Dalibor Klucký

Elementární případ principu redukce v algebraické geometrii

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 7 (1966), No. 1, 23--32

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/119850

1966 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS.
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 21.

Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: prof. RNDr. Josef Metelka

ELEMENTÁRNÍ PŘÍPAD PRINCIPU REDUKCE V ALGEBRAICKÉ GEOMETRII

DALIBOR KLUCKÝ

(Došlo dne 13. září 1965)

Ve své monografii „Foundations of algebraic geometry" dokazuje A. Weil pomocí teorie formálních potenčních řad větu — kterou budeme nazývat principem redukce:

Věta: *Budiž k těleso,* (x) *soustava nezávislých proměnných nad k,* (y) *soustava algebraických veličin nad* $k(x)$. *Budiž* $(\bar{y})$ *vlastní specialisace soustavy* (y) *kompatibilní k dané konečné specialisaci* $(\bar{x})$ *soustavy* (x) *nad k. Potom má specialisace* $(\bar{y})$ *soustavy* (y) *nad* $(x) \to (\bar{x})$ *vzhledem ke k definovanou násobnost.*

V závěrečných komentářích upozorňuje A. Weil na to, že tzv. elementární případ principu redukce, kdy totiž předpokládáme navíc, že všechny specialisace soustavy (y) kompatibilní k dané konečné specialisaci $(\bar{x})$ soustavy (x) jsou nad $k(\bar{x})$ algebraické, lze dokázat zcela elementárním aparátem a podává k tomu stručný návod. Účelem tohoto článku je kompletní provedení důkazu tohoto elementárního případu principu redukce způsobem A. Weilem naznačeným. Nejprve však zavedeme pojmy a vyslovíme věty, které budeme v dalším potřebovat. Definice těchto pojmů případně znění příslušných vět najde čtenář v [1].

Komutativní těleso $\mathbf{U}$ nazveme univerzálním oborem, má-li $\mathbf{U}$ následující vlastnosti:

a) Je-li $\mathbf{u}$ prvotěleso tělesa $\mathbf{U}$, má $\mathbf{U}$ nad $\mathbf{u}$ nekonečný stupeň transcendence.

b) $\mathbf{U}$ je algebraicky uzavřené.

V tomto článku budeme rozumět **tělesem** pouze každé podtěleso univerzálního oboru $\mathbf{U}$, nad nímž má $\mathbf{U}$ nekonečný stupeň transcendence. Prvky universálního oboru nazýváme **veličiny.** Veličiny $x_1, \ldots, x_r$ algebraicky nezávislé nad daným tělesem k nazýváme **nezávisle proměnné nad** k (v případě $r = 1$ jen **proměnná nad** k). **Neurčitými** — označení velkými tiskacími písmeny latinské abecedy — rozumíme neurčité nad $\mathbf{U}$. **Soustavou veličin** nebo — není-li obavy z nedorozumění jen **soustavou** — nazveme jakoukoli konečnou posloupnost veličin. Je-li $(x_1, \ldots, x_r)$ taková soustava, zapíšeme ji též jen (x_i) nebo (x). **Systémem soustav** nebo krátce jen **systémem** nazveme jakoukoli konečnou posloupnost soustav veličin. Je-li $(x^{(1)}), \ldots, (x^{(s)})$, kde $(x^{(i)}) = (x_1^{(i)}, \ldots, x_r^{(i)})$, $i = 1, \ldots, s$ takový systém, zapíšeme jej $(x^{(1)}, \ldots, x^{(s)})$. Učiníme dohodu, že nebudeme činit rozdílů mezi soustavou (x) o jednom členu x a tímto členem — veličinou x.

Nechť je $(y) = (y_1, \ldots, y_m)$ soustava algebraických veličin nad daným tělesem k. O soustavě $(y') = (y'_1, \ldots, y'_m)$ říkáme, že je **k soustavě (y) nad tělesem k konjugována,** existuje-li automorfismus algebraického uzávěru $\bar{k}$ tělesa k nad tělesem k, který převádí každou veličinu y_i ve veličinu y'_i, $i = 1, \ldots, m$.

Systém soustav

$$(y^{(1)}, \ldots, y^{(s)}) \tag{*}$$

nazveme **kompletním systémem soustav konjugovaných k soustavě veličin (y) nad tělesem k,** platí-li

a) (y) je soustava algebraických veličin nad k.

b) Každá soustava $(y^{(i)})$ systému (*) je konjugována k soustavě (y) nad k.

c) Jeli q stupeň neseparabilnosti tělesa $k(y)$ nad k, je každá soustava (y') konjugovaná k soustavě (y) nad k rovna právě q členům systému (*).

