

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum
Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

František Havelka

Teorie Dürerovy soustavy a některých mechanických konstrukcí perspektiv a
rovnoběžných projekcí

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol.
3 (1962), No. 1, 5--149

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/119788>

Terms of use:

© Palacký University Olomouc, Faculty of Science, 1962

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to
digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain
these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped
with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics
Library* <http://project.dml.cz>

TEORIE DÜREROVY SOUSTAVY
A NĚKTERÝCH MECHANICKÝCH KONSTRUKCÍ PERSPEKTIV
A ROVNOBĚŽNÝCH PROJEKcí

FRANTIŠEK HAVELKA

(Předloženo dne 21. října 1961)

1. ÚVODNÍ PŘIPOMÍNKY. PERSPEKTIVNÍ MECHANICKÉ POMŮCKY
PODLE FRESNAYE

1. Úvod

Z četné literatury jednající o deskriptivní geometrii, zvláště o zobrazovací metodě středového promítání a perspektivě i o technickém kreslení, je patrný zájem o mechanické kreslení perspektiv a rovnoběžných projekcí [1], [2], [11], [16], [17]. Tento zájem a snaha usnadnit a zkrátit pracné rýsování perspektiv se projevuje během dlouhého vývoje perspektivy [7], [9]. V přítomnosti je to otázka otevřená, jak o tom svědčí literatura a mnohé přístroje sestavené u nás, v Sovětském svazu ([2], [17] a další) i v kapitalistických zemích a známé též z firemní literatury (Knihovna vysokých škol technických, Praha-Klementinum). Je zde možno uvést např. *Perspektiv-Zeichenapparat* (-automat), systém Forster od firmy *Kuhlman KG*, Wilhelmshaven (firemní liter. čís. inv. 75 223), u něhož jsou kombinovány prvky optické s mechanickými. Dále perspektivní přístroje Ing. *Hayena* a *Venera*, zhotovené touž firmou. Italské výroby je *Perspettografo mod. 263*, Filotechnica Salmoiraghi S. p. A.) firemní liter. čís. inv. 30 109) aj. Tento přístroj je kombinován s přístrojem obdobným s přístrojem *Kinex*, právě tak jako československý patent *A. Salnera*. Z anglických je možno uvést např. *Navitta Binns isometric projector* (The navitta Drafting machines Ltd., Birmingham).

V literatuře i v praxi je dáována přednost jednoduchým mechanismům a pomůckám, jako je např. přístroj *Fresnayův*, případně těm, pomocí kterých lze rýsovat částečné úkoly při určení perspektivy.

Pozornosti si zasluhuje Fresnayova mechanická konstrukce perspektiv, kterou zvláště oceňuje *K. Bartel* a *I. A. Smirnov* [1], [2]. Bylo o ní pojednáno v autorově článku [7] a bylo jí tam užito i ke kreslení rovnoběžných projekcí, obrazů afinních,

podobných i shodných a navrženy některé *afinografy, axonografy, pantografy a kopírovací mechanické pomůcky*.

V tomto článku se budeme zabývat některými teoretickými i praktickými důsledky této mechanické konstrukce. Vyjdeme od středové projekce o bázi (O, π) a uvedeme její definici.

Definice 1,1 (*základu, báze středového, centrálního, perspektivního promítání*)

Základ, čili báze středového promítání pozůstává z vlastního bodu O , středu promítání a roviny π , středové průmětny, při čemž střed O není incidentní s průmětnou π . Označujeme ji báze (O, π) středového (centrálního, perspektivního) promítání.

Podobně lze vyslovit definici báze rovnoběžného (paralelního) promítání, případně ortogonálního promítání, při čemž je střed O nevlastní, nikoli incidentní s průmětnou π .

Je třeba si uvědomit, že středové promítání je odvozeno z procesu vidění jedním okem, při kterém úlohu středu O má střed oční čočky, úlohu průmětny plocha oční sítnice.

Středová projekce prostoru na rovinu v bázi (O, π) je případ singulárního kolineárního vztahu, který je jednoznačný ve směru od originálu (vzoru) k obrazu, tj. danému bodu prostoru je přiřazen právě jeden bod průmětny π . Tento vztah není však jednoznačný ve směru opačném, tj. ve směru od obrazu k originálu. Zatím co originál určuje jednoznačně svůj obraz, neurčuje obraz jednoznačně svůj vzor. Říkáme, že obraz není rovnocenný s originálem, obraz není ekvivalentní s originálem. A. O. Volberg [21] užívá výrazu adekvátní. Takové zobrazení nikoli ekvivalentní s originálem není upotřebitelné v technické praxi. Aby se stalo upotřebitelným, tj. aby byla zaručena jednoznačnost i v opačném smyslu od obrazu k originálu, je třeba učinit některá opatření, která mohou být různá. Těmito opatřeními postupuje uvedeně perspektivní promítání na stupeň středové **monoprojekce**, tj. druhu jednoho zobrazení, ekvivalentního s originálem, užitečného v technické praxi.

V deskriptivní geometrii a v jejích technických aplikacích má pro dosažení jednoznačnosti zobrazení značný význam sdružení dvou perspektivních projekcí vyhovujících určitým podmínkám. Vyslovíme definici.

Definice 1,2 (*Hauckovy soustavy dvou středových promítání*)

Soustava dvou středových promítání o bázích $(^1O, ^1\pi)$, $(^2O, ^2\pi)$ se nazývá Hauckova soustava, má-li tyto vlastnosti:

1. *Oba středy promítání $^1O, ^2O$ i obě průmětny $^1\pi, ^2\pi$ jsou od sebe různé.*
2. *Střed 1O není incidentní s průmětnou $^1\pi$, střed 2O není incidentní s průmětnou $^2\pi$.*
3. *Přímka určená oběma středy, $s \equiv ^1O^2O$, neprotíná průsečnici x obou rovin $^1\pi, ^2\pi$.*

(Obr. 1.) Budeme ji označovat: $H(O, \pi)$.

Pro další úvahy připomeneme některé další pojmy definicemi.

Definice 1,3 (středné)
Středná (přímka středů) $s \equiv {}^1O^2O$ Hauckovy soustavy dvou středových promítání je přímka určená oběma středy promítání.

Definice 1,4 (uzlových bodů)
Společné body středů $s \equiv {}^1O^2O$ s oběma průmětnami ${}^1\pi, {}^2\pi$ se nazývají uzlové body Hauckovy soustavy: ${}^2K_1 \equiv {}^1O^2O \cdot {}^1\pi$, ${}^1K_2 \equiv {}^1O^2O \cdot {}^2\pi$.

Definice 1,5 (základnice soustavy)
Základnice x Hauckovy soustavy dvou středových promítání je společná přímka obou průměten: $x \equiv {}^1\pi \cdot {}^2\pi$.

Po zavedení těchto pojmů je možno vyslovit důležitou Hauckovu větu.

Věta 1,1. *Nechť je dána Hauckova soustava dvou středových promítání $H(O, \pi)$ a bod A zobrazovaného objektu různý od obou středů promítání a nikoli incidentní se střednou s . Nechť jsou A_1, A_2 průměty bodu A z obou středů promítání do příslušných průměten:*

$$A_1 \equiv {}^1OA \cdot {}^1\pi, \quad A_2 \equiv {}^2OA \cdot {}^2\pi.$$

Pak přímky určené těmito body s příslušnými uzlovými body ${}^2K_1, {}^1K_2$ se protínají v bodu l incidentním se základnicí x (obr. 1).

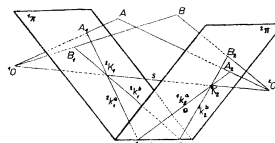
Důkaz. Důkaz správnosti věty spočívá na axiomech a základních větách stereometrie, jejichž znalost je předpokládána. Uvažme bod A objektu. Oba středy promítání ${}^1O, {}^2O$ a bod A jsou body od sebe různé a nikoli kolinéární. Určují právě jednu rovinu α , s kterou jsou incidentní oba uzlové ${}^2K_1, {}^1K_2$ i průměty A_1, A_2 . Rovina protíná obě průmětny v přímkách $A_1{}^2K_1, A_2{}^1K_2$, které ležící v téže rovině α , jsou různoběžné nebo rovnoběžné. Protože jsou tyto přímky incidentní po řadě s rovinami ${}^1\pi, \text{ resp. } {}^2\pi$, protínají se na jejich průsečnici x , v bodě vlastním nebo nevlastním, cbd .

Aby bylo možno v dalších úvahách výroky formulovat stručněji, vyslovíme další definice.

Definice 1,6 (ordinál, uzlových přímek)
Přímky ${}^2k_1 \equiv A_1{}^2K_1, {}^1k_2 \equiv A_2{}^1K_2$, o nichž se mluví v Hauckově větě, se nazývají ordinály bodu A , nebo též uzlové přímky bodu A .

Větu Hauckovu můžeme vyslovit i v širší formě.

Věta 1,2 (rozšířená Hauckova věta)
Nechť je dána Hauckova soustava dvou středových promítání a body $A, B, C \dots$ útvaru splňující podmínky uvedené ve větě 1,1. Pak jejich průměty $A_1, B_1, C_1 \dots$



Obr. 1

resp. $A_2, B_2, C_2 \dots$ se promítají z příslušných uzlových bodů 2K_1 , resp. 1K_2 perspektivními svazky přímek o ose perspektivity v základnici x . Jinak oba svazky určují na základnici x totožné bodové řady.

Důkaz správnosti věty je zřejmý. Je to přímý důsledek věty 1,1 při znalosti pojmu perspektivity svazku přímek.

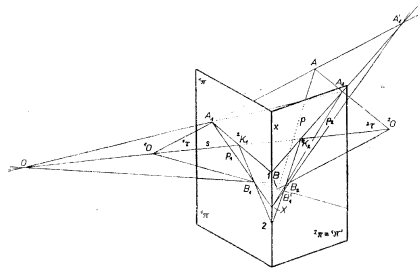
Daný bod A se zobrazuje v určitou jedinou dvojici bodů A_1, A_2 . Zobrazení $A \rightarrow (A_1, A_2)$ je jednoznačné. Lze snadno dokázat, že zobrazení je jednoznačné i v opačném směru, tj. že platí: Dvojice průmětů A_1, A_2 určuje právě jeden bod A útvaru, jestliže se ordinály A_1, A_2 bodů A_1, A_2 protínají na základnici x . Platí tedy tato věta:

Věta 1.3. Uvažované zobrazení v Hauckově soustavě je ekvivalentní s originálem, jestliže je splněna podmínka právě vyslovená.

Důkaz. a) Nechť je dána Hauckova soustava $H(O, \pi)$ a bod A vyhovující podmínkám uvedeným v Hauckově větě. Že zobrazení $A \rightarrow (A_1, A_2)$ je jednoznačné, vyplývá jednoduše z axiomů o určenosti přímky a roviny, z vět o společných bodech dvou přímek incidentních s touž rovinou a o společných bodech přímky s rovinou, tedy ze základních vět planimetrie a stereometrie.

b) Nechť je dána Hauckova soustava (obr. 1) a průměty A_1, A_2 , pro které platí: ${}^2K_1A_1, {}^1K_2A_2$ mají společný bod I vlastní nebo nevlastní na základnici x . Obě přímky ${}^2K_1A_1, {}^1K_2A_2$ jsou různoběžné, případně rovnoběžné a určují rovinu α . Tato rovina je incidentní s oběma středů ${}^1O, {}^2O$, neboť obsahuje oba uzlové body ${}^2K_1, {}^1K_2$ a tedy obsahuje všechny body přímky ${}^2K_1, {}^1K_2$. Z téhož důvodu je rovina incidentní s oběma promítacími přímkami ${}^1OA_1, {}^2OA_2$, které jsou tudíž různoběžné nebo rovnoběžné a určují právě jeden bod vlastní nebo nevlastní, cbd.

Dříve než přistoupíme k užití Hauckovy věty, uvedeme některé další poznatky vyplývající z této věty a které se v literatuře zpravidla neuvádějí. Jsou v úzkém vztahu s důležitými pojmy, jako je pojem perspektivních trojúhelníků v prostoru i v rovině,



Obr. 2

pojem perspektivní kolineace, jež je základním pojmem středového a perspektivního promítání apod.

Nechť je dána Hauckova soustava a dva body A, B různé od obou středů ${}^1O, {}^2O$ a uzlových bodů ${}^2K_1, {}^1K_2$ a nikoli incidentní se střednou ${}^1O, {}^2O$ a se základnicí x . Pak jejich průměty A_1, A_2 , resp.

B_1, B_2 vyhovují Hauckově větě: $A_1^2 K_1, A_2^1 K_2 \equiv l \in x, B_1^2 K_1, B_2^1 K_2 \equiv 2 \in x$ (obr. 2). Pak platí následující věta.

Věta 1,4 (speciální Hauckova věta)

Protíná-li přímka AB základnici x v bodě X , pak přímky $p_1 \equiv A_1 B_1, p_2 \equiv A_2 B_2$ protínají základnici x v témže bodě X . Jinak, přímky p_1, p_2 určují rovinu π (obr. 2).

Důkaz. První promítací rovina ${}^1\tau \equiv ({}^1O, AB)$ přímky AB je incidentní podle axiomu charakteristického pro rovinu se všemi body přímky $p \equiv AB$, tedy též s bodem X . Tato promítací rovina obsahuje první průměty A_1, B_1 bodů A, B , obsahuje tedy všechny body průmětu $A_1 B_1$. Body A_1, B_1 jsou incidentní s rovinou ${}^1\pi$, jsou s ní tedy incidentní všechny body této přímky. Přímky $AB, A_1 B_1$ leží v téže rovině mají společný bod, který je bodem základnice x , a je to tedy bod X .

Totéž platí pro druhou promítací rovinu ${}^2\tau \equiv ({}^2O, AB)$, která obsahuje obě přímky $AB, A_2 B_2$, jež mají proto společný bod. Jelikož však přímka $A_2 B_2$ je incidentní s rovinou ${}^2\pi$, protínají se obě jmenované přímky v rovině ${}^2\pi$, tedy v bodě X základnice x , cbd.

Promítneme oba body A, B ze středu 1O do roviny ${}^1\pi'$, kterou ztotožníme s rovinou ${}^2\pi$. O průmětech A'_1, B'_1 bodů A, B ze středu 1O do roviny ${}^1\pi'$ platí tato věta:

Věta 1,5. Průmět A'_1 bodu A ze středu 1O do roviny ${}^1\pi' \equiv {}^2\pi$ je incidentní s ordinálou ${}^1K_2 A_2$ bodu A v rovině ${}^2\pi$.

Důkaz (obr. 2)

Průmět A'_1 bodu A je incidentní s promítací přímkou 1OA , která je dále incidentní např. s rovinou $\alpha \equiv {}^1O^2OA$. S ní je však incidentní ordinála ${}^1K_2 A_2$, ležící též v druhé průmětně ${}^2\pi$, a proto se přímky ${}^1OA, {}^1K_2 A_2$ protínají v bodě A'_1 , uvažovaném to průmětu bodu A ze středu 1O do roviny ${}^2\pi$, cbd.

O průmětech A'_1, B'_1 bodů A, B je možno vyslovit větu.

Věta 1,6. Přímka určená průměty A'_1, B'_1 bodů A, B ze středu 1O do roviny ${}^1\pi' \equiv {}^2\pi$ je incidentní s průsečíkem $X \equiv AB \cdot x \equiv A_1 B_1 \cdot x = A_2 B_2 \cdot x$.

Důkaz (obr. 2)

Přímka $A'_1 B'_1$ je incidentní s rovinou ${}^1\tau$, promítací rovinou přímky AB ze středu 1O . S ní je též incidentní přímka $A_1 B_1$, proto mají obě přímky $A'_1 B'_1, A_1 B_1$ společný bod. Jelikož je přímka $A_1 B_1$ incidentní s rovinou ${}^1\pi$ a přímka $A'_1 B'_1$ incidentní s rovinou ${}^1\pi' \equiv {}^2\pi$, protínají se obě přímky $A'_1 B'_1, A_1 B_1$ na základnici x . Průsečík ten je však bod X , s kterým je incidentní i přímka AB i $A_2 B_2$ podle věty 1,4, cbd.

V obou průmětnách ${}^1\pi, {}^2\pi$ i mimo ně je v obr. 2 patrná řada trojúhelníků, např. $\triangle A_1 B_1^2 K_1, \triangle A B^2 K_1, \triangle A_2 B_2^1 K_2, \triangle A'_2 B'_2^1 K_2, \dots$ Platí mezi nimi vztahy, které můžeme vyjádřit známou důležitou větou Desarguesovou. Jde o perspektivní trojúhelníky (perspektivně kolineární trojúhelníky).

Platí následující věty, které uvedeme bez důkazu.

Věta 1,7. Oba trojúhelníky, $\triangle A_1 B_1^2 K_1, \triangle A_2 B_2^1 K_2$, jsou perspektivní. Střed jejich perspektivity O je incidentní s přímkou středů ${}^1O^2O$, osa perspektivity je základnice x .

