianae Olomucensis" F. R. N. т. 18, 1965.

[2] *Травничек, С.:* О преобразованиях решений систем двух линейных дифференциальных уравнений 1-ого порядка. „Acta Universitatis Palackianae Olomucensis" F. R. N. т. 9, 1962.

[3] *Травничек, С.:* Об одном использовании функции Флоке. „Acta Universitatis Palackianae Olomucensis" F. R. N. т. 12, 1963.

РЕЗЮМЕ

ЗАМЕЧАНИЯ О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ НЕКОТОРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

СТАНИСЛАВ ТРАВНИЧЕК

Автор в настоящей работе занимается характеристическим уравнением преобразования решений системы дифференциальных уравнений на решение той же системы [1].

В 1-ой части приводится связь между начальными значениями K_0, Z_0 и матрицей A преобразования. Во 2-ой части изучается зависимость типа решений характеристического уравнения от начальных значений K_0, Z_0. Из этой точки зрения излагается в последней части частный случай $\beta(t) \equiv 0$.