Univerzální obor $\mathbf{U}$ rozšiřujeme o další element zvaný **nevlastní veličina** nebo **nekonečno** a označovaný ∞. Pro každou veličinu $x \in \mathbf{U}$ platí: $x \neq \infty$. Sjednocení $\mathbf{U}' = \mathbf{U} \cup (\infty)$ nazveme **zobecněným universálním oborem** jeho prvky **zobecněné veličiny. Reciprokací zobecněného universálního oboru** rozumíme takovou transformaci f množiny $\mathbf{U}'$, pro kterou $f(x) = \frac{1}{x}$, je-li $x \neq 0, \infty$, $f(0) = \infty$, $f(\infty) = 0$. Z toho důvodu klademe $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$.

Je jasné, co rozumíme **soustavou** a **systémem soustav zobecněných veličin.** I v tomto případě, nebude-li nebezpečí z nedorozumění, užíváme též jen termínů **soustava** a **systém soustav.** Označme $\mathbf{U}'(m)$ kartézský součin $\underbrace{\mathbf{U}' \times \ldots \times \mathbf{U}'}_{m\ krát}$ (pro $m = 1$ klademe $\mathbf{U}'(1) = \mathbf{U}'$). Budiž S podmnožina přirozených čísel $(1, \ldots, m)$. **Reciprokací množiny $\mathbf{U}'(m)$ příslušnou k podmnožině S** nazveme takovou transformaci množiny $\mathbf{U}'(m)$, která každé soustavě zobecněných veličin $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{U}'(m)$ přiřazuje soustavu $(y_1, \ldots, y_m)$ $\in \mathbf{U}'(m)$ takovou, že $y_j = x_j$, nepatří-li j do S, $y_j = \frac{1}{x_j}$, patří-li j do S.

Připomeneme nyní pojem specializace soustavy veličin nad daným tělesem. Říkáme, že **soustava veličin $(\bar{x}) = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)$ je specialisací soustavy veličin $(x) = (x_1, \ldots, x_m)$ nad daným tělesem k,** jestliže pro každý polynom $F(X) \in k[X_1, \ldots, X_m]$ platí implikace $F(x) = 0 \Rightarrow F(\bar{x}) = 0$. Zápis: $(x) \to (\bar{x})$ je specializace nad k nebo jen $(x) \to (\bar{x})$ nad k. Říkáme, že **soustava zobecněných veličin $(\bar{x}) \in \mathbf{U}'(m)$** je specializací soustavy $(x) \in \mathbf{U}'(m)$ **nad tělesem k,** existuje-li reciprokace množiny $\mathbf{U}'(m)$, v níž obrazem soustavy (x) je soustava veličin (y), obrazem soustavy $(\bar{x})$ je soustava veličin $(\bar{y})$ a platí $(y) \to (\bar{y})$ nad k. Zápisu: $(x) \to (\bar{x})$ je specializace nad k, resp. $(x) \to (\bar{x})$ nad k užíváme i v případě soustav zobecněných veličin. Je-li x zobecněná veličina, k těleso, pak $x \to \infty$ nad k tehdy a jen tehdy, je-li $\frac{1}{x} \to 0$ nad k.

Jsou-li (x), (y) dvě soustavy zobecněných veličin, k těleso, $(\bar{x})$ specializace soustavy (x) nad tělesem k, pak existuje soustava $(\bar{y})$ zobecněných veličin taková, že $(x, y) \to (\bar{x}, \bar{y})$ nad k. Specializaci $(\bar{x}, \bar{y})$ soustavy (x, y) nad k nazýváme **rozšířením specializace** $(x) \to (\bar{x})$ **nad** k. Říkáme též, že $(\bar{y})$ **je spe-**

cializací soustavy (y) nad $(x) \to (\bar{x})$ vzhledem ke k nebo, že $(\bar{y})$ je specializací soustavy (y) kompatibilní ke specializaci $(x) \to (\bar{x})$ nad k.

O soustavě (x_i) zobecněných veličin říkáme, že je **konečná**, jsou-li všechna $x_i \in \mathbf{U}$. Je-li (x) soustava zobecněných veličin, pak $k(x)$ znameno těleso, které vznikne z tělesa k adjunkcí všech veličin x_j, které jsou členy soustavy (x). **Dimensí soustavy zobecněných veličin** (x) **nad tělesem** k rozumíme stupeň transcendence tělesa $k(x)$ nad tělesem k, označení: $\dim_k (x)$.

Specializace $(\bar{y})$ soustavy (y) kompatibilní ke specializaci $(x) \to (\bar{x})$ nad daným tělesem k se nazývá **isolovaná** neexistuje-li žádná specializace $(\bar{x}, \eta)$ soustavy (x, y) nad k, pro níž by bylo $(\bar{x}, \eta) \to (\bar{x}, \bar{y})$ nad k a $\dim_k (\bar{x}, \eta) > \dim_k (\bar{x}, \bar{y})$. Specializace $(\bar{y})$ soustavy (y) kompatibilní ke specializaci $(x) \to (\bar{x})$ nad k se nazývá **algebraická nad** $k(\bar{x})$, je-li $\dim_{k(\bar{x})} (y) = 0$.

