Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Jan Peřina

Některé metody teorie pole v teorii optického zobrazení

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 5 (1964), No. 1, 87--93

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/119813`

1964 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 15.

Katedra teoretické fyziky a astronomie přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Bedřich Havelka, doktor věd

NĚKTERÉ METODY TEORIE POLE V TEORII OPTICKÉHO ZOBRAZENÍ

JAN PEŘINA

(Došlo dne 11. září 1963)

Tato práce se týká styčné oblasti dvou disciplin teoretické fyziky — teorie pole a teorie optického zobrazení.

1. Dispersní vztahy v teorii optického zobrazení

Za základní úlohu teorie optického zobrazení je možno považovat určení předmětové struktury, je-li známa obrazová struktura vytvořená optickou soustavou. Matematická formulace této úlohy vede na integrální rovnici. Řešitelnost základní úlohy teorie optického zobrazení je tedy určena podmínkami existence a jednoznačnosti řešení této integrální rovnice.

Označme u reálnou předmětovou strukturu, U obrazovou strukturu, $\gamma(x',x'')$ koeficient částečné koherence určující korelaci dvou rozruchů vycházejících z bodů předmětové struktury o souřadnicích x', x'', K ohybovou funkci optické soustavy. Potom intenzita $I = U^2$ v bodě o souřadnici x obrazové struktury je určena integrálním vztahem

$$U^2(x) = \int K(x', x)\, K(x'', x)\, \gamma(x', x'')\, u(x')\, u(x'')\, dx' dx'', \tag{1.1}$$

kde se integruje přes celou předmětovou strukturu. To je zobrazovací integrální rovnice, která umožňuje řešit základní úlohu teorie optického zobrazení.

Hledejme všechny předmětové struktury u, které se danou optickou soustavou zobrazují ideálně ve smyslu podobnosti $U = \frac{1}{\lambda} u$, kde λ je reálné číslo. Obdržíme

$$u^2(x) = \lambda^2 \int K(x', x)\, K(x'', x)\, \gamma(x', x'')\, u(x')\, u(x'')\, dx'\, dx''. \tag{1.2}$$

Odtud lze získat rovnice studované Mandelštamem [1] pro zobrazení ideálně koherentním nebo ideálně nekoherentním světlem; klademe-li $\gamma(x', x'') = 1$ pro všechna x', x'', obdržíme

$$u(x) = \lambda \int K(x', x)\, u(x')\, dx' \tag{1.3}$$

nebo $\gamma(x', x'') = \delta_{x'x''}$, obdržíme až na konstantu

$$u^2(x) = \lambda^2 \int K^2(x', x)\, u^2(x')\, \mathrm{d}x'. \tag{1.4}$$

Z rovnice (1.2) plyne, že jestliže ohybová funkce optické soustavy bude úměrná Diracově δ-funkci, budou rovnici (1.2) vyhovovat všechny funkce dané třídy a nedojde k filtraci prostorových frekvencí. Takovou soustavu je možno nazvat ideální optickou soustavou. Tato soustava bude zobrazovat podle zákonů geometrické optiky. Uvážíme-li, že $\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim\limits_{\alpha\to\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}$ a že $\frac{\sin \alpha x}{x}$ je až na konstantu Fraunhoferova ohybová funkce štěrbiny, kde α je úměrné šířce štěrbiny, vidíme, že ideální optickou soustavou je nekonečně široká štěrbina.

Lze ukázat, že v teorii lineárních soutav, a tedy i optických soustav (pokud jsou intenzity světla malé, pro velké intenzity se budou prostředí chovat nelineárně), jsou charakteristické funkce s finitním Fourierovým spektrem. Tak např. jádro integrální rovnice (1.2) má Fourierovo spektrum rovné nule pro zdroj obdélníkového nebo kruhového tvaru a zobrazení štěrbinou nebo kruhovým otvorem vně intervalu $(-\alpha - \beta, \alpha + \beta)$, $\alpha = \frac{\pi b}{\lambda f}$, kde b je šířka štěrbiny nebo průměr otvoru, λ je vlnová délka světla a f ohnisková vzdálenost, $\beta = \frac{\pi a}{\lambda R}$, kde a je lineární rozměr zdroje a R je jeho vzdálenost od předmětové roviny.

Pro funkce s finitním Fourierovým spektrem platí Paley—Wienerova věta [2], podle které je možno tyto funkce prodloužit jako celistvé funkce konečného stupně do celé komplexní roviny.