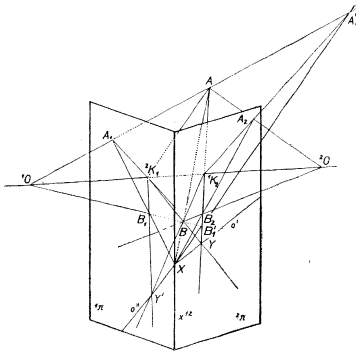
Věta 1,8. Oba trojúhelníky, $\triangle AB^2K_1$, $\triangle A_1B_1^2K_1$, jsou perspektivní. Střed perspektivnosti je střed promítání 1O , osa jejich perspektivnosti je přímka X^2K_1 (obr. 3).

Věta 1,9. Oba trojúhelníky, $\triangle AB^1K_2$, $\triangle A_2B_2^1K_2$, jsou perspektivní. Střed jejich perspektivnosti je střed promítání 2O , osa perspektivnosti je přímka X^1K_2 (obr. 3).

Věta 1,10. Oba trojúhelníky, $\triangle AB^2K_1$, $\triangle A_2B_2^1K_2$, jsou perspektivní. Střed jejich perspektivnosti je střed promítání 2O , osa perspektivnosti je přímka o' daná bodem X a průsečíkem $Y' \equiv B^2K_1$, $B_2^1K_2$ (obr. 3).

Věta 1,11. Oba trojúhelníky, $\triangle AB^1K_2$, $\triangle A_1B_1^2K_1$, jsou perspektivní. Střed jejich perspektivnosti je střed promítání 1O , osa perspektivnosti je přímka o'' daná bodem X a průsečíkem $Y'' \equiv B^1K_2$, $B_1^2K_1$ (obr. 3).

Důkazy všech vyslovených vět spočívají v užití Desarguesovy věty. Pro uvedené páry trojúhelníků je splněna vždy jedna z podmínek pro perspektivní trojúhelníky



Obr. 3

týkající se buď přímek odpovídajících si bodů, nebo průsečíků odpovídajících si stran.

V aplikacích Hauckovy věty je důležitá perspektivnost trojúhelníků $\triangle A_2B_2^1K_2$, $\triangle A_1^1B_1^1K_2$, u nichž body A_1 , B_1 jsou průměty bodů A , B ze středu 1O do roviny ${}^1\pi'$, kterou ztotožníme s rovinou ${}^2\pi$, jak je uvedeno ve větách 1,5; 1,6 a v obr. 3.

Věta 1,12. Trojúhelníky, $\triangle A_2B_2^1K_2$, $\triangle A_1^1B_1^1K_2$ jsou perspektivní. Střed jejich perspektivnosti je uzlový bod 1K_2 , osa perspektivnosti je základnice x .

Důkaz. (obr. 3)

Uzlový bod 1K_2 je jejich společným vrcholem. Podle věty 1,5

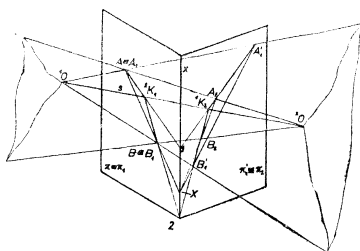
procházejí přímky spojující odpovídající si body $A_2A_1^1$, $B_2B_1^1$ uzlovým bodem 1K_2 , středem perspektivnosti obou trojúhelníků. Odpovídající si strany $A_2B_2 - A_1^1B_1^1$, $A_2^1K_2 - A_1^1K_2$, $B_2^1K_2 - B_1^1K_2$ mají společné body incidentní se základnicí x , cbd.

Pro další úvahy je důležitá věta, která je zvláštním případem věty 1,12.

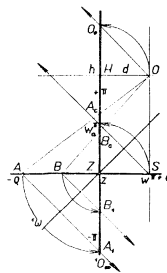
Věta 1,13. Necht' je dána Hauckova soustava $H(O, \pi)$. Průměty rovinného útvaru incidentního s rovinou ${}^1\pi$ z obou středů 1O , 2O do roviny ${}^2\pi$ jsou perspektivně kolineární. Střed persp. kolíneace je uzlový bod 1K_2 roviny ${}^2\pi$, osou kolíneace je základnice x (obr. 4).

Důkaz. Volme dva různé bod A , B v rovině ${}^1\pi$. Vzhledem k vztahům v obr. 2 je tato rovina $\pi \equiv {}^1\pi \equiv (A, B, x)$. Proto body A , resp. B splynou se svými průměty A_1 ,

resp. B_1 . Průměty obou bodů A, B ze středu 1O do roviny ${}^1\pi' \equiv {}^2\pi$ necht' jsou A'_1, B'_1 . Průměty těchto bodů ze středu 2O do roviny ${}^2\pi$ necht' jsou A_2, B_2 . Podle věty 1,4 jsou přímky AB, A_1B_1, A_2B_2 incidentní s tímž bodem X základnice x . Podle věty 1,6 je s tímto bodem incidentní též přímka $A'_1B'_1$. Podle věty 1,12 jsou průměty A_2B_2 ve vztahu perspektivní kolineace pro střed v uzlovém bod 1K_2 roviny ${}^2\pi \equiv \pi'$ a pro osu v základnici x , cbd.



Obr. 4



Obr. 5

Jak bylo dříve uvedeno, není zobrazení v dané bázi perspektivního promítání (O, π) jednojednoznačné. Aby bylo dosaženo jednoznačnosti i ve smyslu od obrazu k vzoru v této jediné bázi, je možno uvažovat rovinu q různou od průmětny π a nikoli incidentní se středem O . Dá se dokázat, že její zobrazení v dané bázi je jednojednoznačné.

Necht' je mimo bázi perspektivního promítání (O, π) dána rovina uvedená vlastností (obr. 5). Platí věta:

Věta 1,14. *Perspektivní zobrazení roviny q udané vlastností v perspektivě o bázi (O, π) je zobrazení ekvivalentní s originálem (jednojednoznačné zobrazení).*

Důkaz správnosti věty vyplývá z platnosti Hauckovy věty. Stačí uvážit Hauckovu soustavu o bázích (O, π) . ($O', \pi' \equiv q$), kde O' je libovolný bod, a sestavit v ní průměty roviny q . Průmět v druhé bázi je zřejmě identita.

Ostatně správnost věty vyplývá ze základních pouček elementární geometrie.

Toto zobrazení je prostorová perspektivní kolineace uvádějící obě roviny π, q v jednojednoznačný vztah. Jejím zavedením obdržíme důležitou soustavu persp. promítání (O, π, q) . Zvlášť se budeme zabývat soustavou (O, π, q) , v níž je střed promítání O bod vlastní neincidentní s žádnou z rovin π, q a obě roviny π, q jsou k sobě kolmé. Touto soustavou se poněkud zabýval už *Leone Battista Alberti* (1404–1462) a zvláště pak *Albrecht Dürer* (1471–1528). Dürer stojí v čele řady umělců i mechaniků, později matematiků a techniků, tedy zájemců o perspektivní zobrazení v této soustavě i o mechanické pomůcky ke kreslení perspektivních obrazů

předmětů stojících na rovině ϱ , a to při středu O vlastním i nevlastním O_{∞} . Tuto soustavu nazveme *soustavou Dürerovou* (obr. 5, 6). Zavedeme ji definicí.

Definice 1,7 (*rozšířeného základu, rozšířené báze perspektivního promítání, pravoúhlé soustavy perspektivního promítání, Dürerovy soustavy*)

Rozšířená báze perspektivního aktivního promítání, Dürerova vzájemná poloha prvků rozšířené báze perspektivního promítání, prostě Dürerova soustava perspektivního promítání je skupina středu promítání O , průmětny π a základní roviny ϱ mající tyto vlastnosti:

1. *Střed O perspektivního promítání je vlastní bod nikoli incidentní s perspektivní průmětnou π a s rovinou ϱ .*

2. *Obě roviny π a ϱ jsou vlastní od sebe různé, π je zpravidla vodorovná, ϱ k ní kolmá a vodorovná, ležící zpravidla pod středem O , jak ukazují např. obr. 5, 6. Označujeme ji $(O, \pi \perp \varrho)$.*

Dürerova soustava má v perspektivním zobrazování i v teorii mechanických konstrukcí perspektiv značnou důležitost. Je přirozeným základem pro polohu architektur, pozemních staveb, strojů i jiných předmětů, jejichž perspektivu rýsuje. Z toho důvodu se jí budeme v této práci zvlášť zabývat. Ide zřejmě o dvojúběžníkovou perspektivu, u níž je předpokládána znalost příslušných pojmů, jako je základnice, horizont atd.

Definice 1,8 (*kosoúhlé soustavy perspektivního zobrazování, soustavy trojúběžníkové perspektivy*)

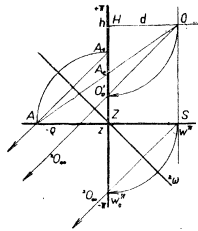
Kosoúhlu soustavou perspektivního promítání rozumíme skupinu středu promítání O , průmětny π a základní roviny ϱ , které splňují podmínky uvedené v předešlé definici až na kolmost základní roviny ϱ k perspektivní průmětně π . Přitom průsečnici základní roviny s perspektivní průmětnou uvažujeme zpravidla vodorovnou. Označujeme ji (O, π, ϱ) .

Je známo, že soustava základní roviny ϱ je v perspektivně kolineárním vztahu se svou perspektivou ϱ_{π} v průmětně π Dürerovy soustavy. Deskriptivní geometrie učí, jak je třeba zobrazovat útvary třírozměrné do roviny, aby jejich obrazy byly ekvivalentní s originálem. Uplatníme tuto charakteristickou vlastnost deskriptivní geometrie i v Dürerově soustavě a v kosoúhlé soustavě persp. promítání tím, že uvedeme rovinu ϱ i střed zobrazení O do průmětny π . To povede k pojmu obrazu Dürerovy soustavy, který je s ní ekvivalentní. Uvedení obou prvků do roviny uskutečnime sklopením základní roviny ϱ Dürerovy soustavy, resp. otočením základní roviny kosoúhlé soustavy perspektivního promítání kolem základnice z do π a otočením středu O kolem horizontu, resp. kolem úběžnice základní roviny ϱ do perspektivní průmětny π . O tomto uvedení prvků obou soustav do téže roviny π jedná *věta Stevinova* (*Simon Stevin*, 1548–1620) a *speciální věta Stevinova*. Dříve než ji uvedeme, připomeneme bez důkazu pomocnou větu, známou z deskriptivní geometrie perspektivního promítání.

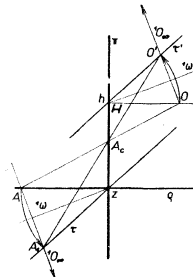
Věta 1,15. *Sklopení základní roviny ϱ a středu perspektivního promítání O Dürerovy soustavy kolem základnice z , resp. kolem horizontu h , do perspektivní průmětny π*

je možno nahradit kosouhlým promítáním ${}^1O_\infty$, nebo ${}^2O_\infty$ vzhledem k základní rovině a perspektivní průmětně a ortogonálním vzhledem k rovině souměrnosti ${}^1\omega$ nebo ${}^2\omega$ (obr. 5, 6). Právě tak lze nahradit otočení základní roviny q do libovolné roviny τ incidentní se základnicí z a otočení středu perspektivního promítání O kolem h do roviny $\tau' \parallel \tau$ incidentní s h kosouhlým promítáním ${}^1O_\infty$ nebo ${}^2O_\infty$ vzhledem k základní rovině q a perspektivní průmětně π a ortogonálním vzhledem k rovině ${}^1\omega$ nebo ${}^2\omega$ půlící odchylku roviny q, τ (obr. 5, 6, 7, ...).

Abychom se mohli stručně vyjadřovat, je výhodné tato promítání pojmenovat.



Obr. 6



Obr. 7

Definice 1,9 (Ω -promítání)

Ortogonální promítání vzhledem k první rovině souměrnosti ${}^1\omega$ základní roviny q Dürerovy soustavy do perspektivní průmětny π , které je kosouhlým promítáním vzhledem k základní rovině q i perspektivní průmětně π , které nahradí sklopení základní roviny q do perspektivní průmětny π a o kterém mluví věta 1,15, se nazývá ${}^1\Omega$ -promítání (${}^1\Omega$ -projekce) aplikované v dané Dürerově soustavě $(O, \pi \perp q)$ (aplikované na základní rovinu q Dürerovy soustavy).

Ortogonální promítání vzhledem k druhé rovině souměrnosti ${}^2\omega$, které má tytéž vlastnosti, se nazývá ${}^2\Omega$ -promítání (${}^2\Omega$ -projekce) aplikované v Dürerově soustavě.

Věta 1,16 (Stevinova)

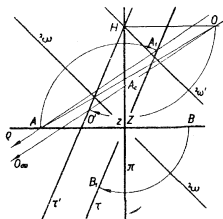
Nechť je v dané Dürerově soustavě $(O, \pi \perp q)$ základní rovina q zobrazena středově z bodu O do průmětny π . Pak perspektiva q_c roviny q je invariantní vzhledem k otočení základní roviny q kolem základnice z do roviny τ incidentní s touto základnicí a vzhledem k současnému otočení středu perspektivního promítání O kolem horizontu o tentýž úhel v témž smyslu do polohy O' incidentní s rovinou $\tau' \parallel \tau$ (obr. 7, 8, 9).

Důkaz. Sestrojíme perspektivní průměty A_c, B_c, \dots bodů A, B, \dots základní roviny q a uvažujme otočení základní roviny q do roviny τ v kladném smyslu a otočení středu O v témž smyslu do polohy O' incidentní s rovinou $\tau' \parallel \tau, \tau' \in h$. Body A, B, \dots základní

roviny přejdou otočením do polohy A_1, B_1, \dots . K důkazu správnosti věty stačí uvažovat jeden bod základní roviny, např. bod A , a ukázat, že A_1O' je incidentní s jeho perspektivou A_c .

Podle věty 1,15 lze otočení nahradit rovnoběžným promítáním kolmým k první rovině souměrnosti ${}^1\omega$, tj. středovým promítáním o bázi $({}^1O_\infty, \tau)$. Jsou tedy dána dvě středová promítání, $(O \equiv {}^2O, \pi)$, $({}^1O_\infty, \tau)$ a jsou aplikována na bod A . Platí proto Hauckův teorém. Podle něho se přímky $A_c{}^1K_2, A_1{}^2K_1$ protínají v bodě 1 incidentním se základnicí z , při čemž ${}^1K_2, {}^2K_1$ jsou uzlové body incidentní s rovinami π, τ .

Uvažme středy ${}^2O, {}^3O_\infty$ (obr. 9), jejich středná ${}^2O{}^3O_\infty \equiv {}^2OH \parallel \varrho$. V obou projekcích $({}^2O, \pi)$, $({}^3O_\infty, \tau)$ platí pro bod A Hauckův teorém. Přímky $A_c{}^3K_\pi, A_3{}^2K_\tau$ se protínají v bodu 2 incidentním s průsečnicí z obou rovin π, τ . Přitom jsou ${}^3K_\pi \equiv H, {}^2K_\tau$ oba uzlové body incidentní s těmito rovinami. A_3 je průmět bodu A v projekci $({}^3O_\infty, \tau)$, je tedy $AA_3 \equiv A2 \perp z$. Podle toho je přímka HA_3



Obr. 8

incidentní s perspektivou A_c bodu A . (HA_3 není nic jiného než perspektiva hloubkové přímky AA_3 roviny ϱ .)

Přímky AO, HA_3 jsou tedy incidentní s perspektivou A_c . Dále platí: $AA_3 \parallel OH \perp \pi$, $AA_1 \parallel OO'$ a proto jsou roviny $\varphi \equiv (AA_1A_3) \parallel \varphi' \equiv (OO'H)$.

Jelikož $\tau \parallel \tau'$, platí: $A_1A_3 \parallel O'H$.

Dále platí: $\triangle AA_1A_3 \sim \triangle OO'H$. Jelikož jsou trojúhelníky incidentní s rovinami φ, φ' , jsou homotetické podle středu $A_c \equiv AO, A_3H$. Je tedy přímka A_1O' určená přiřazenými body A_1, O' v této homotetii incidentní s jejím středem A_c , cbd.

Stejně bychom vedli důkaz správnosti věty o otočení základní roviny ϱ obecné soustavy perspektivního promítání do roviny τ .