Budiž (x) soustava nezávislých proměnných nad daným tělesem k, (y) soustava algebraických veličin nad $k(x)$. Nechť je $(\bar{x}, \bar{y})$ konečná specializace (tj. $(\bar{x}, \bar{y})$ je konečná soustava) soustavy (x, y) nad tělesem k. Je-li $(\bar{y})$ izolovaná specializace soustavy (y) kompatibilní ke specializaci $(x) \to (\bar{x})$ nad k a algebraická nad $k(\bar{x})$, říkáme, že $(\bar{y})$ je **vlastní specializace** soustavy (y) kompatibilní ke specializaci $(x) \to (\bar{x})$ nad k.

Je-li $(x) \to (\bar{x})$ specializace nad daným tělesem k, (x), $(\bar{x})$ konečné soustavy, y veličina z $k(x)$, $F(X)$ a $G(X)$ polynomy, pro které $y = \dfrac{F(x)}{G(x)}$ a je-li mimo to $G(\bar{x}) \neq 0$, je specializace $\bar{y}$ veličiny y nad $(x) \to (\bar{x})$ vzhledem k určena jednoznačně a platí $\bar{y} = \dfrac{F(\bar{x})}{G(\bar{x})}$.

Nechť je opět (x) soustava nezávislých proměnných nad daným tělesem k, (y) soustava algebraických veličin nad $k(x)$,

$$(y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}) \qquad (+)$$

kompletní systém soustav konjugovaných k soustavě (y) nad $k(x)$. Dále budiž

$$(\bar{y}^{(1)}, \ldots, \bar{y}^{(n)}) \qquad (=)$$

specializace systému $(+)$ kompatibilní k určité konečné specializaci $(\bar{x})$ soustavy (x) nad tělesem k. Konečně budiž $(\bar{y})$ libovolná specializace soustavy (y) kompatibilní ke specializaci $(x) \to (\bar{x})$ nad k. Je-li soustava $(\bar{y})$ rovna μ členům systému $(=)$, pak říkáme, že **soustava** $(\bar{y})$ **má ve specializaci** $(=)$ **násobnost** μ. Má-li soustava $(\bar{y})$ touž násobnost μ ve všech specializacích systému $(+)$ kompatibilních k dané specializaci $(x) \to (\bar{x})$ nad k říkáme, že **násobnost specializace** $(\bar{y})$ **soustavy** (y) **nad** $(x) \to (\bar{x})$ **vzhledem ke** k **je definována a rovna** μ.

V dalším textu se nebudeme na definice a věty uvedené v předchozím stručném přehledu výslovně odvolávat. Východiskem našich úvah bude:

Lemma I. *Budiž k těleso, (x) soustava veličin, y algebraická veličina nad $k(x)$. Dále budiž $(y^{(1)}, \ldots, y^{(n)})$ kompletní systém veličin konjugovaných k y nad $k(x)$, $F(x, Y) = 0$ irreducibilní rovnice pro y nad $k(x)$, $F(X, Y) \in k[X, Y]$. Konečně* *budiž* (x) *konečná specialisace soustavy* (x) *nad* k *taková, že* $F(\bar{x}, Y) \neq 0$, m *stupeň polynomu* $F(\bar{x}, Y)$ *v neurčité* Y *a* $(\bar{y}^{(1)}, \ldots, \bar{y}^{(n)})$ *specializace systému* $(y^{(1)}, \ldots, y^{(n)})$ *kompatibilní k* $(x) \to (\bar{x})$ *nad* k.

Pak se $(\bar{y}^{(1)}, \ldots, \bar{y}^{(n)})$ *skládá jednak ze všech kořenů polynomu* $F(\bar{x}, Y)$, *při čemž se každý kořen opakuje v* $(\bar{y}^{(1)}, \ldots, \bar{y}^{(n)})$ *tolikrát, kolik je jeho násobnost, jednak z* $(n - m)$ *nevlastních veličin* ∞.

Důkaz tohoto lemmatu je proveden v [1] str. 31.

Jelikož nevylučujeme tělesa kladné charakteristiky, zavedeme pojem **kvasikompletního systému soustav konjugovaných k soustavě veličin** (y) **nad daným tělesem** k a pojem **redukované násobnosti.**

Definici **kvasikompletního systému soustav konjugovaných k soustavě veličin** (y) **nad daným tělesem** k obdržíme, nahradíme-li v definici kompletního systému soustav podmínku (c) podmínkou: Je-li (y') soustava konjugovaná k soustavě (y) nad tělesem k, je (y') rovna právě jedné soustavě kvasikompletního systému.