Píšeme-li v určité aproximaci

$$\gamma(x', x'') = \gamma(x', x)\, \gamma(x, x''), \tag{1.5}$$

můžeme psát místo (1.2)

$$u(x) = \lambda \int K(x', x)\, \gamma(x', x)\, u(x')\, \mathrm{d}x' = C(x, x')\, u(x'), \tag{1.6}$$

kde $C(x, x')$ je integrální operátor.

Předpokládejme nyní, že $C(x, x')$ je komplexní operátor. Fyzikální smysl tohoto předpokladu je v tom, že optická soustava ovlivňuje jak amplitudově tak fázově obraz předmětové struktury.

Omezíme-li se na isoplanatickou oblast, kde $C(x, x') = C(x - x') = C(z)$ a má-li $C(z)$ příslušné asymptotické vlastnosti, lze na základě Paley—Wienerovy věty psát pro $C(z)$ Cauchyho integrální formuli a odtud dispersní vztah

$$ReC(z) = \frac{1}{\pi} P \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{ImC(z')}{z' - z}\, \mathrm{d}z', \quad -\infty < z < +\infty, \tag{1.7}$$

kde P označuje Cauchyho hlavní hodnotu. Asymptotické vlastnosti lze zeslabovat a psát dispersní vztahy s odečítáním [3]. V neisoplanatické oblasti lze psát dvojné dispersní vztahy. Dispersní vztahy lze dále zobecnit užitím Weilovy—Bergmannovy formule [4] místo Cauchyho formule.

Fyzikální smysl dispersních vztahů je v tom, že amplitudový a fázový zásah optické soustavy (a částečné koherence) do obrazu předmětové struktury spolu souvisí prostřednictvím nelokálního vztahu (1.7).

V rovnici (1.1) je obsažena řada základních momentů teorie optického zobrazení:

1. Tato rovnice je matematickou formulací základní úlohy.

2. Je v ní obsažen pojem aberace.

3. Jsou v ní obsaženy výsledky Gaborovy superposiční věty [5] (kvantování předmětu a obrazu), které z ní plynou v důsledku isomorfismu prostorů l_2 a L_2.

4. Je v ní obsaženo nové pojetí rozlišovací schopnosti, které značně zobecňuje klasické pojetí a které využívá analytického prodloužení funkcí. Pro třídu L_2-funkcí, pro které platí $u(x) = 0$, $|x| > a$ (konečný předmět), podle tohoto pojetí neexistuje mez rozlišovací schopnosti. Nové pojetí rozlišovací schopnosti je založeno na vlastnostech existence, jednoznačnosti a tzv. korektnosti řešení zobrazovací integrální rovnice [2]. Zatím co klasické pojetí se orientuje pouze na kvalitativní vyšetřování obrazové struktury, vyšetřuje nové pojetí obrazovou strukturu kvantitativně. Využití analytického prodloužení dovoluje rekonstruovat lineární soustavou odfiltrované členy Kotelnikovovy řady, takže filtrace prostorových frekvencí nevede ke ztrátě informace.

Odtud lze předpokládat, že zobrazovací integrální rovnice představuje fundamentální vztah teorie optického zobrazení (analogicky k rovnicím pole v teorii pole). Spolu s dispersním vztahem by měla obsahovat všechny vlastnosti optického zobrazení (podobná situace je v moderní teorii pole bez rovnic pole, kde se postulují dispersní vztahy a podmínka unitarity pro operátor rozptylu).

Nakonec poznamenejme, že dispersní vztah lze psát pro komplexní funkci přenosu kontrastu, což je jen jiná representace vlnového jevu.

2. Obecně kovariantní formulace teorie optického zobrazení. Využití Lieových grup

Pro jednoduchost zatím předpokládejme, že je v (1.1) $K = 1$, takže pro intenzitu v libovolném bodě obrazového prostoru platí

$$I = \int \gamma[u(x'), u(x'')]\, u(x')\, u(x'')\, \mathrm{d}x'\, \mathrm{d}x''. \tag{2.1}$$

V důsledku Gaborovy věty (kvantování předmětu a obrazu) lze psát*)

$$I = \sum_{i,k}^{n} \gamma_{ik} u^i u^k, \tag{2.2}$$

*) Uvažujeme $\Delta x = \lambda = 1$, tj. za jednotku délky považujeme vlnovou délku.

kde $\gamma_{ik} = \gamma[u(x^i), u(x^k)]$ a $u^j = u(x^j)$. Intenzitu lze tedy považovat za čtverec vzdálenosti bodu o souřadnicích $u^i = u(x^i)$ od počátku neeukleidovského prostoru n dimensí se symetrickou metrikou γ_{ik}. Tento prostor nazveme optickým prostorem.