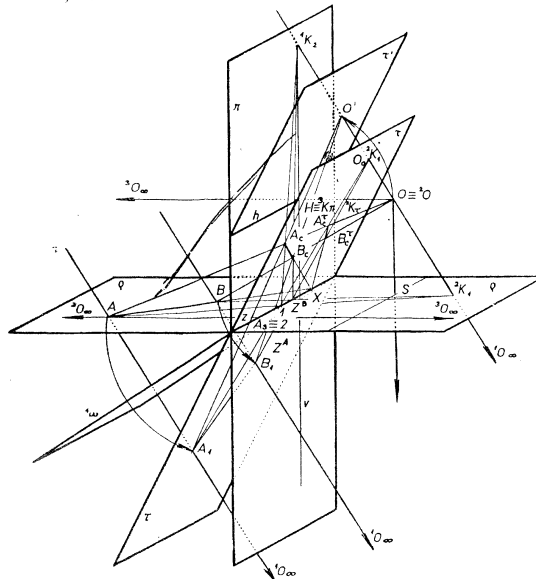
Vyslovíme a dokážeme další větu, která je speciálním případem Stevinovy věty. Bude mít v některých mechanických konstrukcích perspektiv základní význam.

Věta 1,17 (speciální Stevinova věta)

Nechť je dána Dürerova soustava nebo obecná soustava perspektivního promítání a perspektivní průmět základní roviny ϱ . Sklopíme-li základní rovinu ϱ kolem základnice z do perspektivní průmětny π a střed perspektivního promítání O kolem horizontu h do persp. průmětny v též smyslu sklápění (tj. aplikujeme-li na základní rovinu Dürerovy soustavy a střed O ${}^1\Omega$ -projekci, pak je mezi sklopenou soustavou základní roviny ϱ a její perspektivou rovinný perspektivně kolineární vztah. Jeho střed je sklopený střed perspektivního promítání O_0 , osa je základnice z , úběžnice soustavy základní roviny je horizont h a úběžnice soustavy persp. průmětny π je w_1 , distanční přímka w sklopená se základní rovinou.

Důkaz (obr. 10). K důkazu správnosti speciální Stevinovy věty užijeme důsledku

Hauckova teorému vyjádřeného větou 1,13. Pro přehled užíjme v obr. 10 označení jako v této větě. Podle ní je dvojice průmětů rovinné soustavy ${}^1\pi \equiv \varrho$ z dvou různých středů ${}^1O_\infty, {}^2O$ do roviny ${}^2\pi \equiv {}^1\pi'$ v perspektivně kolineárním vztahu se středem kolineace v uzlovém bodě 1K_2 incidentním s průmětnou ${}^2\pi$ a o ose kolineace v průsečnici obou rovin ${}^1\pi, {}^2\pi$.



Obr. 9

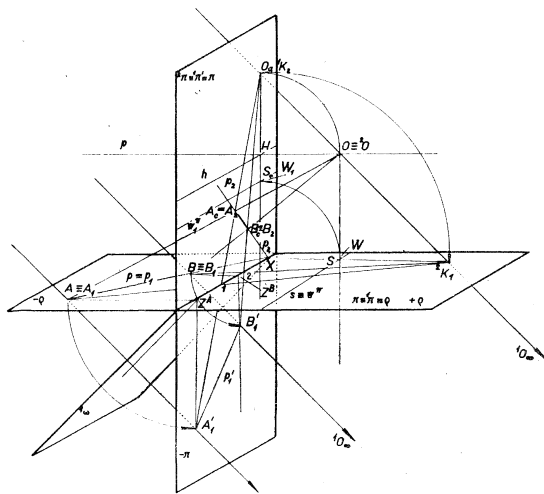
Podle věty 1,15 je možno nahradit sklopení základní roviny ϱ do π ${}^1\Omega$ -promítáním, tedy středovým promítáním o středu ${}^1O_\infty$.

Nechť je tedy dána Dürerova soustava $(O, \pi \perp \varrho)$ a sklopení její základní roviny ϱ do π . Obě roviny soustavy označíme s ohledem na větu 1,13 ${}^1\pi \equiv \varrho, {}^2\pi \equiv {}^1\pi'$ a oba středy promítání $O \equiv {}^2O, {}^1O_\infty$. Středná je $o \equiv {}^1O_\infty {}^2O$, uzlové body ${}^2K_1 \in \varrho, O_o \equiv {}^1K_2 \in \pi$.

Oba průměty, A', B', \dots ze středu ${}^1O_\infty$ (sklopená soustava základní roviny do π) do perspektivní průmětny π a perspektivní průměty $A_c \equiv A_2, B_c \equiv B_2, \dots$ jsou

v perspektivně kolineárním vztahu. Středem této kolineace je uzlový bod $O_0 \equiv {}^1K_2$, její osou je průsečnice obou rovin, základnice z , cbd.

Podle Hauckova teorému se promítají průměty $A_1 \equiv A, B_1 \equiv B, \dots, A_c \equiv A_2, B_c \equiv B_2 \dots$ z uzlových bodů ${}^2K_1, {}^1K_2$ perspektivními svazky přímek o středech v těchto uzlových bodech a ose v základnici z , jak je též vidět v obr. 10.



Obr. 10

Je možno snadno se přesvědčit, že platí i věta 1.4. Přímky $p \equiv AB, p_1 \equiv A_1B_1, p_2 \equiv A_2B_2$ a dokonce ještě $p'_1 \equiv A'_1B'_1$ jsou incidentní s tímž bodem $X \in z$.

Je třeba připomenout, že otočená soustava základní roviny q do π se zpravidla označuje q_1 , např. body A_1, B_1, C_1, \dots , jak ukazují obr. 5, 6. Jde totiž o půdorysy v Mongeově projekci přidružené k perspektivnímu promítání, je-li vzata za nárysnu perspektivní průmětna π .

Z věty Stevinovy můžeme vyvodit důsledek. Je-li dána Dürerova soustava $(O, \pi \perp \perp q)$, je dáno perspektivní zobrazení základní roviny do perspektivní průmětny π . Obě roviny jsou v perspektivně kolineárním prostorovém vztahu, který se dá některou Ω -projekcí zobrazit podle Stevinovy věty v perspektivně kolineární rovinný vztah v perspektivní průmětně π . Můžeme tedy zobrazit Dürerovu soustavu perspektivní

kolineací v rovině π o známém středu, ose a úběžnici základní roviny. Můžeme to vyjádřit přesněji větou.

Věta 1,18. *Dané Dürerově soustavě můžeme přiřadit (dvojnásobně) perspektivní kolineaci souměrných rovinných soustav ϱ_1, ϱ_c určenou středem O_0 (O'_0), osou z , a úběžnici soustavy základní roviny $u_c^p \equiv h$. π je perspektivní průmětna, ϱ_1 (ϱ'_1) je ${}^1\Omega$ -projekce (${}^2\Omega$ -projekce) základní roviny ϱ, O_0 (O'_0) je ${}^1\Omega$ -projekce (${}^2\Omega$ -projekce) středu O , h je horizont soustavy. — Také však obráceně, dané perspektivní kolineaci (O_0, z, h) přísluší dvojnásobně určitá Dürerova soustava ($O, \pi \perp \varrho$).*

Důkaz. a) Správnost první části věty vyplývá ze speciální Stevinovy věty a z toho, co bylo právě řečeno.

b) Správnost věty obráceně prokážeme, sestrojíme-li k dané rovinné perspektivní kolineaci příslušnou Dürerovu soustavu. To lze skutečně učinit. Budiž dána perspektivní kolineace dvou souměrných rovinných soustav ${}^1\varrho, {}^2\varrho$ středem O_0 , osou o a úběžnicí u^{1p} soustavy ${}^1\varrho$.

Sestrojíme slabě samodružnou přímkou $v_1 \equiv v_c \perp o$ a vytkneme její průsečíky H, Z s úběžnicí u^{1p} a s osou o . Vztýčme v bodu H kolmici k rovině nákresu a nanese na ní úsečku $HO = HO_0$ ve smyslu nad rovinu nákresu. Takový bod je jediný. Sestrojíme rovinu ϱ incidentní s osou kolineace o a kolmou k rovině nákresu. Taková rovina je též jediná. Tim je sestrojena Dürerova soustava přiřazená dané persp. kolineaci. V ní je rovina nákresu perspektivní průmětna, bod O je střed promítání, $HO_0 = HO$ distance, HZ výška oka, ϱ základní rovina. — Vzhledem k dvojímu možnému určení středu O jsou takové soustavy přiřazené dané perspektivní kolineaci dvě, cbd.

Omezíme-li se na jedno promítání Ω a volíme-li ve větě 1,18 jeden z možných středů Dürerovy soustavy, můžeme oba pojmy, tj. pojem Dürerovy soustavy perspektivního promítání a pojem perspektivní kolineace dvou souměrných rovinných soustav, pokládat za pojmy ekvivalentní. — Vyslovíme proto definici.

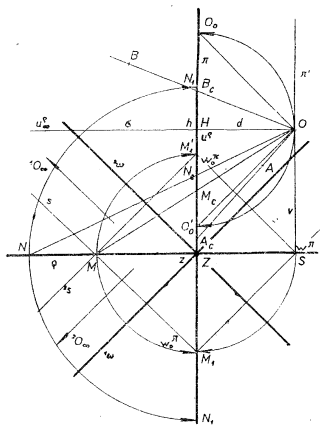
Definice 1,10 (*obrazu Dürerovy soustavy*)

Obrazem Dürerovy soustavy ($O, \pi \perp \varrho$) perspektivního promítání rozumíme rovinnou perspektivní kolineaci danou zpravidla středem O_0 (Ω — průmětem středu soustavy), osou z (základnicí soustavy) a úběžnicí $u_c^p \equiv h$ (horizontem soustavy). Obraz soustavy označujeme (O_0, z, h).

Při konstrukcích perspektiv objektů v dané Dürerově soustavě se často stává, že můžeme volit určovací prvky objektu, např. body, nebo je dokonce tato volba žádána. Např. je volit podstavu objektu v základní rovině ϱ dané soustavy mimo jiné jejím vrcholem A , a to:

- a) jeho půdorysem A_1 ,
- b) jeho perspektivou A_c .

Je důležitá otázka, jak volit bod základní roviny ϱ jeho půdorysem A_1 , resp. jeho středovým průmětem A_c , aby tento středový průmět A_c byla perspektiva bodu A , tj. aby bod A byl incidentní s viditelným poloprostorem Dürerovy soustavy. O tom je možno vyslovit větu.



Obr. 11

Věta 1,19. a) Je-li aplikováno v dané Dürerově soustavě ${}^1\Omega$ -promítání, jsou body základní roviny q viditelného prostoru po tomto promítání incidentní s polorovinou w_1^{π} , kde w_1^{π} je úběžnice soustavy persp. průmětny, $w_1^{\pi} \parallel z, w_1^{\pi} \perp z = d$ (obr. 11, obr. 10).

b) Je-li aplikováno v dané Dürerově soustavě ${}^2\Omega$ -promítání, jsou body základní roviny q viditelného prostoru po tomto promítání incidentní s polorovinou w_1^{π} , kde w_1^{π} je úběžnice soustavy perspektivy, $w_1^{\pi} \parallel z, w_1^{\pi} \perp z = d$.

c) Polorovina w^{π} základní roviny q incidentní s viditelným prostorem se zobrazuje ze středu O do poloroviny hz persp. průmětny π (obr. 11).

Důkaz správnosti věty je na základě obr. 11 zcela jednoduchý.

2. Užití perspektivní kolíneace při některých mechanických konstrukcích perspektiv

V historickém vývoji mechanismů, sloužících usnadnění rýsování perspektiv, se uplatňovaly různé myšlenky. V době vzniku přístrojů koncem 15. stol., pak v 16. a 17. stol. byly konstruovány jednoduché mechanické pomůcky ke kreslení perspektiv existujících předmětů, *diagrafy*. Byly to pomůcky zpravidla opticko-mechanické a jejich základ byla Dürerova soustava perspektivního promítání. Perspektiva objektu v rovině π byla vhodně přenášena na jinou rovinu (*A. Dürer*), případně na základní rovinu π (*W. Jamitzler, L. Cardi da Cigoli, J. Burgi ...*) nebo byla vhodně umístěna přímo na perspektivní průmětně π (*B. Bramer*).

J. H. Lambert (1728–1777) sestrojil první *kolíneografy*, mechanické pomůcky usnadňující rýsování perspektiv rovinných obrazců, zpravidla incidentních se základní rovinou q Dürerovy soustavy. Základ jeho konstrukcí je ztotožnění průmětny π se základní rovinou q sklopením, zachování incidence při promítání a dokonce vztah perspektivně kolíneární objevený dříve *S. Stevinem* (1605).

V období rozkvětu kolíneografů počínajíc od 80. let min. století jsou konstruovány vlastní *perspektografy*, mechanismy k usnadnění rýsování perspektiv prostorových objektů zpravidla pomocí Mongeových průmětů. Je u nich užito zvláště průsečné metody konstrukce perspektivních obrazů ve spojení s třílineárním vztahem vzájemně orientovaných tří středových projekcí objektu (*Q. Hauck a j.*).

V prvním a druhém desetiletí tohoto stol. bylo navrženo několik konstrukcí perspektiv rovinných i prostorových objektů, které daly podnět k sestrojení mechanismů k usnadnění rýsování perspektiv. Jejich geometrickým základem je uvedený perspektivně kolineární vztah, o němž mluví Stevinova věta.

V r. 1909 byla provedena *C. de la Fresnayem* ve Francii konstrukce perspektivy obrazce incidentního se základní rovinou jako jeho středově kolineárního obrazu v perspektivní průmětně π . Přitom byla převedena perspektivní kolineace dvou soumíštných rovin v π v obecnou kolineaci soumíštných rovin tzv. *rozštěpením* perspektivní kolineace zavedeným v práci [7] a bylo využito některých vlastností této obecné kolineace [1], [7]. Konstrukce je popsána v práci *Les faisceaux à projeter* [6]. Tato konstrukce vede k sestrojení neobvykle jednoduché mechanické pomůcky k rýsování perspektiv, na níž upozorňují někteří současní geometři, jako *K. Bartel* [1] a *S. A. Smirnov* [2].

Perspektivní pravítko Fresnayovo slouží ve své původní formě k rýsování perspektiv obrazců ležících v základní rovině ρ , takže jde o kolineograf. Perspektivy kolmic k základní rovině je jím možno rýsovat za pomoci kružítka a příložného a trojúhelníkového pravítka. Při úpravě pravítka navrhované v této práci je možno konstrukci perspektivy obrazce v základní rovině i perspektivy výšek předmětu téměř zcela zmechanisovat a užít pravítka jako perspektografu. Mechanismus neodpovídá pro svou jednoduchost do té doby běžné definici perspektografu, jak je tomu např. u přístroje Hauckova, který obsahuje tři hlavní části, konající navzájem závislé pohyby. Perspektograf de la Fresnaye koná při kreslení perspektivy pohyby jako celek.

Perspektograf Fresnayův vysoce oceňuje *Kazimierz Bartel* ve svém spisu *Perspektywa malarska* [1]. Zdá se, že toto ocenění není oprávněné vzhledem k ostatním přístrojům, neboť konstrukce perspektivy pomocí tohoto přístroje není ryze mechanická ani po úpravě Bartelově a je jí nutno doplnit rýsováním pomocí pravítka a kružítka. Přesto nelze této mechanické pomůcce upřít důmysl a vtíp, zvláště když uvážíme její jednoduchost a přitom poměrně složitý její geometrický základ i možnost aplikace při mechanisaci ostatních elementárních geometrických transformací, jak bylo uvedeno v lit. [7].

S. A. Smirnov v Četveruchinově sborníku *Metody načertateľnoj geometrii...* [2] doporučuje užít k rozštěpení [7] dané perspektivní kolineace otočení o úhel $\gamma = 90^\circ$. V tomto případě dochází při konstrukci perspektiv k některým zjednodušením a výhodám.

Smirnov však své doporučení teoreticky důkazem nezdůvodňuje, čímž může při konstrukci dojít k nejasnostem a omylům.

Další tři přístroje sestavil profesor pražské německé techniky *Karel Mack*. V roce 1918 konstruoval za pomoci svých spolupracovníků *A. Schiebela* a *J. Tумы* a s příspěvkem československého ministerstva vyučování zčásti kovový perspektograf, který pak popsal ve *Zprávách vídeňské akademie* [24] a v časopise *Jahresbericht der deutschen*

Mathematikervereinigung [22] a prvně jej předvedl na schůzi německých matematiků v Jeně r. 1921. O jeho použití ve fotogrammetrii píše v *Technische Blätter* [25].

Zároveň sestrojil perspektograf s pausovacím papírem, který je možno nahradit celuloidovou deskou.

Autor dochází k základní myšlence přístroje, ke konstrukci perspektivy uvedené v [24], studiem středové projekce jako vztahu perspektivně kolineárního, tedy podobně jako de la Fresnaye. Perspektivu sestruje bez kružítka, jen pomocí příložníku, průsvitného papíru a šedesátistupňového pravoúhlého trojúhelníka.

Na základě zkušeností nabytých při konstrukci obou přístrojů sestrojil Karel Mack o několik roků později další perspektograf, tzv. nitový, který popisuje v týchž zprávách vídeňské akademie z r. 1922 [24].