Nahradíme-li v definici násobnosti specializace kompletní systém soustav kvasikompletním systémem soustav obdržíme definici **redukované násobnosti specializace.**

Je zřejmé, že v případě tělesa charakteristiky nula je každý kvasikompletní systém soustav konjugovaných k dané soustavě (y) nad tímto tělesem rovněž kompletním systémem těchto soustav a obráceně, každý kompletní systém soustav komjugovaných k dané soustavě (y) nad tělesem charakteristiky nula je kvasikompletním systémem zmíněných soustav. Stejně tak v případě tělesa charakteristiky nula splynou pojmy násobnost specializace a redukovaná násobnost specializace.

Zřejmě platí:

Lemma II. *Budiž* k *těleso,* (x) *soustava nezávislých proměnných nad* k, (y) *soustava algebraických veličin nad* $k(x)$, $(\bar{x})$ *konečná specializace soustavy* (x) *nad* k, $(\bar{y})$ *specializace soustavy* (y) *kompatibilní ke specializaci* $(x) \to (\bar{x})$ *nad* k. *Pak je násobnost soustavy* $(\bar{y})$ *jako specializace soustavy* (y) *nad* $(x) \to (\bar{x})$ *vzhledem ke* k *definována tehdy a jen tehdy, je-li definována její redukovaná násobnost.*

Nyní již dokážeme „elementární případ“ principu redukce:

Věta: *Budiž* k *těleso,* (x) *soustava nezávislých proměnných nad* k, (y) *soustava algebraických veličin nad* $k(x)$, $(\bar{x})$ *konečná specializace soustavy* (x) *nad* k. *Nechť každá specializace soustavy* (y) *kompatibilní ke specializaci* $(x) \to (x)$ *nad* k *je algebraická nad* $k(\bar{x})$. *Konečně budiž* $(\bar{y})$ *vlastní specializace soustavy* (y) *kompatibilní ke specializaci* $(x) \to (\bar{x})$ *nad* k. *Pak specializace* $(\bar{y})$ *soustavy* (y) *nad* $(x) \to (\bar{x})$ *vzhledem ke* k *má definovanou násobnost.*

Důkaz provedeme ve třech krocích:

I. Nejprve dokážeme naši větu za předpokladu, že (y) je jednočlenná soustava složená z jediné veličiny y.

II. Dokážeme naši větu za předpokladu, že každá specializace (y') soustavy (y) kompatibilní ke specializaci $(x) \to (\bar{x})$ nad k je konečná.

III. Dokážeme naši větu již bez dalších přídavných předpokladů.

I. V tomto případě existuje zřejmě polynom $F(X, Y) \in k[X, Y]$ (zde X znamená tolik neručitých, kolik členů má soustava (x), Y jedinou neurčitou) následujících vlastností:

(a) $F(x, Y)$ je irreducibilní nad $k(x)$.

(b) $F(X, Y)$ není dělitelný žádným polynomem kladného stupně $D(X) \in k[X]$ (t. j. neexistuje žádný polynom $V(X, Y) \in k[X, Y]$ tak, že $F(X, Y) = D(X) \cdot V(X, Y)$).

(c) $F(x, y) = 0$.

Budiž $(y^{(1)}, \ldots, y^{(n)})$ kompletní systém veličin konjugovaných k (y) nad $k(x)$; je-li $(\bar{y}^{(1)}, \ldots, \bar{y}^{(n)})$ libovolná specializace tohoto kompletního systému nad $(x) \to (\bar{x})$ vzhledem ke k, pak za předpokladu, že $F(\bar{x}, Y) \neq 0$, je podle lemmatu I násobnost veličiny $\bar{y}$ v této specializaci rovna její násobnosti jakožto kořene rovnice $F(\bar{x}, y) = 0$.

Je tedy násobnost specializace $\bar{y}$ veličiny y nad $(x) \to (\bar{x})$ vzhledem ke k definována, je-li $F(\bar{x}, Y) \neq 0$. Dokážeme nepřímo, že poslední předpoklad je splněn.