Tím, že jsme zavedli intenzitu I jako interval v neeukleidovském prostoru, můžeme zobrazení studovat tak, že budeme studovat vlastnosti tohoto prostoru. Celé schema obecně kovariantní formulace teorie optického zobrazení bude formálně analogické obecné teorii relativity (viz např. [6]).

Pro ideálně koherentní resp. nekoherentní světlo platí $\gamma_{ik} = 1$ pro všechna i, k resp. $\gamma_{ik} = \delta_{ik}$. Takže optický prostor bude eukleidovský, je-li světlo ideálně nekoherentní, je-li světlo částečně nebo ideálně koherentní, bude optický prostor neeukleidovský.

Nutná a postačující podmínka pro to, aby γ_{ik} popisoval v konečné oblasti ideálně nekoherentní světlo, je

$$R^i_{klm} = 0, \tag{2.3}$$

kde R^i_{klm} je Riemannův tensor.

Princip ekvivalence ukazuje, že lze vždy změnit amplitudy světla tak, že lokálně bude světlo ideálně nekoherentní.

Koeficient částečné koherence lze určit z rovnice (analogie k Einsteinově gravitační rovnici)

$$R_{ik} - \frac{1}{2}\gamma_{ik} R = kT_{ik}, \tag{2.4}$$

kde $R_{km} = \gamma^{il} R_{iklm}$, $R = \gamma^{ik} R_{ik}$, T_{ik} je tensor světla, určený rozložením a velikostí zdrojů, k je konstanta svazující geometrické a negeometrické veličiny. Užitím de Rhamovy věty z teorie homologie [7] lze T_{ik} konstruovat z topologických vlastností optického prostoru.

Je známo, že koeficient částečné koherence γ_{ik} vyhovuje vlnové rovnici [8]. Rovnice (2.4) v lineární aproximaci dává vlnovou rovnici, takže tato nelineární formulace částečné koherence přirozeným způsobem zobecňuje klasickou lineární formulaci.

Vzhledem k tomu, že rovnice (2,4) je nelineární, rodí částečná koherence částečnou koherenci.

Zdroje světla vytvářejí metriku γ_{ik}, která v důsledku nelinearity rovnice (2.4) způsobí pohyb zdrojů, tj. změnu amplitud, podle pohybového zákona

$$\frac{d^2 u^l}{d\sqrt{I}^2} + \Gamma^l_{ik} \frac{du^i}{d\sqrt{I}} \frac{du^k}{d\sqrt{I}} = 0, \tag{2.5}$$

kde Γ^l_{ik} jsou Christoffelovy symboly, který představuje rovnici geodetické čáry v optickém prostoru.

Vztahem (2.2) je dán koeficientu částečné koherence obecnější smysl proti fenomenologické definici pomocí časové střední hodnoty, neboť jako metrický tensor charakterisuje tento koeficient topologii optického prostoru, která může mít fyzikální smysl.

Zadáme-li koeficient částečné koherence γ_{ik}, lze určit pomocí Lieových grup [9] změny amplitud, které tento koeficient nemění a naopak, k daným změnám amplitud lze nalézt koeficient částečné koherence γ_{ik}, který se těmito změnami nemění.

K tomu, aby transformace

$$u'^i = u^i + \xi^i(u)\, \delta t \tag{2.6}$$

neměnila metriku optického prostoru (tj. byla grupou pohybů), je nutné a postačí, aby ve směru ξ^i platilo

$$\underset{L}{\delta} \gamma_{ik} = 0, \tag{2.7}$$

kde $\underset{L}{\delta}$ je Lieův diferenciál. To je Killingova rovnice, která řeší uvedené úlohy.

Maximálně homogenní prostor je prostor ideálně nekoherentního světla. Tento prostor je invariantní vůči $\frac{n(n+1)}{2}$ (n translací a $\binom{n}{2}$ rotací) parametrické grupě pohybů. Optický prostor částečně nebo ideálně koherentního světla bude invariantní vůči grupě o menším počtu parametrů než $\frac{n(n+1)}{2}$.

V optickém prostoru lze z této invariance podle věty E. Noetherové konstruovat invarianty z koeficientu částečné koherence a jeho derivací podle amplitud nebo z dalších polí zavedených do optického prostoru.