Mackovy mechanismy jsou v jistém smyslu podobné přístroji Fresnayovu. Geometrický základ mechanismů obou autorů je tentýž, perspektivně kolineární vztah v perspektivní průmětně podle věty Stevinovy. Při kreslení perspektivy je u Mackových mechanismů posunováno pausovacím papírem nebo deskou ve směru hlavní vertikály, při užití Fresnayova přístroje je otáčeno celým pravítkem kolem jeho pevného bodu.

Budeme se zabývat některými teoretickými důsledky Fresnayovy mechanické konstrukce perspektiv a některými perspektivními mechanismy navrženými na základě této teorie. Mechanismy jsou neobyčejně jednoduché co se týče jejich sestavení i co se týče zacházení při rýsování perspektivních obrazů. Odpadají u nich některé závady jiných perspektivních mechanismů, jako složitost, poměrně vysoká cena, plynulost chodu součástí, otázka mazání aj. Další pozoruhodná výhoda této teorie spočívá v možnosti jejího využití při rýsování rovnoběžných projekcí a podobných i shodných obrazců k obrazcům daným.

Teorie Fresnayovy mechanické konstrukce perspektiv, příslušné pojmy a podstata Fresnayova mechanismu byly uvedeny v [1], [2], [7]. Základní myšlenka konstrukce spočívá, jak bylo uvedeno, ve využití některých vlastností obecně kolineárního vztahu dvou soumístných rovinných soustav. V taková obecně kolineární pole je převeden obraz Dürerovy soustavy (perspektivní kolineace podle Stevinovy věty) jeho *rozštěpením*, spočívajícím v otočení jednoho z perspektivně kolineárních polí o velikost libovolného úhlu $\gamma \neq 0^\circ, 180^\circ$ kolem středu perspektivní kolineace. Tim je každé slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ dané perspektivní kolineace přiřazen jeden střed perspektivity O^γ bodových řad a'_1, a_c (příotočení rovinné soustavy ϱ_1 do polohy ϱ'_1), umožňující konstrukci [7].

V teorii Fresnayovy konstrukce je však vylučováno rozštěpení otočením o velikost úhlu $\gamma = 0^\circ, 180^\circ$. Zdůvodnění bývá opomíjeno, a proto bude nyní uvedeno. Podle dosavadních znalostí o sestavení středu perspektivity O^γ platí tato věta:

Věta 2.1. *Střed perspektivity O^γ , přiřazený slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ při rozštěpení perspektivní kolineace otočením $\gamma = 0^\circ, 180^\circ$, je každý bod této samodružné přímky.*

Důkaz. Při rozštěpení perspektivní kolineace otočením o velikost úhlu $\gamma = 0^\circ$ je poloha všech bodů slabě samodružné přímky $a_1 \equiv a_c$ invariantní, $A'_1 \equiv A_1$, $B'_1 \equiv B_1$, $U'_{1\infty} \equiv U_{1\infty}$, ... Střed perspektivity O^a náležející této přímce je $O^a \equiv A'_1 A_c \cdot B'_1 B_c \equiv A'_1 A_c \cdot U'_{1\infty} U_c$. Protože obě přímky $A'_1 A_c$, $B'_1 B_c$ splývají, je správnost věty pro $\gamma = 0^\circ$ potvrzena.

Podobně je tomu při rozštěpení otočením o úhel $\gamma = 180^\circ$. Poloha bodu $U_{1\infty}$ je invariantní, $U'_{1\infty} \equiv U_{1\infty}$ a každý jiný bod A_1, B_1, \dots přejde v bod A'_1, B'_1, \dots diametrální k A_1, B_1, \dots podle středu perspektivní kolineace O_0 . Přímky $A'_1 A_c$, $B'_1 B_c$, $U'_{1\infty} U_c \dots$ splývají a každý jejich bod je středem O^a , cbd. Sestrojení perspektivy daného obrazce incidentního se základní rovinou ρ Dürerovy soustavy dané jejím obrazem obsahuje podle [7] jeho otočení o daný úhel γ , sestrojení přímky perspektivity o^a , samodružné přímky x , vedení dvou přímkou podél hran pravítka a narysování přímek dané dvěma body.

3. Návrh konstrukce kolineografu podle Fresnaye

Je třeba si všimnout sestrojení samodružné přímky x a přímky perspektivity o^a , jsou-li dána všechna data pro sestrojení perspektivy obrazce incidentního se základní rovinou Dürerovy soustavy, resp. jejího obrazu (O, z, h) . Fresnaye popisuje jejich konstrukci, která je vskutku jednoduchá a při užití pravítka rýsuje obě přímky předem na papíře rysu.

Lze navrhnout tuto úpravu celuloidového pravítka a úpravu konstrukce obou přímkou x , o^a . Opatřme hrany pravítka $a_1 \equiv a_c$, a'_1 , EF měřítky tak, jak je vyznačeno v obr. 12. Stejně označené body měřitek $a_1 \equiv a_c$, a'_1 a střed $O_0 \equiv X$ tvoří rovnoramenné trojúhelníky, číslování na nich počíná od bodu X nebo ve stejných vzdálenostech od něho. Přímky stejně označených bodů na hranách $a_1 \equiv a_c$, EF jsou rovnoběžné s hranou a'_1 a tvoří osnovu přímkou tohoto směru. V obr. 12 jsou vyznačeny úseky těchto přímkou při hranách $a_1 \equiv a_c$, EF .

Sestrojení přímky perspektivy $o^a \equiv XO^a$ při této úpravě přístroje (obr. 12).

Nevlastnímu bodu $U'_{1\infty}$ slabě samodružné přímky $a_1 \equiv a_c$ soustavy q_1 přísluší perspektiva U'_c incidentní s horizontem h a se soustavou průmětny π . Otočný bod $U'_{1\infty}$ je nevlastní bod $U'_{1\infty}$ přímky a'_1 . Samodružný bod $M_1 \equiv M_c$ přímky $a_1 \equiv a_c$, $M_1 \equiv M_c \equiv z \cdot (a_1 \equiv a_c)$ se otočením rozštěpí v dvojici M'_1, M_c , pár A_1, A_c přiřazených si bodů se rozštěpí v dvojici A'_1, A_c . Je tedy střed perspektivity O^a ,

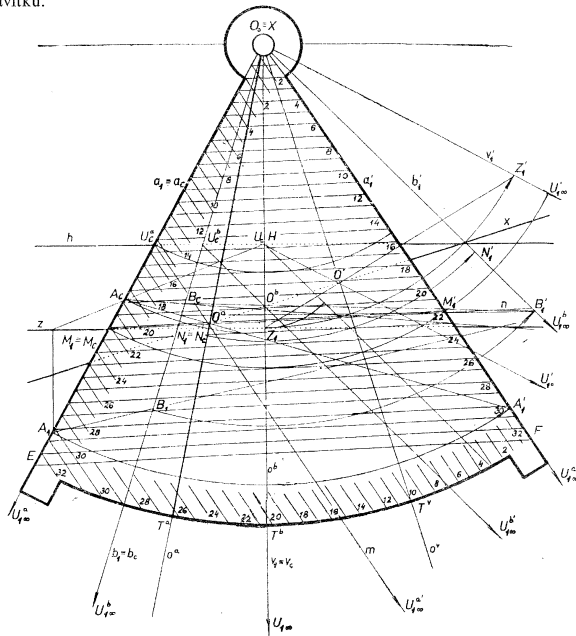
$$O^a \equiv U'_c U'_{1\infty} \cdot M_c M'_1 \cdot A_c A'_1.$$

Postup při rýsování přímky perspektivy o^a (na pravítku i na papíře rysu) je tedy tento:

1. Přístroj postavíme tak, aby jeho hrana $a_1 \equiv a_c$ byla incidentní s bodem A_c .
2. Čteme kótu 15,4 průsečíku U'_c horizontu h s hranou pravítka $a_1 \equiv a_c$. Vyhledáme tutéž kótu 15,4 na hraně EF a spojíme na pravítku body těchto kót přímkou m .

3. Čteme při téže poloze pravítka kótu 22,1 průsečíku $M_1 \equiv M_c$ základnice z s hranou $a_1 \equiv a_c$. Vytkneme bod M'_1 téže kóty na hraně a'_1 pravítka a vyznačíme jej i na papíře rysu. Oba body M_c, M'_1 spojíme na pravítku přímkou n .

4. Průsečík $O^a \equiv m \cdot n$ je bod přímky perspektivity o^a , kterou vyznačíme jasně na pravítku.



Obr. 12

Sestrojení samodružné přímky x na papíře rysu při téže úpravě pravítka (obr. 12).

1. Bod O^a je jedním bodem samodružné přímky x . Je třeba jej přenést s pravítka na náčrtnu. To učiníme např. vyznačením bodu $T^a \equiv o^a$. EF na náčrtně při poloze pravítka uvedené v 1. předěšlého odstavce. Otočíme pravítkem, aby jeho hrana $a_1 \equiv a_c$ procházela tímto bodem T^a , a vedeme rayon $o^a \equiv T^a O_0$. Ten je přenesenou přímkou o^a na papír rysu.

2. Odsuneme pravítko a sestrojíme přímkou $M_c M'_1$, jejíž bod M'_1 byl vyznačen při sestrojení přímkou perspektivity na pravítku. Střed perspektivity O^a je: $O^a \equiv \equiv o^a \cdot M_c M'_1$.

3. Bod O^a , střed perspektivity náležející hlavní vertikále $v_1 \equiv v_c$, je druhý bod samodružné přímkou x . Otočíme pravítko, aby se hrana $a_1 \equiv a_c$ zložitelná s hlavní vertikálou $v_1 \equiv v_c$ a označíme na nákrasné bod $T^a \equiv o^a \cdot EF$. Čteme kótu 19,3 bodu $Z_1 \equiv Z_c \equiv z$. ($v_1 \equiv v_c$) a označíme bod Z'_1 téže kóty na a'_1 , která v této poloze pravítka splývá s přímkou v'_1 .

4. Otočíme pravítkem, aby hrana $a_1 \equiv a_c$ nebo a'_1 se stala incidentní s bodem T^a a narýsujeme podél ní ryon $o^a \equiv XO^a$.

5. Otočíme pravítkem, aby byla nákrasna volná, narýsujeme přímkou $Z_c Z'_1$ a vyznačíme střed perspektivity $O^a \equiv o^a \cdot Z_1 Z'_1$. – Přímkou $x \equiv O^a O^a$ je hledaná samodružná přímkou.

Pro kontrolu správnosti sestrojíme bod O^b . Položíme pravítko do libovolné polohy, takže první hrana pravítka bude $b_1 \equiv b_c$ a sestrojíme jako dříve obě přímkou o^b , $N'_1 N_c$, které určují bod $O^b : o^b \cdot N'_1 N_c \in x$.

Práce s pravítkem této konstrukce je zcela jednoduchá. Nechť je sestrojiti perspektivu A_c bodu $A \in \varrho$ dané Dürerovy soustavy určeného ${}^1\Omega$ – průmětem A_1 (obr. 12).

1. Otočíme pravítkem, aby jeho hrana $a_1 \equiv a_c$ se stala incidentní s bodem A_1 , vedeme podél ní ryon a vyznačíme na papíře rysu bod $T^a \equiv o^a \cdot EF$. Čteme kótu bodu $M_c \equiv z \cdot a_c$ a bod M'_1 téže kóty na hraně a'_1 vyznačíme na papíře rysu.

2. Otočíme pravítkem, aby hrana $a_1 \equiv a_c$ nebo a'_1 se stala incidentní s bodem T^a , vedeme podél ní ryon $O_0 T^a$ a označíme jeho průsečík O^a se samodružnou přímkou x , $O^a \equiv x \cdot O_0 T^a$.

3. Otočíme pravítkem, aby byla nákrasna volná, a sestrojíme přímkou $A'_1 O^a$, která určuje na $a_1 \equiv a_c$ hledanou perspektivu $A_c \equiv a_c \cdot A'_1 O^a$.

Při sestrojení perspektivy bodu jsou tedy rýsovány dvě přímkou podél hrany pravítka, jedna přímkou určená dvěma body a jsou přeneseny dva body s pravítkem na papír rysu.

4. Konstrukce perspektivy prostorového objektu

Perspektivu prostorového objektu stojícího na základní rovině ϱ můžeme sestrojiti různými způsoby.

1. Předně lze doporučit užití vrstevní metody vzhledem k základní rovině ϱ . Jestliže má objekt vrstevnou strukturu, např. stavba obsahující vodorovné hrany, jako římsy, oddělení poschodí, vodorovné řady oken atd., pak rýsujeme perspektivy vodorovných řezů v jednotlivých vrstevních rovinách touto metodou. Distance zůstává táž, základnice z , přímkou perspektivity o^a a samodružná přímkou x mění svou polohu, která je závislá jen na výšce v středu zobrazení. Pro sestrojení přímkou perspektivity o^a platí jednoduchá věta.

Věta 4.1. Svazek přímek perspektivity o^a o středu $O_0 \equiv X$, náležících jednotlivým vrstevním rovinám, je průmětem řady bodů incidentních s přímkou $U_c^a U_{1\infty}^a$ shodné s řadou na přímce $a_1 \equiv a_c$, kterou na ní vytíná osnova základnic jednotlivých vrstevních rovin.

Důkaz (obr. 12). Střed perspektivity O^a je incidentní s přímkou $M_c M_1'$, která je stranou rovnoramenného trojúhelníka $O_0 M_c M_1'$. Protože je O^a též incidentní s přímkou $U_c^a U_{1\infty}^a$ a platí $U_c^a U_{1\infty}^a \parallel a_1'$, je též trojúhelník $U_c^a M_c O^a$ rovnoramenný a platí: $U_c^a M_c = U_c^a O^a$, což dokazuje správnost věty 4.1.

O samodružné přímce x při konstantní distanci d , konstantním úhlu otočení γ a proměnné výšce v Dürerovy soustavy platí věty.

Věta 4.2. Samodružná přímka x Dürerovy soustavy při právě daných podmínkách je tečna kuželosečky vedená ze středu perspektivity O^a náležícího hlavní vertikále $v_1 \equiv v_c$. Ohniska kuželosečky jsou Ω -průměty O_0, O_0' středu O zobrazení, hlavní její poloosa se rovná výšce v středu zobrazení.

Při proměnné výšce v jde tedy o soustavu konfokálních kuželoseček s ohnisky v bodech O_0, O_0' .

Důkaz správnosti věty bude proveden v kap. 2.

Postup při rýsování přímek perspektivity, samodružných přímek a celé perspektivy objektu je jasný.

2. Jiný způsob konstrukce perspektivy prostorového objektu spočívá v tom, že sestrojíme perspektivy půdorysů jednotlivých bodů objektu, načerž body „vzdvihneme“ o jejich výšku nad tyto perspektivní půdorysy. Jde tedy o úlohu nanést na kolmici k základní rovině od jejího daného bodu úsečku dané velikosti. Konstrukce pomocí hloubkových přímek je všeobecně známa (obr. 13).

3. Perspektivy právě uvedených výšek můžeme určit pomocí vrstevních rovin vzhledem k perspektivní průmětně π . Způsob 2. je v podstatě tato metoda. *Kaz. Bartel* [1] dochází úvahou o vlastnostech vrstevních rovin právě uvedených ke konstrukci perspektiv výšek, a to na základě věty 4.4. Předpokládá větu, jejíž správnost je všeobecně známa.

Věta 4.3. Velikost perspektivy úsečky rovnoběžné s perspektivní průmětnou π je invariantní vůči posuvu ve své vrstevní rovině vzhledem k průmětně π .

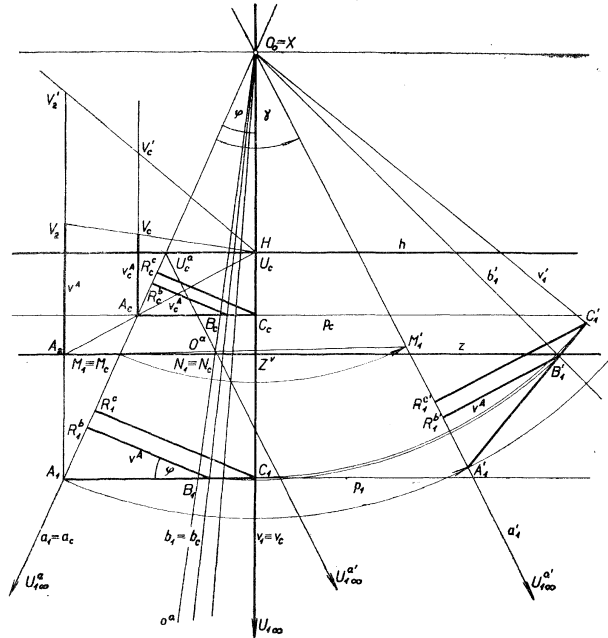
Důkaz správnosti věty spočívá v uvážení čtvrté měřítké úměrnosti.