Nechť je tedy $F(\bar{x}, Y) = 0$. Je-li η proměnná nad $k(\bar{x})$, je jistě

$$(\bar{x}, \eta) \to (x, y) \text{ nad } k, \tag{1}$$

při čemž

$$\dim_k (\bar{x}, \eta) > \dim_k (\bar{x}, \bar{y}). \tag{2}$$

Dále platí

$$F(\bar{x}, \eta) = 0. \tag{3}$$

Budiž nyní $G(X, Y) \in k[X, Y]$ polynom, pro který

$$G(x, y) = 0. \tag{4}$$

Pak existuje polynom $A(Y)$ nad $k(x)$ takový, že

$$G(x, Y) = A(Y) \cdot F(x, Y). \tag{5}$$

Dále existují polynomy $P(X, Y) \in k[X, Y]$ a $Q(X) \in k[X]$ tak, že

$$A(Y) = \frac{P(x, Y)}{Q(x)}.$$

Odtud a z (5) obdržíme

$$Q(x) \cdot G(x, Y) = P(x, Y) \cdot F(x, Y).$$

Ale (x) je soustava nezávislých proměnných nad k, Y neurčitá, proto z posledního vztahu vyplývá:

$$Q(X) \cdot G(X, Y) = P(X, Y) \cdot F(X, Y).$$

Podle vlastnosti (b) polynomu $F(X, Y)$, jsou polynomy $F(X, Y)$ a $Q(X)$ v oboru integrity $k[X, Y]$ nesoudělné, proto $Q(X) \mid P(X, Y)$ v $k[X, Y]$. Označíme-li $H(X, Y) = \dfrac{P(X, Y)}{Q(X)}$, je $H(X, Y) \in k[X, Y]$ a platí

$$G(X, Y) = H(X, Y) \cdot F(X, Y).$$

Odtud a z (3) plyne

$$G(\bar{x}, \eta) = 0. \tag{6}$$

Ze (4) a (6) plyne, že $(x, y) \to (\bar{x}, \eta)$ je specializace nad k a z (1) a (2) plyne, že $\bar{y}$ není vlastní specializace veličiny y nad $(x) \to (\bar{x})$ vzhledem ke k. Tím je část I. našeho důkazu provedena.

II. Vzhledem k lemmatu II stačí dokázat, že specializace $(\bar{y})$ soustavy (y) kompatibilní ke specializaci $(x) \to (\bar{x})$ nad k má definovanou redukovanou násobnost.

Budiž $(y) = (y_1, \ldots, y_m)$. Zvolme soustavu $(u) = (u_1, \ldots, u_m)$ nezávislých proměnných nad $k(x)$ i $k(\bar{x})$ a pro každou soustavu veličin $(z) = (z_1, \ldots, z_m)$ nazvěme **kontrakcí** této soustavy veličinu

$$\eta = u_1 z_1 + \ldots + u_m z_m .$$

Položme $K = k(u)$, pak je $(x, y) \to (\bar{x}, \bar{y})$ nad K. Je-li

$$(y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}) \tag{7}$$

kvasikompletní soustav konjugovaných k soustavě (y) nad $k(x)$

$$(\bar{y}^{(1)}, \ldots, \bar{y}^{(n)}) \tag{8}$$

libovolná specializace tohoto systému kompatibilní ke specializaci $(x) \to (\bar{x})$ nad k, je (8) též specializace systému (7) kompatibilní ke specializaci $(x) \to (\bar{x})$ nad K (viz [1] str. 29).

Pro každou soustavu $(y^{(i)})$ resp. $(\bar{y}^{(i)})$ označme $w^{(i)}$ resp. $\bar{w}^{(i)}$ její kontrakci, zvláště ještě označme w kontrakci soustavy (y) a $\bar{w}$ kontrakci soustavy $(\bar{y})$. Platí

$$w^{(i)} - w^{(j)} = u_1(y_1^{(i)} - y_1^{(j)}) + \ldots + u_m(y_m^{(i)} - y_m^{(j)}). \tag{9}$$

Protože veličiny $u_1, \ldots, u_m$ jsou algebraicky nezávislé nad $k(x)$ a každá z veličin $y_1^{(i)}, \ldots, y_m^{(i)}, y_1^{(j)}, \ldots, y_m^{(j)}$ je algebraická nad $k(x)$, platí podle (9) $w^{(i)} = w^{(j)}$ tehdy a jen tehdy, je-li $(y^{(i)}) = (y^{(j)})$. Stejně se dokáže: $\bar{w}^{(i)} = \bar{w}^{(j)}$ tehdy a jen tehdy, je-li $(\bar{y}^{(i)}) = (\bar{y}^{(j)})$.

Dokážeme nyní, že

$$(w^{(1)}, \ldots, w^{(n)}) \tag{10}$$

je kvasikompletní systém veličin konjugovaných k veličině w nad $K(x)$. Podle předešlého je pro $i \neq j : w^{(i)} \neq w^{(j)}$, stačí tedy dokázat, že každá veličina systému (10) je nad $K(x)$ konjugována k w a obráceně, každá veličina w' konjugovaná nad $K(x)$ k veličině w je veličinou systému (10).