3. Další perspektivy

Uvedenou teorii lze dále rozšířit. Ukazuje se, že optické zobrazení představuje deformaci metriky optického prostoru. Tento tzv. deformovaný optický prostor s metrikou Γ_{ik} představuje n rozměrnou hyperplochu v $2n$ rozměrném neeukleidovském prostoru.

Je-li ohybová funkce $K = 1$ je $\Gamma_{ik} = \gamma_{ik}$, tj. deformovaný optický prostor je prostor optický. Ideální optické soustavě odpovídají v deformovaném optickém prostoru body, v nichž má metrika singularity typu δ-funkce. Všechny reálné soustavy leží mezi těmito případy.

Na základě dispersních vztahů je symetrie deformovaného optického prostoru vyjádřením souvislosti mezi amplitudovým a fázovým zásahem optické soustavy do obrazu předmětové struktury.

Zobrazovací integrální rovnici lze chápat jako metrickou úlohu v deformovaném optickém prostoru.

Je tedy jedinou fyzikální realitou teorie optického zobrazení deformovaný optický prostor. Vlastnosti tohoto prostoru jsou vlastnostmi optického zobrazení. Tím docházíme k důsledné geometrizaci vlnové optiky, takže uvedená teorie představuje negaci negace geometrické optiky.

Závěrem děkuji prof. RNDr. B. Havelkovi, Dr Sc. za námět k této práci a za rady a připomínky.

LITERATURA

[1] *L. I. Mandelštam:* Soč. I, 1948, 229—241
[2] *J. I. Churgin, V. P. Jakovlev:* Metody těoriji celych funkcij v radiofizike, těoriji svjazi i optike, GIFML, Moskva 1962
[3] *N. N. Bogoljubov, B. V. Medvěděv, M. K. Polivanov:* Voprosy těoriji dispersionnych sootnošenij, GIFML, Moskva 1958
[4] *B. A. Fuchs:* Vvěděnije v těoriju analitičeskych funkcij mnogich komplexnych peremennych GIFML, Moskva 1962, 332—340
[5] *D. Gabor:* Proceedings of symposium on astronomical optics held in the university of Manchester, 1955 (edited by Z. Kopal, Amsterodam 1956), 20—21
[6] *J. Weber:* Obščaja těorija otnositělnosti i gravitacionnyje volny, IIL, Moskva 1962
[7] *C. Misner, J. Wheeler:* Ann. of Phys., 2, No 6, 1957, 525—603
[8] *M. Born, E. Wolf:* Principles of Optics, London 1959
[9] *A. Z. Petrov:* Prostranstva Ejnštejna, GIFML, Moskva 1961

Резюме

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ В ТЕОРИИ ОПТИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

ЯН ПЕРЖИНА

Основная задача теории оптического изображения для изображения частично когерентным светом формулируется в виде интегрального уравнения. Так как ядро интегрального уравнения является функцией с ограниченным спектром, можно применить теорему Палея-Винера для продолжения ядра в целую комплексную плоскость и написать для него дисперсионное соотношение. Физическим значением этого соотношения является связность амплитудного и фазового влияния системы при изображении структуры объекта.

Коэффициент частичной когеренции интерпретируется как метрический тензор в неэвклидовом пространстве (оптическом пространстве). Поэтому можно использовать теорию неэвклидовых пространств в теории оптического изображения. Дальше изучаются группы движений в оптическом пространстве при помощи групп Ли.

Resumé

QUELQUES METHODES DE LA THÉORIE DU CHAMPS DANS LA THÉORIE DES IMAGES OPTIQUES

JAN PEŘINA

La rôle fondamental de la théorie de l'imagerie d'optique dans le cas de la lumière partiellement cohérente est formulé à l'aide de l'équation integrale. Le noyau de cette équation étant la fonction avec le spectre fini il est possible d'utiliser le théoreme de Paley—Wiener pour la prolongation du noyau dans le plan complexe total et d'écrire une rélation de dispersion dont le sens physique consiste dans la circonstance que l'intervention d'amplitude et de phase du systeme optique dans la structure de l'object sont liées entre elles.

Le coefficient de la cohérence partielle est interprété comme un tenseur métrique dans l'espace non euclidien (l'espace optique). Cette circonstance donne la possibilité d'utiliser la théorie des espaces non euclidiens dans la théorie de l'imagerie d'optique. On étudie des groupes des mouvements dans l'espace optique à l'aide des groupes de Lie.