Avšak kladení pravítka pro určení perspektivy výšky bodu nad základní rovinou a čtení její velikosti provádí *Bartel* jen částečně mechanicky. Je možno navrhnout řadu úprav pravítka, jimiž je možno tyto nedostatky z velké části odstranit.

Jde tedy o perspektivu úseku kolmice vztyčené v daném bodě základní roviny nanesené od paty této kolmice. Nechť je dán perspektivní obraz A_c, B_c, \dots bodu incidentního se základní rovinou a otočený jeho půdorys A_1', B_1', \dots o úhel γ . Pak platí zajímavá věta.

Věta 4.4. Jestliže je vzdálenost otočeného půdorysu A_1', B_1', \dots bodu A, B, \dots incidentního se základní rovinou od přímky a_1' (hrany a_1' pravítka) rovna úseku kolmice

vztyčené v bodu A, B, \dots k základní rovině, pak vzdálenost perspektivy A_c, B_c, \dots bodu A, B, \dots od přímky $a_1 \equiv a_c$ (hrany pravítka téhož označení) je rovna velikosti perspektivy tohoto úseku.



Obr. 13

Důkaz (obr. 13).

Nechť je A_1, A_c půdorys a perspektiva bodu $A \in \varrho$. Položme bodem A rovinu $\pi^A \parallel \pi$, tj. vrstevní rovinu vzhledem k perspektivní průmětně π . Její stopa $p \parallel z$ má první průmět $p_1 \parallel z, p_1 \in A_1$ a perspektivu $p_c \parallel z, p_c \in A_c$. Podle věty 4,1 je perspektiva a_c úsečky a dané velikosti incidentní s touto vrstevní rovinou konstantní, nezávislá na poloze úsečky v této vrstevní rovině. Je tedy poměr

$$\frac{a}{a_c} = \text{konst.}$$

Nechť jsou dány slabě samodružné přímky, např. $b_1 \equiv b_c$, $v_1 \equiv v_c$. Pak $A_c B_c \in p_c$, $A_c C_c \in p_c$ jsou perspektivy úseček $AB = A_1 B_1 \in p_1$, $AC = A_1 C_1 \in p_1$, kde $B_c \equiv p_c \cdot b_c$, $C_c \equiv p_c \cdot v_c$, $B_1 \equiv p_1 \cdot b_1$, $C_1 \equiv p_1 \cdot v_1$. Platí:

$$\frac{AB}{A_c B_c} = \frac{A_1 B_1}{A_1 B_c} = \frac{a}{a_c} = k,$$

$$\frac{AC}{A_c C_c} = \frac{A_1 C_1}{A_1 C_c} = \frac{a}{a_c} = k.$$

Otočením o úhel γ přejdou přímky a_1, b_1, v_1 do polohy a'_1, b'_1, v'_1 a úsečky $A_1 B_1, A_1 C_1$ do polohy $A'_1 B'_1 = A_1 B_1$, $A'_1 C'_1 = A_1 C_1$. Platí:

$$\frac{A'_1 B'_1}{A_c B_c} = \frac{AB}{A_c B_c} = \frac{a}{a_c} = k,$$

$$\frac{A'_1 C'_1}{A_c C_c} = \frac{A_1 C_1}{A_c C_c} = \frac{a}{a_c} = k.$$

Spustíme-li z bodů B_1, B_c , resp. C_1, C_c kolmice $B_1 R_1^b, B_c R_c^b$, resp. $C_1 R_1^c, C_c R_c^c$, platí pro získané trojúhelníky $\triangle A_1 B_1 R_1^b \sim \triangle A_c B_c R_c^b$, resp. $\triangle A_1 C_1 R_1^c \sim \triangle A_c C_c R_c^c$. Taktéž jsou $\triangle A'_1 B'_1 R_1^b \sim \triangle A_c B_c R_c^b$, ... atd.

Pro strany podobných trojúhelníků platí:

$$\frac{A'_1 B'_1}{A_c B_c} = \frac{R_1^b B'_1}{R_c^b B_c} = \frac{a}{a_c} = k,$$

$$\frac{A'_1 C'_1}{A_c C_c} = \frac{R_1^c C'_1}{R_c^c C_c} = \frac{a}{a_c} = k.$$

Z těchto rovností vyplývá: Jestliže je $B'_1 R_1^b$, resp. $C'_1 R_1^c$... velikost úsečky incidentní s vrstevní rovinou, pak je $B_c R_c^b$, resp. $C_c R_c^c$, ... velikost perspektivy této úsečky. Avšak $B_1 R_1^b, B_c R_c^b$, resp. $C_1 R_1^c, C_c R_c^c$ jsou podle definice vzdálenosti bodu od přímky vzdálenosti bodu B_1, B_c , resp. C_1, C_c od přímky $a_1 \equiv a_c$. Otočením roviny ϱ_1 přejde přímka a_1 v přímku a'_1 , vzdálenost $B_1 R_1^b$ bodu B_1 od $a_1 \equiv a_c$, resp. vzdálenost $C_1 R_1^c$ bodu C_1 od $a_1 \equiv a_c$, přejde ve vzdálenosti $B'_1 R_1^b$ bodu B'_1 od a'_1 , resp. ve vzdálenosti $C'_1 R_1^c$ bodu C'_1 od a'_1 . Tím je správnost věty dokázána.

Kazimierz Bartel [1] (str. 334) určuje velikost perspektivy kolmice vztyčené v bodě A incidentním se základní rovinou podle této věty takto:

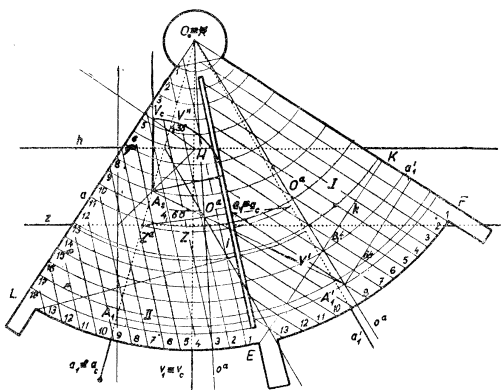
1. Opíše kružnici k kolem otočeného půdorysu A'_1 bodu A poloměrem rovným velikosti kolmice vztyčené v bodě A k základní rovině ϱ .

2. Otočí lepenkovým pravítkem tak, aby se jeho hrana a'_1 stala tečnou k této kružnici.

3. Narýsuje přímku podél hrany $a_1 \equiv a_c$ pravítka. Vzdálenost perspektivy A_c bodu A od této přímky je velikost perspektivy uvedené kolmice. Určuje ji též přímo jako vzdálenost perspektivy A_c od hrany $a_1 \equiv a_c$.

5. Návrh konstrukce perspektografu podle Fresnaye k určení perspektiv výšek objektu

Pravítko XEF (obr. 12), jehož hrany $a_1 \equiv a_c, a'_1$ (XE, XF) tvoří např. úhel 45° , rozšíříme o část XEL , jejíž hrany $a, a_1 \equiv a_c$ svírají též úhel 45° , takže pravítko XLF je pravouhlé (obr. 14). Abychom mohli rýsovat přímky podél hrany $a_1 \equiv a_c$, vy-



Obr. 14

řizneme v pravítku podélný otvor i . Prvou část XEF opatříme osnou I přímkou rovnoběžných s hranou $a'_1 \equiv XF$ a vzdáleností přímek osnovy od a'_1 udáme stupnicí na hraně EF . Bodem E vedeme na pravítku kolmici k k hraně a'_1 , jejíž pata je K (obr. 14).

Právě tak druhou část pravítka XLE opatříme osnou II přímkou rovnoběžných s hranou $a_1 \equiv a_c \equiv XE$ a příslušnou stupnicí na hraně EL . Mimo to opatříme tuto část soustavou kruhových soustředných oblouků o středu $O_0 \equiv X$ s příslušným označením na hraně XL .

Perspektivu podstaty prostorového objektu v základní rovině sestrojíme pomocí přístroje známým způsobem. Jestliže máme sestrojít perspektivu úsečky AV na kolmici vztyčené v bodě $A \in \varrho$ k základní rovině, počínáme si takto:

Otočíme pravítkem, aby hrana $a_1 \equiv a_c$ procházela perspektivou A_e bodu A a zkontrolujeme, zdali hrana a'_1 prochází otočeným bodem A'_1 . Je-li výška bodu V nad rovinou ϱ udána číselně, např. 8,4, najdeme na stupnici EF příslušný bod, je-li

udána úsečkou, nanese se jí na kolmici k od bodu K do bodu V' a přečteme její velikost na hraně EF . Otočíme pravítko tak, aby otočený půdorys A_1 bodu A byl incidentní s rovnoběžkou soustavy I o kótě 8,4. Perspektiva A_c bodu A je pak incidentní s jistou přímkou soustavy II , jejíž čtení udává velikost perspektivy úsečky AV . V obr. 14 je to číslo 4,65. Stačí nanést na kolmici A_cV_c ($A_cV_c \perp z$) úsečku velikosti 4,65 jednotek.

I k tomu je však možno užít perspektivního pravítka. Otočíme jím, až hrana $a_1 \equiv a_c \equiv XE$ splyne s hlavní vertikálou $v_1 \equiv v_c$. V této poloze pravítka je perspektiva A_c incidentní s jistou přímkou osnovy II , jejíž bod na hraně EL označíme na papíře rysu bodem A_0 . Tento bod určuje s perspektívou A_c vertikální přímkou vedenou tímto bodem A_c . Otočíme pravítkem, aby hrana a byla incidentní s perspektívou A_c , a čteme na hraně a kótu 9. Určíme bod ve vzdálenosti 4,65, tj. bod 4,35 = 9 - 4,65 a označíme jej V'' . Nato odsuneme pravítko otočením, sestrojíme kolmici $A_cV_c \equiv A_0A_c$ pomocí bodu A_0 dříve označeného na hraně EL a přeneseme na ni kružítkem úsečku A_cV'' . A_cV_c je perspektiva úsečky $AV \perp e$.

II. TEORIE DÜREROVY SOUSTAVY

1. Výhody rozštěpení perspektivní kolineace otočením $\gamma = 90^\circ$

Základ jednoduchých mechanismů dosud probraných v tomto článku i v [1], [2], [6], [7] je obecný kolineární vztah dvou souměrných rovinných soustav, ve které přejdou dvě souměrné rovinné perspektivně kolineární soustavy otočením jedné z nich o libovolný úhel γ kolem středu uvažované perspektivní kolineace.

Některé výhody a přednosti mají vzhledem k dosud uvažovaným mechanismům ty přístroje, jejichž teoretický základ je též, avšak přemístění jedné ze soustav vázaných perspektivní kolineací se provede otočením o úhel $\gamma = 90^\circ$ kolem středu perspektivní kolineace. Tyto výhody je možno uvést hned na začátku. Jsou to např.:

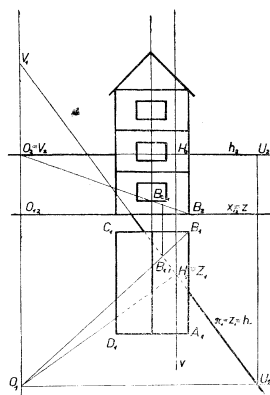
1. jednoduchý tvar pravoúhlého pravítka.
2. Jednoduché určení přímky perspektivity o^p i samodružné přímky x .
3. Možnost využití Nicholsonova pravítka a dvojdílného pravoúhlého pravítka.
4. Možnost využití čtvercové sítě na pravítku tvaru půlkruhu nebo obdélníku.
5. Možnost užití pravoúhlého pravítka při případném upotřebení rýsovacích trojúhelníků hlavně k rýsování perspektiv výšek v Dürerově soustavě.
6. Je možno užít posuvných pravítek při určování perspektivy výšky bodu nad základní rovinou.
7. Jednoduché nanášení úseček stejné velikosti na danou přímkou, dělení úseček na n stejných dílů, atd.

2. Střed perspektivity, přímka perspektivity a samodružná přímka x při rozštěpení perspektivní kolineace otočením $\gamma = 90^\circ$. Kružnice perspektivity.

Nechť je dána perspektivní kolineace (O_0, z, h) . Je známo, že ji můžeme pokládat za ekvivalentní obraz Dürerovy soustavy. Tato prostorová interpretace perspektivní kolineace je znázorněna v obr. 15 v Mongeově projekci. O je střed promítání, π perspektivní průmětna, $O_1H_1 = d$, $O_{12}O_2 = v$, h horizont, z základnice.

Dříve než se budeme zabývat přístroji konstruovanými pro úhel otočení $\gamma = 90^\circ$, všimneme si blíže Dürerovy soustavy a jejího obrazu po rozštěpení otočením o velikost tohoto úhlu a uvedeme její teorii.

Z předešlých úvah je známa konstrukce středu perspektivity náležícího dané slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ při dané velikosti otočení γ , i přímky perspektivity. Je známo, že množina středů perspektivity O'' , náležících slabě samodružným přímek v obrazu Dürerovy soustavy při téže velikosti otočení, je samodružná přímka x protilehlá k středu $O_0 \equiv X$ perspektivní kolineace po jejím rozštěpení, ... atd.



Obr. 15.

Je možno položit několik otázek, např.:

1. Zaujímá snad střed perspektivity důležité slabě samodružné přímky, hlavní vertikály $v_1 \equiv v_c$ při této speciální velikosti otočení γ nějakou zvláštní polohu?
2. Zaujímá snad právě uvedená samodružná přímka x při otočení $\gamma = 90^\circ$ nějakou zvláštní polohu?
3. Co je geometrické místo středů perspektivity přináležících téže samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ při různých velikostech otočení?
4. Co je geometrické místo samodružných přímek náležících všem přípustným velikostem úhlu otočení γ ?
5. Jak je tomu v involutorní Dürerově soustavě, ... atd.

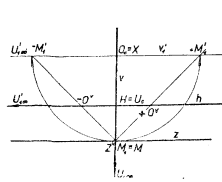
Na tyto otázky je možno odpovědět větami, které budou uvedeny. Bude dokázána jejich správnost a bude jich použito v dalších úvahách.

Střed perspektivity příslušící slabě samodružné přímce splývající s hlavní vertikálou $v_1 = v_c$ při rozštěpení otočením $\gamma = 90^\circ$ zaujímá skutečně zvláštní polohu, je snadno sestrojitelný. Též příslušnou přímku perspektivity lze snadno sestrojit. Platí dvě důležité věty.

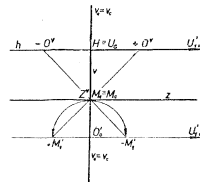
Věta 2.1. *Nechť je dána Dürerova soustava svým obrazem (O_0, z, h) . Střed perspektivity O^0 příslušící hlavní vertikále $v_1 \equiv v_c$ této soustavy po jejím rozštěpení otočením $\gamma = 90^\circ$ soustavy základní roviny ϱ_1 je incidentní s horizontem (úběžnicí základní roviny ϱ). Leží ve vzdálenosti výšky v středu O od hlavního bodu H v kladném smyslu při běžné orientaci horizontu, jestliže je rozštěpení provedeno otočením v kladném smyslu. Leží v záporném smyslu horizontu h při záporném smyslu otočení soustavy ϱ_1 . Věta platí při aplikaci obou Ω -promítání v dané Dürerově soustavě.*

Důkaz (obr. 16, 17, $^1\Omega$ -promítání, resp. $^2\Omega$ -promítání). Střed perspektivity samodružné přímky $v_1 \equiv v_c$ po rozštěpení perspektivní kolineace otočením soustavy základní roviny ϱ_1 je dán dvěma libovolnými páry korespondujících bodů přímek v'_1, v_c . Volme např. samodružný bod $Z^0 = M_1 \equiv M_c$ a pár $U_{1\infty}, U_c$ a otočíme přímku v_1 v kladném smyslu o úhel $\gamma = 90^\circ$ do polohy v'_1 . Bod M_1 nabude polohy M'_1 ($O_0M_1 = O_0M'_1$), nevlastní bod $U_{1\infty}$ se stane po otočení nevlastním bodem $U'_{1\infty}$ přímky v'_1 . Střed perspektivity je $O^0 \equiv M'_1M_c$. $U'_{1\infty}U_c$, jak ukazují obr. 16., 17. Avšak $U'_{1\infty}U_c \equiv h$, je tedy O^0 incidentní s horizontem h , jak bylo řečeno v první části věty. Trojúhelníky $\triangle O_0Z^0M'_1$, $\triangle U_cZ^0O^0$ jsou pravoúhlé rovnostranné homotetické trojúhelníky se středem homotetie Z^0 . Proto je $Z^0U_c = U_cO^0 = HO^0 = v$, čímž je dokázána správnost druhé části věty.

V obr. 16, který znázorňuje $^1\Omega$ -promítání v Dürerově soustavě, je provedeno, rozštěpení perspektivní kolineace otočením soustavy ϱ_1 v kladném smyslu. Hlavní vertikále přísluší střed $+O^0$, ležící v kladném smyslu horizontu vzhledem k hlavnímu bodu H . Obráceně je tomu při otočení v záporném smyslu.