Nechť je σ_i automorfismus tělesa $\overline{k(x)}$ nad $k(x)$, který převádí soustavu (y) v soustavu $(y^{(i)})$. Tento automorfismus indukuje isomorfismus τ_i nad $k(x)$ tělesa $k(x, y)$ na těleso $k(x, y^{(i)})$. Isomorfismus τ_i lze zřejmě rozšířit na isomorfismus ρ_i nad $K(x)$ tělesa $K(x, y)$ na těleso $K(x, y^{(i)})$. Konečně (viz [1] str. 9) lze ρ_i rozšířit na automorfismus Σ_i nad $K(x)$ tělesa $\overline{K(x)}$. Σ_i pak převádí zřejmě w ve $w^{(i)}$. Je tedy každá veličina systému (10) konjugovaná k w nad $K(x)$.

Obráceně: Budiž w' veličina konjugovaná k w nad $K(x)$. Pak existuje automorfismus Σ nad $K(x)$ tělesa $\overline{K(x)}$, který převádí veličinu w ve veličinu w'. Σ převádí soustavu (y) v jistou soustavu (y') a indukuje isomorfismus ρ nad $K(x)$ tělesa $K(x, y)$ na těleso $K(x, y')$. Isomorfismus ρ pak indukuje zřejmě isomorfismus τ nad $k(x)$ tělesa $k(x, y)$ na těleso $k(x, y')$. Tento isomorfismus τ lze (viz opět [1] str. 9) rozšířit na automorfismus σ nad $k(x)$ tělesa $\overline{k(x)}$. Obrazem soustavy (y) v automorfismu σ je tedy jistá soustava $(y^{(i)})$ systému (7), proto

$(y') = (y^{(i)})$ a $w' = w^{(i)}$. Tedy každá veličina konjugovaná k veličině w nad $K(x)$ náleží systému (10).

Uvažujme soustavu

$$(\bar{w}^{(1)}, \ldots, \bar{w}^{(n)}), \tag{11}$$

kde, jak již bylo řečeno, je $\bar{w}^{(i)}$ kontrakce soustavy $(\bar{y}^{(i)})$. Ke specializaci

$$(x; y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}) \to (\bar{x}; \bar{y}^{(1)}, \ldots, \bar{y}^{(n)}) \text{ nad } K$$

existuje soustava zobecněných veličin $(w'^{(1)}, \ldots, w'^{(n)})$ taková, že

$$(x; y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}; w^{(1)}, \ldots, w^{(n)}) \to (\bar{x}; \bar{y}^{(1)}, \ldots, \bar{y}^{(n)}; w'^{(1)}, \ldots, w'^{(n)})$$

je specialisace nad K. Potom je pro každé $i = 1, \ldots, n$

$$(y^{(i)}, w^{(i)}) \to (\bar{y}^{(i)}, w'^{(i)}),$$

specializace nad K a ze vztahu

$$w^{(i)} = u_1 y_1^{(i)} + \ldots + u_m y_m^{(i)},$$

plyne

$$w'^{(i)} = u_1 \bar{y}_1^{(i)} + \ldots + u_m \bar{y}_m^{(i)},$$

tedy $w'^{(i)} = \bar{w}^{(i)}$.

Soustava (11) je tedy specializací soustavy (10) kompatibilní ke specializaci $(x) \to (\bar{x})$ nad K. Stejně se dokáže, že veličina $\bar{w}$ je specializací veličiny w kompatibilní ke specializaci $(x) \to (\bar{x})$ nad K. Podle části I našeho důkazu je redukovaná násobnost veličiny $\bar{w}$ jako specializace veličiny w nad $(x) \to (\bar{x})$ vzhledem ke K definována. Existuje tedy číslo (celé kladné) μ tak, že: Je-li (8) libovolná specializace systému (7) nad $(x) \to (\bar{x})$ vzhledem ke K, (10) a (11) příslušné soustavy kontrakcí, je veličina $\bar{w}$ rovna právě μ členům soustavy (11) a tedy soustava $(\bar{y})$ je rovna právě μ členům systému (8). Je tedy definována redukovaná násobnost specializace $\bar{y}$ soustavy (y) nad $(x) \to (\bar{x})$ vzhledem ke K, což se mělo dokázat.

III. Budiž nyní $(y) = (y_1, \ldots, y_m)$ libovolná soustava algebraických veličin nad $k(x)$, $(\bar{y}) = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m)$ její vlastní specializace nad $(x) \to (\bar{x})$ vzhledem ke k a nechť každá specializace soustavy (y) nad $(x) \to (\bar{x})$ vzhledem ke k je algebraická nad $k(\bar{x})$.

Budiž v proměnná nad $k(x)$ i $k(\bar{x})$, položme $h = k(v)$. Potom je každá specializace (y') soustavy (y) nad $(x) \to (\bar{x})$ vzhledem ke k též její specializací nad $(x) \to (\bar{x})$ vzhledem k h, dále je (y') algebraická nad $h(\bar{x})$ a $(\bar{y})$ vlastní specializace soustavy (y) nad $(x) \to (\bar{x})$ vzhledem k h. Budiž (7) kvasikompletní systém soustav konjugovaných k (y) nad $k(x)$. Pak je (7) zřejmě též kvasikompletní systém soustav konjugovaných $k(y)$ nad $h(x)$.

Budiž $(z) = (z_1, \ldots, z_m)$ libovolná soustava zobecněných veličin. Inversí soustavy (z) nazveme soustavu zobecněných veličin $(t) = (t_1, \ldots, t_m)$, definovanou vztahy

$$t_i = \frac{1}{z_i + v}, \text{ pro } z_1 + v \neq 0, \; i = 1, \ldots, m, \qquad z_i \neq \infty \tag{11}$$

$$t_i = 0, \qquad \text{pro } z_i = \infty, \; i = 1, \ldots, m$$

$$t_i = \infty, \qquad \text{pro } s_i + v = 0, \; i = 1, \ldots, m.$$

Z této definice vyplývá bezprostředně: Každá soustava zobecněných veličin má právě jednu inversi, každá soustava zobecněných veličin je inversí právě jedné soustavy zobecněných veličin. Je-li (z) soustava zobecněných veličin taková, že v je proměnná nad $k(z)$, je inversí této soustavy soustava veličin. Inverse dvou soustav veličin konjugovaných nad $k(x)$ jsou soustavy veličin konjugované nad $k(x)$. Odtud plyne dále: Je-li

$$((z^{(1)}), \ldots, (z^{(n)})) \tag{12}$$

kvasikompletní systém soustav konjugovaných k dané soustavě veličin (z) nad $k(x)$ a je-li pro $i = 1, \ldots, n$ $(t^{(i)})$ inverse soustavy $(z^{(i)})$, je

$$((t^{(1)}), \ldots, (t^{(n)})) \tag{13}$$

opět kvasikompletní systém soustav konjugovaných k inversi (t) soustavy (z) nad $k(x)$.

Označme (s) inversi soustavy (y), (s') libovolnou specializaci soustavy veličin (s) kompatibilní ke specializaci $(x) \to (\bar{x})$ nad h. Potom existuje taková soustava zobecněných veličin (y'), že

$$(x; s; y) \to (\bar{x}; s'; y') \text{ nad } h,$$

Pak je jednak

$$(x; y) \to (\bar{x}; y') \text{ nad } h$$

takže (y') je algebraická nad $k(\bar{x})$, jednak

$$(y; s) \to (y'; s') \text{ nad } h,$$

takže ze vztahu

$$s_i = \frac{1}{y_i + v}, \; i = 1, \ldots, m$$

plyne v případě, že $y'_i \neq \infty$

$$s'_i = \frac{1}{y'_i + v} \neq \infty,$$

Je-li však $y'_i = \infty$, je

$$(y_i, s_i) \to (\infty, s'_i) \text{ nad } h,$$

neboli

$$\left(\frac{1}{y_i}, s_i\right) \to (0, s'_i) \text{ nad } h.$$

Píšeme-li s_i ve tvaru

$$s_i = \frac{\frac{1}{y_i}}{1 + \frac{1}{y_i} v},$$

plyne odtud, $s'_i = 0$, tedy opět $s'_i \neq \infty$.

Soustava veličin (s) má tedy nad $(x) \to (\bar{x})$ vzhledem k h jen konečné specializace, které jsou evidentně algebraické nad $h(\bar{x})$. Nad to jsme dokázali, že soustava veličin (s') je inversí soustavy zobecněných veličin (y').

Je-li nyní (y') specializace soustavy (y) nad $(x) \to (\bar{x})$ vzhledem k h, (s') soustava taková, že $(x; y; s) \to (\bar{x}; y'; s')$ nad h je podle předchozího (s') inversí soustavy (y') a je tedy určena jednoznačně.

Budiž (7) kvasikompletní systém soustav konjugovaných k soustavě (y) nad $k(x)$ [a tedy též nad $h(x)$], (8) libovolná specializace tohoto systému nad $(x) \to (\bar{x})$ vzhledem ke k (a tedy též vzhledem k h). Pro každé $i = 1, \ldots, n$ označme $(s^{(i)})$ resp. $(\bar{s}^{(i)})$ inversi soustavy $(y^{(i)})$ resp. $(\bar{y}^{(i)})$. Pak je

$$(s^{(1)}, \ldots, s^{(n)}) \tag{12}$$

kvasikompletní systém soustav konjugovaných nad $h(x)$ k inversi (s) soustavy (y). Budiž

$$(\bar{s}^{(1)}, \ldots, \bar{s}^{(n)}) \tag{13}$$

systém soustav takový, že

$$\begin{aligned}(x; y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}; s^{(1)}, \ldots, s^{(n)}) \to \\ \to (\bar{x}; \bar{y}^{(1)}, \ldots, \bar{y}^{(n)}; \bar{s}^{(1)}, \ldots, \bar{s}^{(n)}) \text{ nad } h.\end{aligned} \tag{14}$$