Obr. 16



Obr. 17

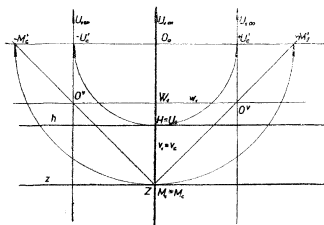
V obr. 17, znázorňujícím aplikaci $^2\Omega$ -promítání v Dürerově soustavě, náleží hlavní vertikále po rozštěpení otočením v kladném smyslu tentýž střed perspektivity $+O^0$, po rozštěpení otočením v záporném smyslu pak střed $-O^0$. Věta tedy platí pro obě Ω -promítání a její správnost je prokázána.

Věta 2.2. *Jestliže jsou splněny všechny předpoklady jako ve větě předešlé, avšak rozštěpení Dürerovy soustavy se provede otočením soustavy persp. průmětny π , pak platí: Střed perspektivity O^0 , náležící hlavní vertikále $v_1 \equiv v_c$ při rozštěpení otočením*

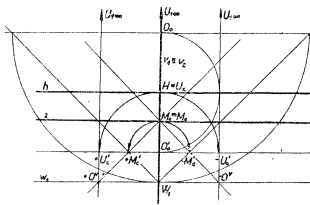
$\gamma = 90^\circ$, je incidentní s úběžnicí w_1 soustavy perspektivní průmětny π , a to ve vzdálenosti distance d od hlavního úběžníku W_1 . Při aplikaci ${}^1\Omega$ -promítání znamení smyslu otočení a vzdálenosti W_1O^p souhlasí, při aplikaci ${}^2\Omega$ -promítání jsou znamení opačná.

Důkaz (obr. 18)

Nechť je dána Dürerova soustava (O_0, z, h) při aplikaci ${}^1\Omega$ -promítání. Rozštěpme ji otočením soustavy π ve smyslu kladném. Samodružný bod $M_1 \equiv M_c$ hlavní vertikály $v_1 \equiv v_c$ se rozštěpí ve dvojici $M_1, +M'_c$, dvojice přiřazených si bodů $U_{1\infty}, U_c$ v dvojici $U_{1\infty}, +U'_c$. Střed perspektivy O^p je dán: $O^p \equiv M_1(+M'_c) \cdot U_{1\infty}(+U'_c)$. Protože je $U_{1\infty}U'_c \parallel v_1 \equiv v_c$ ve vzdálenosti distance d ($O_0U_c = O_0H = d$), je též střed perspektivy v této vzdálenosti od hlavní vertikály. Dále jsou trojúhelníky $\triangle O_0M_1M'_c \sim W_1M_1O^p$ homotetické podle středu M_1 a platí $M_1O_0 = O_0M'_c$, je tedy též $M_1W_1 = W_1O^p = d$. Avšak W_1O^p je právě úběžnice w_1 soustavy perspektivní průmětny π .



Obr. 18



Obr. 19

Při otočení v záporném smyslu (obr. 18) je střed perspektivy $-O^p$ náležící hlavní vertikále souměrně položen podle ní, čímž je dokázána správnost první části věty.

Správnost druhé její části je patrna z obr. 18. Je vidět, že otočení $\gamma = 90^\circ$ v kladném smyslu odpovídá střed perspektivy $+O^p$, otočení v záporném smyslu odpovídá pak bod $-O^p$, takže znamení smyslu otočení a polohy středu perspektivy vzhledem k bodu W_1 souhlasí.

Při aplikaci ${}^2\Omega$ -promítání je zřejmé $O'_0H = O_0H = d$ (obr. 19). Rozštěpení hlavní vertikály otočením v kladném smyslu přejdou dvojice bodů $M_1 \equiv M_c, U_{1\infty} \rightarrow U_c$ ve dvojice $M_1, +M'_c$, resp. $U_{1\infty}, +U'_c$. Střed perspektivy $+O^p \equiv M_1M'_c \cdot U_{1\infty}U'_c$.

Je zřejmé, že leží v záporné polopřímce W_1O^p úběžnice w_1 soustavy perspektivy ve vzdálenosti distance od hlavní vertikály.

Jestliže provedeme rozštěpení otočením ve smyslu záporném ($\gamma = 90^\circ$), obdržíme

jako střed perspektivity náležející hlavní vertikále bod $-O^o$ v kladné polopřímce úběžnice w_1 vzhledem k hlavní vertikále ve vzdálenosti distance, cbd.

Abychom rozlišili oba případy rozštěpení, zavedeme definici.

Definice 2,1 (prvého a druhého rozštěpení Dürerovy soustavy otočením γ).

Rozštěpení Dürerovy soustavy otočením základní roviny ϱ o daný úhel γ nazýváme prvním rozštěpením Dürerovy soustavy otočením γ . Rozštěpení otočením soustavy perspektivní průmětny nazýváme druhým rozštěpením Dürerovy soustavy otočením γ .

Výsledek obou vět můžeme shrnout krátce v další větě.

Věta 2,3. Při prvním rozštěpení Dürerovy soustavy je střed perspektivity O^o náležející hlavní vertikále $v_1 \equiv v_c$ incidentní s úběžnicí $h \equiv u_c^o$ otáčené roviny ϱ ve vzdálenosti této úběžnice h od základní roviny ϱ . Tato vzdálenost je výška středu soustavy.

Při druhém rozštěpení Dürerovy soustavy je střed perspektivity O^o náležející hlavní vertikále $v_1 \equiv v_c$ incidentní s úběžnicí w_1 otočené průmětny π ve vzdálenosti úběžnice w_1 od této průmětny π . Tato vzdálenost je distance středu zobrazení.

Tento výsledek ukazuje možnost záměny funkcí obou rovin π , ϱ . Vskutku, Dürerova soustava určuje jednojednoznačné zobrazení základní roviny ϱ do perspektivní průmětny π , zobrazení ekvivalentní s originálem. Je tedy možno považovat kteroukoli z obou rovin za průmětnu, zbývající za základní rovinu.

V dalších úvahách se budeme zabývat prvním rozštěpením dané Dürerovy soustavy, pokud nebude uveden případ druhý. Otočením soustavy perspektivní průmětny se budeme zabývat na konci kapitoly 2.

O přímce perspektivity o^o příslušné hlavné vertikále $v_1 \equiv v_c$ platí věta.

Věta 2,4. Přímka perspektivity o^o příslušná hlavní vertikále Dürerovy soustavy svírá s touto vertikálou úhel z , pro který platí: $\operatorname{tg} z = v/d$. Vzdálenost středu perspektivity O^o od středu O_0 soustavy je $O_0O^o = \sqrt{d^2 + v^2}$.

Důkaz. Vskutku, přímka perspektivity o^o příslušná hlavní vertikále je incidentní se středem perspektivity O^o příslušným hlavní vertikále a se středem O_0 . Splývá s přeponou pravouhlého trojúhelníka $\triangle U_cO_0O^o$, jehož odvěsny leží v horizontu h a v hlavní vertikále. Je zřejmé $U_cO_0 = d$ a podle předešlé věty $U_cO^o = v$ (obr. 15, 16). Proto je $\operatorname{tg} z = v/d$, $O_0O^o = \sqrt{d^2 + v^2}$, cbd.

Samodružnou přímku x příslušící dané Dürerově soustavě při rozštěpení otočením $\gamma = 90^\circ$ lze též sestavit zcela jednoduše. O její poloze a konstrukci platí důležitá věta.

Věta 2,5. Samodružná přímka x obrazu Dürerovy soustavy po jejím rozštěpení otočením $\gamma = 90^\circ$ je incidentní se středem perspektivity O^o náležejícím hlavní vertikále $v_1 \equiv v_c$, $O^o \in h$, $HO^o = HZ = v$, a je kolmá k přímce perspektivity $o^o = O_0O^o$ náležející této vertikále.

Důkaz (obr. 20, aplikováno ${}^2\Omega$ -promítání). Ke konstrukci samodružné přímky x určíme dva její body. Proto vytkneme dvě slabě samodružné přímky dané perspek-

tví kolineace, které se rozpadnou prvním rozštěpením v páry perspektivních bodových řad se středy perspektivity incidentními se samodružnou přímkou x . První z obou slabě samodružných přímek zvolíme hlavní vertikálu $v_1 \equiv v_c$, která je nositelkou dvou souměrných projektivních řad $M_1 U_{1\infty} \dots \pi M_c U_c \dots, M_1 \equiv M_c \equiv Z$. Otočením první z nich o úhel $\gamma = 90^\circ$ přejdou obě řady do polohy perspektivní:

$$M_1' U_{1\infty}' \dots \pi M_c' U_c' \dots$$

Střed jejich perspektivity je, jak známo, bod O^o :

$$O^o \equiv M_c M_1' \cdot U_c U_{1\infty}'.$$

Přímka $O_0 O^o$ je přímka perspektivity o^o příslušící hlavní vertikále $v_1 \equiv v_c$ při prvním rozštěpení otočením $\gamma = 90^\circ$.

Jako druhé užijeme slabě samodružné přímky $t_1 \equiv t_c \equiv O_0 O^o \equiv o$, která je nositelkou projektivních řad $P_1 T_{1\infty} \dots \pi P_c T_c \dots$. Otočením $\gamma = 90^\circ$ se řady rozštěpí v perspektivní řady

$$P_1' T_{1\infty}' \dots \pi P_c' T_c' \dots,$$

jejichž střed perspektivity je bod O^i :

$$O^i = P_c P_1' \cdot T_c T_{1\infty}'.$$

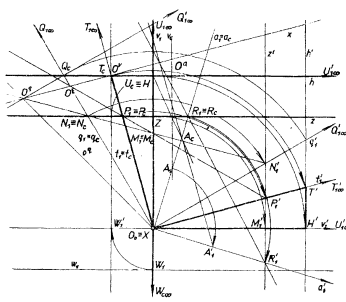
Z obr. 20 je vidět, že $T_c \equiv O^o, O^i \in T_c T_{1\infty}' \Rightarrow O^i \in T_c T_{1\infty}', T_c T_{1\infty}' \parallel O_0 T_{1\infty}, T_c T_{1\infty}' \perp \perp O_0 O^o \equiv o^o$. Samodružná přímka $x \equiv O^o O^i$ splývá s přímkou $T_c T_{1\infty}'$,

$$x \equiv T_c T_{1\infty}' \perp o^o, \text{cbd.}$$

Místo páru $U_{1\infty}, U_c$ přiřazených bodů hlavní vertikály $v_1 \equiv v_c$ můžeme užít s výhodou páru $W_1, W_{c\infty}$. Platí $O_0 W_1 = HZ^o = v$ i co do smyslu. W_1 je stanovisko zobrazení, tj. pata kolmice spuštěné ze středu zobrazení na základní rovinu. Je incidentní s úběžnicí w_1 soustavy perspektivní průmětny π .

Otočením $\gamma = 90^\circ$ nabude tento bod W_1 polohy $W_1' \in v_1'$. Pro střed perspektivity O^o obou perspektivních bodových řad v_1', v_c platí: $O^o \in W_1' W_{c\infty}'$, což je rovnoběžka s hlavní vertikálou $v_1 \equiv v_c$ ve vzdálenosti $O_0 W_1' = O_0 W_1 = v$. To souhlasí s dřívějšími výsledky.

Těž přímkou perspektivity $o^o(o^o)$ náležící slabě samodružné přímce $g_1 \equiv g_c$ ($a_1 \equiv a_c$) při otočení soustavy g_1 o velikost úhlu $\gamma = 90^\circ$ určíme jednoduše. Můžeme užít



Obr. 20

věty o invariantní trojici $a_1 \equiv a_c, a_1', o^a$ [7] a věty 2,4, z nichž následuje další věta.

Věta 2.6. *Přímka perspektivity $o^a(o^a)$ přiřazená slabě samodružné přímce $q_1 \equiv q_c$ ($a_1 \equiv a_c$) svírající s hlavní vertikálou úhel φ tvoří s $q_1 \equiv q_c$ ($a_1 \equiv a_c$) úhel α , pro který je*

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{d}.$$

Vzdálenost středu perspektivity $O^a(O^a)$ od středu soustavy O_0 je

$$O_0O^a = \frac{I}{\cos \varphi} \cdot \sqrt{d^2 + v^2}.$$

Poloha středu perspektivity přiřazeného slabě samodružné přímce je závislá jen na úhlu φ , distanci d a výšce v středu Dürerovy soustavy.

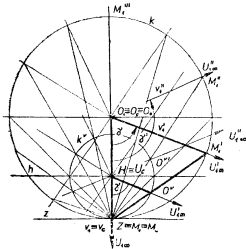
Důkaz (obr. 20). Správnost první části věty vyplývá z vět 1,4 [7] a 2,5. Správnost druhé části věty vyplývá ze vztahů: $O_0O_c = d/\cos \varphi$, trojúhelník $\triangle N_cQ_cO^a$ je pravoúhlý rovnoramenný,

$$Q_cO^a = Q_cN_c = \frac{v}{\cos \varphi},$$

$$O_0O^a = \sqrt{O_0Q_c^2 + Q_cO^a^2} = \sqrt{\frac{d^2}{\cos^2 \varphi} + \frac{v^2}{\cos^2 \varphi}} = \frac{I}{\cos \varphi} \cdot \sqrt{d^2 + v^2}.$$

Správnost třetího tvrzení je patrná.

V posledních větách bylo mluveno o množině středů perspektivity náležících slabě samodružným přímek při téže velikosti otočení γ . Můžeme však položit otázku, jaké je geometrické místo středů perspektivity náležících slabě samodružné přímce při různých velikostech úhlu otočení γ . O tom platí věty, které uvedeme a dokážeme jejich správnost. Nejdříve si všimneme hlavní vertikály.



Obr. 21

Věta 2.7. *Geometrické místo středů perspektivy náležících hlavní vertikále pro úhly otočení v intervalu $(0^\circ, 360^\circ)$ s výjimkou 180° je kružnice k^o o středu v hlavním bodu H a poloměru rovném výšce v středu zobrazení.*

Důkaz (obr. 21, 22).

a) Dokážeme: *Je-li bod O^o středem perspektivity řad v_1', v_c , pak leží na jmenované kružnici.*

Hlavní vertikála $v_1 \equiv v_c$ jakožto slabě samodružná přímka obrazu Dürerovy soustavy je nositelkou dvou projektivních souměrných bodových řad, z nichž nechť jsou dány tři páry homologických bodů: samodružný bod $Z^o \equiv M_1 \equiv M_c$, nevlastní bod $U_{1\infty}$ homologicky s hlavním bodem $H \equiv U_c$ a $O_1 \equiv O_c \equiv O_0$.

Otočíme soustavou ϱ_1 kolem středu O_0 o daný úhel γ . Půdorys v_1 hlavní vertikály v přejde do polohy v'_1 , při čemž bod M_1 přejde do bodu M'_1 , $O_0M'_1 = O_0M_1$ a nevlastní bod $U_{1\infty} \in v_1$ přejde do polohy $U'_{1\infty} \in v'_1$.

Střed perspektivity obou perspektivních bodových řad v'_1, v_c je zřejmě $O'' \equiv M'_1M_c \cdot U'_{1\infty}U_c$.

Trojúhelníky $\triangle O_0M_cM'_1, \triangle U_cM_cO''$ jsou zřejmě rovnoramenné a homotetické podle středu M_c . Platí:

$$\begin{aligned} O_0M'_1 : O_0M_c &= U_cO'' : U_cM_c \\ U_cO'' &= \frac{O_0M'_1 \cdot U_cM_c}{O_0M_c} = U_cM_c \\ U_cO'' &= v = \text{konst., cbd.} \end{aligned}$$

b) Dokážeme: Je-li bod O'' incidentní s jmenovanou kružnicí k^o , pak je středem perspektivity bodových řad v'_1, v_c , kde v'_1 je otočená řada v_1 hlavní vertikály kolem středu O_0 o jistý úhel γ' .

Nechť je dán bod $O'' \in k^o$ (obr. 21). Pak je

$$U_cO'' = U_cM_c. \quad (1)$$

Sestrojíme přímkou M_cO'' a přímkou $O_0M'_1 \parallel U_cO''$. Tyto přímky $O''M_c, O_0M'_1$ nejsou zřejmě rovnoběžné, neboť rovnoběžnost je symetrický vztah a platí: $U_cO'' \parallel O_0M'_1$. V případě $M_cO'' \parallel O_0M'_1$ by procházely bodem O'' dvě přímky, $O''M_c, U_cO''$ rovnoběžné s přímkou $O_0M'_1$, což je nemožné. — Mají proto obě přímky společný bod M'_1 .

Trojúhelníky $\triangle O_0M_cM'_1, \triangle U_cM_cO''$ jsou homotetické a platí:

$$\begin{aligned} O_0M'_1 : O_0M_c &= U_cO'' : U_cM_c \\ O_0M'_1 &= \frac{O_0M_c \cdot U_cO''}{U_cM_c} \end{aligned}$$

Vzhledem k rovnosti (1) je $O_0M'_1 = O_0M_c$.