Pak je pro každé $i = 1, \ldots, n$ $(x; y^{(i)}; s^{(i)}) \to (\bar{x}; \bar{y}^{(i)}; \bar{s}^{(i)})$ nad h a tedy $(\bar{s}^{(i)})$ je inverse soustavy $(\bar{s}^{(i)})$ a (13) je specializace systému (12) nad $(x) \to (\bar{x})$ vzhledem k h.

Označíme-li zvláště $(\bar{s})$ inversi soustavy $(\bar{y})$, je $(\bar{s})$ specializace soustavy (s) nad $(x) \to (\bar{x})$ vzhledem k h a jelikož pro libovolnou soustavu zobecněných veličin (z) a její inversi (t) platí, že $h(z) = h(t)$, je $(\bar{s})$ vlastní specializace soustavy (s) nad $(x) \to (\bar{x})$ vzhledem k h. Jelikož podle předchozího má soustava (s) nad $(x) \to (\bar{x})$ vzhledem k h jenom konečné a nad $h(\bar{x})$ algebraické specializace, je definována redukovaná násobnost soustavy $(\bar{s})$ jakožto specializace soustavy (s) nad $(x) \to (\bar{x})$ vzhledem k h. To znamená, že existuje celé kladné číslo μ tak, že $(\bar{s})$ je rovna μ členům libovolné specializace (13) systému (12) nad $(x) \to (\bar{x})$ vzhledem k h. Avšak $(\bar{s})$ je rovna μ členům systému (13) tehdy a jen tehdy, je-li $(\bar{y})$ rovna μ čelnům systému (8), za předpokladu, že platí (14). Protože však ke každému systému (8) existuje aspoň jeden (dokonce právě jeden) systém (13) tak, že platí (14), je definována též redukovaná násobnost specializace $(\bar{y})$ soustavy (y) nad $(x) \to (\bar{x})$ vzhledem k h, což bylo dokázat.

LITERATURA

[1] *Weil, A.:* Foundations of algebraic geometry, New York 1946.

ZUSAMMENFASSUNG

ELEMENTARFALL DES REDUKTIONSPRINZIPS IN ALGEBRAISCHER GEOMETRIE

DALIBOR KLUCKÝ

In diesem Artikel wird ein Satz bewiesen, der hier als „Elementarfall des Reduktionsprinzips“ bezeichnet wird:

Es sei k ein Körper, (x) ein System von unabhängigen Variablen in bezug auf k, (y) ein System von algebraischen Grössen über $k(x)$, $(\bar{x})$ eine endliche

Spezialisierung des Systems (x) über k. Jede Spezialisierung des Systems (y) über $(x) \to (\bar{x})$ in bezug auf k sei algebraisch über $k(\bar{x})$. Endlich sei $(\bar{y})$ eine eigene Spezialisierung des Systems (y) über $(x) \to (\bar{x})$ in bezug auf k. Dann ist die Multiplizität der Spezialisierung des Systems $(\bar{y})$ über $(x) \to (\bar{x})$ in bezug auf k definiert.

Der Beweis des Satzes wird in drei Schritten durchgeführt: Erstens wird der Satz unter Voraussetzung, dass (y) nur aus einer Grösse besteht, dann unter der Voraussetzung, dass alle Spezialisierungen des Systems (y) über $(x) \to (\bar{x})$ in bezug auf k endlich sind bewiesen und endlich folgt der Beweis des Satzes ohne weitere hinzugefügte Voraussetzungen.

Der behandelte „Elementarfall des Reduktionsprinzip" ist Spezialfall eines allgemeineren Satzes, in welchem die Bedingung, dass alle Spezialisierungen des Systems (y) über $(x) \to (\bar{x})$ in bezug auf den Körper $k(\bar{x})$ algebraisch sind, nicht vorausgesetzt wird. Diesen allgemeineren Satz — kurz: „Reduktionsprinzip" — hat A. Weil in seiner Monographie „Foudations of algebraic geometry" unter Verwendung von formalen Potenzreihen bewiesen. In Schlusskommentaren der genannten Arbeit lenkt A. Weil die Aufmerksamheit darauf, dass der „Elementarfall des Reduktionsprinzips" unter Verwendung verhältnismässig einfachen Mitteln bewiesen werden kann und gibt eine kurze Anweisung an. Diese Anweisung wurde vom Autor benützt.