Je tedy bod M'_1 incidentní s kružnicí k (O_0, O_0M_c) a je otočeným bodem M_1 kolem O_0 o úhel $\sphericalangle M_cO_0M'_1 = \sphericalangle M_cU_cO'' = \gamma'$. Přímka $O_0M'_1$ je otočená přímkou v_1 kolem O_0 o velikosti úhlu γ' .

Přímky $U_cO'' \parallel O_0M'_1$ a je tedy U_cO'' spojnice úběžníku U_c s nevlastním bodem $U'_{1\infty}$ přímky $O_0M'_1$, do kterého se otočí o tentýž úhel γ' nevlastní bod $U_{1\infty}$ přímky v_1 .

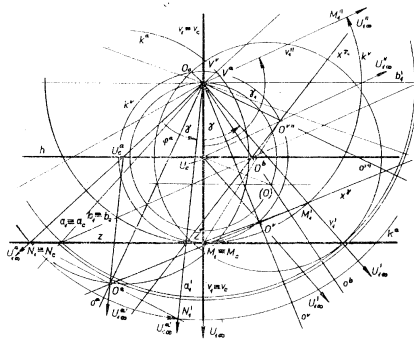
Z projektivních souměrných bodových řad $v_1 \equiv v_c$ je otočena v_1 o úhel γ' s třemi svými body $O_0, M_1, U_{1\infty}$ do polohy $v'_1, O_0, M'_1, U'_{1\infty}$. Projektivnost bodových řad v'_1, v_c je uvedenými třemi páry přiřazených bodů dána. Řady v'_1, v_c mají však jeden bod, a to O_0 , za samodružný, jsou tedy perspektivní o středu perspektivity v bodu O'' , cbd.

Platí však věta obdobná větě 2,7 pro každou samodružnou přímkou $a_1 \equiv a_c$.

Věta 2.8. Geometrické místo středů perspektivity O^a příslušících slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ pro úhly otočení v intervalu $(0^\circ - 360^\circ)$ s výjimkou 180° je kružnice o středu v úběžníku U_c^a soustavy a_1 a incidentní se samodružným bodem $Z^a \equiv N_1 \equiv N_c$ řad $a_1 \equiv a_c$.

Důkaz je obdobný důkazu věty 2.7 pro hlavní vertikálu.

a) V obrazu Dürerovy soustavy (O_0, z, h) (obr. 22) je výtčena slabě samodružná přímka $a_1 \equiv a_c$ různá od hlavní vertikály a svírající s ní úhel φ^a s incidentními projektivními řadami $A_1 \rightarrow A_c$. Z dvojic homologických bodů jsou dány tři: $O_1 \equiv O_c \equiv O_0 : N_1 \equiv N_c, U_{1c}^a, U_{1c}^a$.



Obr. 22

Otočením bodové řady a_1 o velikost úhlu γ obdržíme shodnou řadu $a_1' \cong a_1$ perspektivní s řadou a_c podle vět dříve uvedených. Střed perspektivity O^a je

$$O^a \equiv N_c N_1' \cdot U_c^a U_{1c}^a.$$

Trojúhelníky $\triangle O_0 N_c N_1', \triangle U_c^a N_c O^a$ jsou rovnostranné stejnoúhlé trojúhelníky podle středu stejnoúhlosti N_c a zřejmě platí:

$$U_c^a O^a = U_c^a N_c = v / \cos \varphi^a = \text{konst.}, \text{cbd.}$$

b) Stejně, jak bylo učiněno v důkazu věty 2.7, je možno dokázat větu obrácenou. Na základě těchto zajímavých vět můžeme vyslovit další větu.

Věta 2.9. Každé slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ obrazu Dürerovy soustavy lze přiřadit kružnici k^a o středu v úběžníku U_c^a soustavy a_1 a poloměru $r^a = v / \cos \varphi^a$, kde v je výška středu zobrazení, φ^a úhel uvažované slabě samodružné přímky $a_1 \equiv a_c$ s hlavní vertikálou $v_1 \equiv v_c$. A obrácně.

Důkaz správnosti věty plyne z dříve uvedených vět.

Hlavní vertikále náleží tedy kružnice o poloměru rovném výšce středu zobrazení O .

Abychom mohli s přiřazenými kružnicemi pracovat a vyjadřovat se stručněji, vyslovíme definici.

Definice 2.2 (*kružnice perspektivity*)

Kružnice k^a jako místo středů perspektivity náležících slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ pro všechna otočení $\gamma \neq 0^\circ, 180^\circ$ se nazývá kružnice perspektivity náležící uvedené slabě samodružné přímce.

Podle dříve vyslovených vět a pomoci kružnice perspektivity k^a náležící dané slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ můžeme sestrojit střed perspektivity O^a náležící této přímce při rozštěpení otočením soustavy q_1 o daný úhel γ . Přitom má značnou důležitost otočení o úhel $\gamma = 90^\circ$.

Úloha 1.1. *Sestrojit pomocí kružnice perspektivity střed perspektivity příslušný dané slabě samodružné přímce při dané velikosti otočení γ .*

Řešení (obr. 22, 23).

1. Sestrojíme kružnici perspektivity k^a příslušnou uvažované slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c \equiv O_0 U_a^c$.
2. Otočíme přímku a_1 o velikost daného úhlu γ do polohy $a_1' \equiv O_0 N_1'$ a sestrojíme bod A_1' , resp. N_1' , $O_0 A_1' = O_0 A_1$, resp. $O_0 N_1' = O_0 N_1$.
3. Hledaný střed perspektivity O^a je

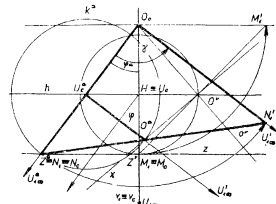
$$O^a \equiv k^a \cdot A_c A_1', \quad \text{resp.} \quad O^a \equiv k^a \cdot N_c N_1'.$$

K sestrojení středu O^a je potřeba kružítka nebo pravítka a měřítka. Jsou-li k dispozici dvě trojúhelníková pravítka, můžeme použít i úběžníku U_c^a , jímž vedeme rovnoběžku $U_c^a U_{1\infty}^a$ s otočenou přímkou a_1' patřičného smyslu: $O^a \equiv k^a \cdot U_c^a U_{1\infty}^a$. V tom případě není třeba ani rýsovat otočenou přímku a_1' .

Kružnice perspektivity můžeme použít i při sestrojení přímky perspektivity náležící dané slabě samodružné přímce a též k sestrojení samodružné přímky x obecného kolineárního vztahu vzniklého rozštěpením perspektivní kolineace.

Po zavedení kružnice perspektivity je nutné uvážit rozštěpení perspektivní kolineace otočením o úhel $\gamma = 0^\circ, 180^\circ$. Podle věty 2.1 předešlé kapitoly je střed perspektivity příslušný slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ při rozštěpení perspektivní kolineace otočením $\gamma = 0^\circ, 180^\circ$ neurčitý bod této přímky. Obě přímky $A_c A_1'$, $U_c^a U_{1\infty}^a$, které určují svým průsečíkem střed perspektivity O^a , splývají, což dokazuje správnost věty.

edem k existenci kružnice perspektivity jako spojitě křivky středů perspektivity



Obr. 23

náležících slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ při spojitě změně velikosti úhlu otočení γ můžeme tuto výjimku odstranit. Můžeme o tom vyslovit větu.

Věta 2.10. *Vzhledem ke kružnici perspektivity k^a náležící slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ perspektivní kolíneace při jejím rozštěpení otočením soustavy ρ_1 o velikost úhlu $\gamma \neq 0^\circ, 180^\circ$ budeme považovat stopník Z^a a diametrální bod V^a za střed perspektivity samodružné přímky $a_1 \equiv a_c$ při rozštěpení otočením $\gamma = 0^\circ, 180^\circ$.*

Existence kružnice perspektivity přímky $a_1 \equiv a_c$ si podle toho žádá změnu ve znění věty 2.1 předešlé kapitoly.

Zdůvodnění věty. Z konstrukce středu perspektivity O^a , např. v obr. 22, je zřejmé, že při úhlu otočení γ , blízcím se neomezeně úhlu 180° , se střed perspektivity neomezeně blíží k bodu V^a . Právě tak je vidět, že při úhlu γ konvergujícím k úhlu 180° shora, blíží se střed perspektivity neomezeně k témuž bodu V^a . Můžeme tedy přiřadit slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ při rozštěpení perspektivní kolíneace otáčením $\gamma = 180^\circ$ diametrální bod V^a k jejímu stopníku Z^a , zatím co můžeme přiřadit téže přímce při rozštěpení otáčením $\gamma = 0^\circ$ přímo stopník Z^a (základní bod) samodružné přímky $a_1 \equiv a_c$.

Toto opatření má však jen formální význam. Nelze ho užít, jak bylo učiněno při úhlu otočení $\gamma \neq 0^\circ, 180^\circ$, ke konstrukci perspektivity, ačkoli samodružná přímka x po rozštěpení perspektivní kolíneace otočením $\gamma = 0^\circ, 180^\circ$ existuje a je rovnoběžná s osou kolíneace, jak bude později dokázáno. Proto budeme i nadále vylučovat rozštěpení perspektivní kolíneace otočením o úhel $\gamma = 0^\circ, 180^\circ$.

Uvažujme vztah středu perspektivní kolíneace O_0 , resp. O'_0 ke kružnici perspektivity k^a náležící hlavní vertikále. Můžeme vyslovit větu.

Věta 2.11. *Střed obrazu Dürerovy soustavy, perspektivní kolíneace, O_0 , resp. O'_0 , může zaujmout vzhledem ke kružnici perspektivity k^a kteroukoli z tří možných poloh.*

Důkaz. Kružnice perspektivity k^a má svůj střed v hlavním bodu H a je incidentní se základním bodem Z^a . Jelikož je $HZ^a = v$, $O_0H = d$, pak je střed $O_0(O'_0)$ vnitřním bodem této kružnice, je-li $d < v$, náleží této kružnici v případě, že $d = v$ a je vnějším jejím bodem, je-li $d > v$, cbd.

Můžeme vyslovit větu širší.

Věta 2.12. *Jakou polohu zaujímá střed perspektivní kolíneace ke kružnici perspektivity k^a náležející hlavní vertikále, takovou polohu zaujímá ke všem kružnicím perspektivity dané soustavy.*

Důkaz je jednoduchý. Platí-li např. pro hlavní vertikálu $O_0H < HZ^a$, platí, jak je možno dokázat elementárními prostředky, $O_0U_c^a < U_c^aZ^a$. A stejně v ostatních případech.

Vzhledem k této větě budeme rozlišovat v dalším textu tři případy Dürerovy soustavy a jejího obrazu, perspektivní kolíneace, podle vztahu distance a výšky středu zobrazení. Vyjádříme je vztahem

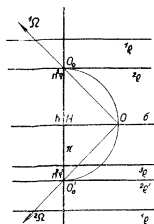
$$d \cong v. \quad (2)$$

Případy jsou uvedeny v obr. 24.

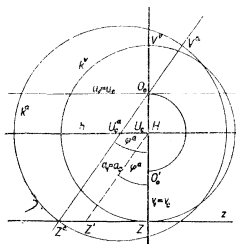
1. První Dürerova soustava, $d < v$.

Nechť je dána báze perspektivního promítání (O, π) středem O a průmětnou π (obr. 24). Vedme středem O horizontální rovinu $\sigma \perp \pi$, protínající perspektivní průmětnu π a vedme jími přímky $n^{2e}, n^{2e'} \parallel h$. Platí věta.

Věta 2.13. *Všechny základní roviny ${}^1Q \parallel \sigma$, jejichž stopy n^{1e} tvoří osнову přímek incidentních s oběma polorovinami perspektivní průmětny π opačnými k rovinnému pásu $n^{2e} - n^{2e'}$ doplňují dané prvky na první Dürerovu soustavu, pro kterou tedy platí vztah $d < v$.*



Obr. 24



Obr. 25

Důkaz správnosti věty je prostý. Vzdálenost hlavního bodu H od stop těchto rovin je větší než jeho vzdálenost od středu O , tedy $d < v$, cbd.

První Dürerova soustava je znázorněna svým obrazem (O_0, z, h) v ryse 25. Jsou v něm nakresleny kružnice perspektivity náležející slabě samodružným přímkám $v_1 \equiv v_c, a_1 \equiv a_c$.

2. Druhá Dürerova soustava, $d = v$.

Jde o dvě roviny ${}^2q, {}^2q'$, jejichž stopy $n^{2e}, n^{2e'}$ jsou uvedené rovnoběžky s horizontem h v obr. 24. Obě roviny jsou incidentní s Ω -průměty, O_0 , resp. O'_0 středu O perspektivního promítání do perspektivní průmětny π .

Vyslovíme definici.

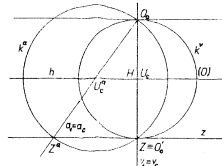
Definice 2.3 *(involutorní, harmonické, rovnostranné Dürerovy soustavy a jejího obrazu). Involutorní (harmonická, rovnostranná) Dürerova soustava je právě druhá Dürerova soustava, pro kterou platí: $d = v$. Obrazem této soustavy je perspektivní kolíneace, pro kterou je $O_0H = HZ^v$. Je to involutorní (harmonická) perspektivní kolíneace.*

Nechť je dána rovnostranná Dürerova soustava. Pak platí věta.

Věta 2.14. *Aplikujeme-li na tuto soustavu obě Ω -promítání, obdržíme v perspektivní*

průmětně π čtyři perspektivní kolíneace mezi Ω -průměty a perspektivními průměty základní roviny ϱ, z , z nichž dvě jsou involutorní (harmonické) perspektivní kolíneace a dvě jsou elace.

Důkaz (obr. 24). a) Uvažujme základní roviny ${}^2\varrho'$ a aplikujme v soustavě ${}^1\Omega$ -promítání. ${}^1\Omega$ -průmět středu O , střed O_0 perspektivní kolíneace mezi perspektivním průmětem a ${}^1\Omega$ -průmětem této základní roviny, je nikoli incidentní s osou kolíneace $n^{2\varrho'}$, $O_0 \notin n^{2\varrho'}$, $O_0 \mapsto h = h \mapsto n^{2\varrho'}$. To je však, jak je známo z projektivní geometrie, harmonická perspektivní kolíneace.



Obr. 26

b) Aplikujeme-li v témž případě ${}^2\Omega$ -projekci, stane se ${}^2\Omega$ -průmět středu O , bod O'_0 , incidentní s $n^{2\varrho'}$, tj. střed perspektivní kolíneace O'_0 je incidentní s její osou a jde tedy o elaci.

c) Stejnou úvahou bychom dospěli k harmonické perspektivní kolíneaci a elaci, kdybychom uvažili roviny ${}^2\varrho$ a aplikovali obě Ω -projekce. Je tedy správnost věty dokázána.

Druhá Dürerova soustava je nakreslena v obr. 26 s kružnicemi perspektivity k^a, k^a příslušícími hlavní vertikále $v_1 \equiv v_c$ a samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$.

3. Třetí Dürerova soustava, $d > v$.

Z obr. 24 je patrné, že základní roviny ${}^3\varrho \parallel \sigma$, jejichž stopy $n^{3\varrho} \parallel h$ tvoří osnovu přímek vyplňujících rovinný pás s krajními přímkami $n^{2\varrho}, n^{2\varrho'}$, jsou ty základní roviny, pro které platí $d > v$ a které tvoří s bází (O, π) třetí Dürerovu soustavu. Obrazy třetí Dürerovy soustavy jsou nakresleny v rýscích 21, 23.

Pro další práci bude užitečné všimnout si pozorněji jednotlivých případů Dürerovy soustavy.

1. První Dürerova soustava.

Nechť je dána I. Dürerova soustava svým obrazem (O_0, z, h) . O vztahu kružnic perspektivity a středu O_0 , resp. O'_0 obrazu soustavy platí věta.

Věta 2,15. Kružnice perspektivity k^a, k^a, \dots náležící slabě samodružným přímkám $v_1 \equiv v_c, a_1 \equiv a_c, \dots$ mají střed O_0 , resp. O'_0 perspektivní kolíneace za svůj vnitřní bod.

Důkaz správnosti věty vyplývá z předěslych úvah i přímo z obr. 25.

Je otázka týkající se bližší polohy středu obrazu Dürerovy soustavy O_0 , resp. O'_0 a kružnic perspektivity k^a, k^a, \dots náležících slabě samodružným přímkám $v_1 \equiv v_c, a_1 \equiv a_c, \dots$. Tento vztah vyjádříme pomocí vzdáleností O_0V^v, O_0V^a, \dots středu O_0 , resp. O'_0 od kružnic perspektivity k^a, k^a, \dots

Definice 2,4 (vzdálenosti středu O_0 , resp. O'_0 od kružnic perspektivity)

Vzdálenost bodu O_0 od kružnice k^a je menší ze vzdáleností tohoto bodu od společného průsečíku průměru $O_0U_0^a$ s kružnicí k^a .

Platí následující věta.

Věta 2.16. *Vzdálenost středu O_0 , resp. O_0' obrazu 1. Dürerovy soustavy od kružnic perspektivy k^a , ... je nepřímo závislá na kosinu úhlu φ příslušné samodružné přímky $a_1 \equiv a_c$ s hlavní vertikálou $v_1 \equiv v_c$.*

Důkaz (obr. 25). a) Uvažujme samodružnou přímku splývající s hlavní vertikálou $v_1 \equiv v_c$ a jí příslušející kružnici perspektivy k^a . Vzdálenost O_0V^a je zřejmě

$$O_0V^a = HV^a - HO_0 = v - d = k.$$

b) Uvažujme libovolnou slabě samodružnou přímku $a_1 \equiv a_c$ tvořící s hlavní vertikálou úhel φ^a a jí příslušnou kružnici perspektivy k^a . Zřejmě je

$$O_0V^a = U_c^aV^a - U_c^aO_0 = U_c^aZ^a - U_c^aO_0.$$

Avšak

$$U_c^aZ^a = HZ^a = \frac{v}{\cos \varphi^a}, \quad U_c^aO_0 = \frac{d}{\cos \varphi^a},$$

jak plyne z pravoúhelníku $\triangle HZ^aZ^a$. Tedy

$$O_0V^a = \frac{v}{\cos \varphi^a} - \frac{d}{\cos \varphi^a} = \frac{1}{\cos \varphi^a} \cdot (v - d) = \frac{k}{\cos \varphi^a}.$$

Přitom můžeme psát:

$$O_0V^a = v - d = \frac{v - d}{\cos 0^\circ} = \frac{k}{\cos 0^\circ},$$

čímž je správnost věty prokázána.

Pro kružnici perspektivy k^a náležící slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ rovnoběžné se základnicí platí věta.

Věta 2.16. *Geometrickým místem středů perspektivy, náležících slabě samodružné přímce $u_1 \equiv u_c$ z obrazu soustavy, je nevlastní přímka roviny soustavy.*

Důkaz. Vzdálenost středu obrazu Dürerovy soustavy O_0 od kružnice perspektivy náležící slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ svírající s hlavní vertikálou úhel φ je podle předešlé věty

$$O_0V^a = \frac{k}{\cos \varphi}.$$

Jestliže $\lim \varphi = 90^\circ$, je $\lim \cos \varphi = 0$ a $\lim O_0V^a = \lim k/\cos \varphi = \infty$ (přímka nevlastní), cbd.

Správnost výsledku vyplývá i odtud, že úběžník této přímky $u_1 \equiv u_c$ jako střed její kružnice perspektivy k^a a stopník Z^a incidentní s k^a jsou body nevlastní.

Všimněme si bodů V^a, V^a, \dots kružnic perspektivy k^a, k^a, \dots , které určují vzdálenost středu obrazu Dürerovy soustavy O_0 od těchto kružnic. Platí věta.

Věta 2.17. *Body V^a, V^a, V^b, \dots kružnic perspektivy k^a, k^a, k^b, \dots , o kterých byla právě řeč, jsou incidentní s tečnou t^a ke kružnici perspektivy k^a v jejím bodě V^a .*

Důkaz (obr. 27, 28). Vzdálenost středu obrazu Dürerovy soustavy O_0 od kružnice perspektivity k^a je podle věty 2,16 dána vzorcem

$$O_0V^a = \frac{v-d}{\cos \varphi^a}.$$

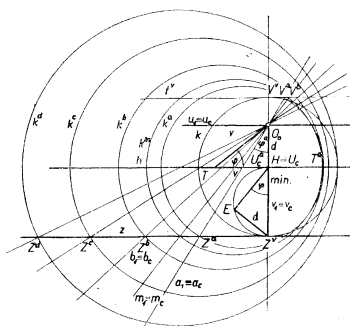
Sestrojíme tečnu t^v v bodě V^v kružnice perspektivity k^v a vytkneme její průsečík Q s průměrem $U_c^cO_0$ kružnice perspektivity k^a , tj. s příslušnou samodružnou přímkou

$a_1 \equiv a_c$ svírající s hlavní vertikálou úhel φ^a . Pak je

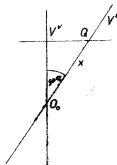
$$O_0Q = \frac{O_0V^{v^1}}{\cos \varphi^{a^1}},$$

avšak

$$O_0V^v = v-d,$$



Obr. 27



Obr. 28

takže

$$O_0Q = \frac{v-d}{\cos \varphi^a}.$$

Z toho vyplývá, že je $V^a \equiv Q$, neboť střed O_0 náleží vnitřku kružnice perspektivity k^a , čímž je správnost věty dokázána.

Správnost věty vyplývá též z vlastností homotetie o středu O_0 .

O poloze bodů V^a, V^b, \dots kružnic perspektivity k^a, k^b, \dots vzhledem k bodu V^v kružnice perspektivity k^v náležící hlavní vertikále $v_1 \equiv v_c$ platí věta, která souvisí s větou 2,16.

Věta 2,18. Vzdálenost bodů V^a, V^b, \dots od bodu V^v roste s úhlem φ^a slabě samodružně přímkou $a_1 \equiv a_c, b_1 \equiv b_c, \dots$ s hlavní vertikálou $v_1 \equiv v_c$ od O nade všechny meze, jestliže úhel φ^a roste v intervalu $\langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$.

Důkaz (obr. 27, 28). Zřejmě je $V^vV^a = O_0V^v \cdot \text{tg } \varphi^a$. S rostoucím úhlem φ^a v uvedeném intervalu roste i vzdálenost V^vV^a nade všechny meze, cbd.

Pro $\varphi = 90^\circ$ je bod V^a bodem nevlastním, jak odpovídá větě 2,16.

Uvažme vzdálenosti hlavního bodu H od kružnic perspektivity k^v, k^a, \dots . Z obr. 27 je možno soudit, že vzdálenost hlavního bodu H od kružnice perspektivity k^v náležící hlavní vertikále není nejmenší, jak je tomu u středu O_0 vzhledem ke kružnicím perspektivity, což bylo uvažováno ve větě 2,18. Lze ukázat, že platí věta.

Věta 2,19. *Vzdálenost hlavního bodu H od kružnic perspektivity klesá s rostoucím úhlem φ v intervalu $(0^\circ, 90^\circ)$ po určitou minimální hodnotu, načež roste neomezeně nade všechny meze. Minimální hodnoty nabude uvedená vzdálenost pro slabě samodružnou přímku svírající s hlavní vertikálou úhel φ vyhovující rovnici:*

$$\sin \varphi = \frac{d}{v}.$$

Důkaz (obr. 27). Vytkněme slabě samodružnou přímku $a_1 \equiv a_c$ dané Dürerovy soustavy o stopníku Z^a , úběžníku U_c^a a svírající s hlavní vertikálou úhel φ^a . Kružnice perspektivity jí příslušející k^a má střed v době U_c^a a poloměr

$$U_c^a Z^a = r^a = \frac{v}{\cos \varphi^a}. \quad (1)$$

Pro hlavní bod H je $U_c^a H = d \cdot \operatorname{tg} \varphi^a$, pro její průsečík T^a s horizontem h platí:

$$\begin{aligned} U_c^a T^a &= r^a = U_c^a Z^a, \\ HT^a &= r^a - U_c^a H = \frac{v}{\cos \varphi^a} - d \cdot \operatorname{tg} \varphi^a. \end{aligned} \quad (2)$$

Funkce HT^a je v intervalu $(0^\circ, 90^\circ)$ spojitá a má tam své totální minimum. Její derivace je

$$(HT^a)' = \frac{v \cdot \sin \varphi^a}{\cos^2 \varphi^a} - \frac{d}{\cos^2 \varphi^a} = \frac{v \cdot \sin \varphi^a - d}{\cos^2 \varphi^a}.$$

Pro extrém je

$$(HT^a)' = \frac{v \cdot \sin \varphi^a - d}{\cos^2 \varphi^a} = 0, \quad \cos \varphi^a \neq 0,$$

$$\sin \varphi^a = \frac{d}{v}, \quad \text{cbd.}$$

Příklady:

Pro $v = 3, d = 2,$

$$\varphi = 0^\circ : HT^a = v = 3,$$

$$\varphi = 10^\circ : HT^a = 2,694,$$

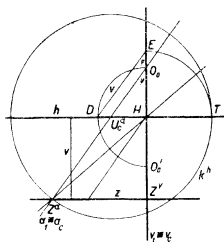
$$\varphi = 80^\circ : HT^a = 4,780.$$

Vzhledem k získaným výsledkům můžeme vyslovit definici.

Definice 2,5 (hraniční kružnice, hraničního bodu T)

Hraniční kružnice perspektivity dané Dürerovy soustavy je ta z kružnic perspektivity, která náleží slabě samodružné přímce $m_1 \equiv m_c$, pro jejíž úhel φ s hlavní vertikálou platí: $\sin \varphi = d : v$. Její průsečík s horizontem soustavy má uvedenou vlastnost a nazývá se hraniční bod dané Dürerovy soustavy.

Konstrukci hraniční kružnice k^m a hraničního bodu T podává obr. 27 a obr. 29.



Obr. 29

Konstrukce. V obr. 27 je sestřen úhel φ^{min} v trojúhelnících $\triangle Z^v HE$, $\triangle O_0 FH$ při původní poloze jednak výšky v , jednak distance d . (Bod F je v obr. 27 bez označení.) Kružnice perspektivity k^m slabě samodružné přímky $m_1 \equiv m_c \parallel HE$ je hraniční kružnice soustavy, její průsečík s horizontem h je hraniční bod.

V obr. 29 je tato slabě samodružná přímka označena $a_1 \equiv a_c$. Platí

$$HO_0 = HO_0' = HO = d, \quad HZ^v = DE = v, \\ \sphericalangle DEH = \varphi, \quad Z^v O_0 \parallel DE \parallel a_1 \equiv a_c.$$

Hraniční kružnice je kružnice perspektivity příslušící slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$. Je označena k^h , její střed je U_c^s , poloměr $U_c^s Z^s$.

Hraniční bod T je $T \equiv k^h \cdot h$.

O poloměru hraniční kružnice a o poloze hraničního bodu vzhledem k hlavnímu bodu H můžeme vyslovit větu.

Věta 2.20. Poloměr hraniční kružnice dané Dürerovy soustavy je

$$r = \frac{v^2}{\sqrt{v^2 - d^2}}, \quad v^2 - d^2 \neq 0.$$

Vzdálenost hraničního bodu dané Dürerovy soustavy od hlavního bodu H je

$$HT = \pm \sqrt{v^2 - d^2}.$$

Důkaz. a) Poloměr každé kružnice perspektivity dané Dürerovy soustavy je dan vzorcem

$$r^a = \frac{v}{\cos \varphi^a}.$$

Avšak z $\triangle DEH$ (obr. 29), jehož strany jsou v , d , $\sqrt{v^2 - d^2}$, vyplývá

$$\cos \varphi = \frac{EH}{ED} = \frac{\sqrt{v^2 - d^2}}{v},$$

takže

$$r^a = \frac{v^2}{\sqrt{v^2 - d^2}}$$

b) Vzdálenost HT [rovnice (2)] je

$$HT = \frac{v}{\cos \varphi} - d \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{d}{\sqrt{v^2 - d^2}},$$

$$HT = \frac{v^2}{\sqrt{v^2 - d^2}} - \frac{d^2}{\sqrt{v^2 - d^2}},$$

$$HT = \frac{v^2 - d^2}{\sqrt{v^2 - d^2}} = \frac{(v^2 - d^2) \cdot \sqrt{v^2 - d^2}}{v^2 - d^2}, \quad v^2 - d^2 \neq 0,$$

$$HT = \pm \sqrt{v^2 - d^2}, \quad \text{cbd.}$$

V obr. 29 tedy je $HE = HT$.

Je patrné, že existují v soustavě dva hraniční body T souměrně položené podle hlavní vertikály.

Než položíme a zodpovíme další otázku o první Dürerově soustavě, vyzdvihneme dvě důležité věty, které byly již dříve vyslovené a dokázané.

Věta 2.21. Geometrickým místem středů perspektivity O^a, O^b, \dots náležících slabě samodružným přímkám $a_1 \equiv a_c, b_1 \equiv b_c, \dots$ dané perspektivní kolíneace po jejím rozštěpení otočením soustavy q^1 o úhel γ téže velikosti je samodružná přímka x protilehlá k středu $O_0 \equiv X$.

Věta 2.22. Geometrickým místem středů perspektivity $O_{\gamma_1}^a, O_{\gamma_2}^a, \dots$ náležících slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ dané perspektivní kolíneace po jejím rozštěpení otočením o úhel γ všech přípustných velikostí $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ je kružnice perspektivity k^a příslušící slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$.

Vzhledem k výsledkům vysloveným v posledních dvou větách můžeme položit další otázky. Odpověď na ně ukáže další zajímavé vztahy, případně jejich užití při mechanických konstrukcích perspektiv.

Otázka 1. Co je geometrickým místem samodružných přímek náležících všem přípustným velikostem úhlu otočení v dané 1. Dürerově soustavě?

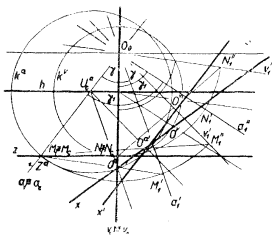
Otázka 2. Co je geometrickým místem kružnic perspektivity náležících všem slabě samodružným přímkám dané 1. Dürerovy soustavy?

Odpověď na druhou otázku vyplývá z právě provedených úvah o 1. Dürerově soustavě. Kružnice perspektivity tvoří jednoparametrickou soustavu kružnic se středy incidentními s horizontem h . Jejich poloměry rostou počínajíc velikostí výšky

středu zobrazené nad všechny meze s rostoucí odchylkou samodružné přímky $a_1 \equiv a_c$ od hlavní vertikály.

Odpověď na první otázku vyjádříme větou, jejíž správnost nebudeme podrobně dokazovat, abychom se příliš neodchylovali od tématu mechanických konstrukcí perspektiv.

Věta 2.23. Geometrickým místem samodružných přímek x dané Dürerovy soustavy pro všechny přípustné velikosti úhlu otočení γ je rovinný svazek 4. třídy. Tento svazek se rozpadá v reálný svazek 2. třídy (kuželosečku) a další imaginární část.



Obr. 30

Důkaz (obr. 30, 31).

a) Zopakujeme konstrukci samodružné přímky x náležející dané velikosti otočení γ soustavy ϱ_1 do polohy ϱ'_1 .

1. Vytkneme dvě slabě samodružné přímky, např. $a_1 \equiv a_c, v_1 \equiv v_c$.

2. Sestrojíme jim náležící kružnice perspektivity k^a, k^v .

3. Volíme libovolné otočení γ a sestrojíme středy perspektivity O^a, O^v náležící voleným samodružným přímek při tomto otočení.

4. Přímka x jimi určená je žádaná samodružná přímka

$$x \equiv O^a O^v.$$

b) Je samozřejmé, že platí:

$$\sphericalangle Z^a U_c O^a = \sphericalangle Z^v U_c O^v. \quad (3)$$

Tyto úhly však jsou středové úhly v kružnicích perspektivity k^a, k^v příslušné k obloukům $Z^a O^a, Z^v O^v$. ($Z^a \equiv N_1 \equiv N_c, H \equiv U_c \equiv h, v_1$).

Sestrojíme další samodružné přímky x', x'', \dots příslušné též dvojici slabě samodružných přímek $v_1 \equiv v_c, a_1 \equiv a_c$ pro otočení $\gamma_1, \gamma_2, \dots$, kde je např. $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 \dots$. Jednotlivé páry středů perspektivity $O^{a'}, O^{v'}, O^{a''}, O^{v''}, \dots$ jsou určeny na kružnicích perspektivity k^a, k^v přímkami $U_c O^{a'}, U_c O^{v'}, U_c O^{a''}, U_c O^{v''}, \dots$, které náleží do obou svazků o středech $U_c \equiv H$ resp. U_c^v .

Pro jednotlivé dvojice přímek svazků platí rovnost (3). Např.

$$\begin{aligned} \sphericalangle Z^a U_c O^a &= \sphericalangle Z^v U_c O^v, \\ \sphericalangle O^a U_c O^{a'} &= \sphericalangle O^v U_c O^{v'}, \dots \end{aligned}$$

Oba svazky jsou zřejmě shodné. I svazky přímek o středech v libovolných bodech kružnic k^a, k^v určené řadami středů perspektivity na obou kružnicích jsou podle věty o obvodových úhlech kružnic náležejících též těmto kružnicím shodné.

Řady středů perspektivity

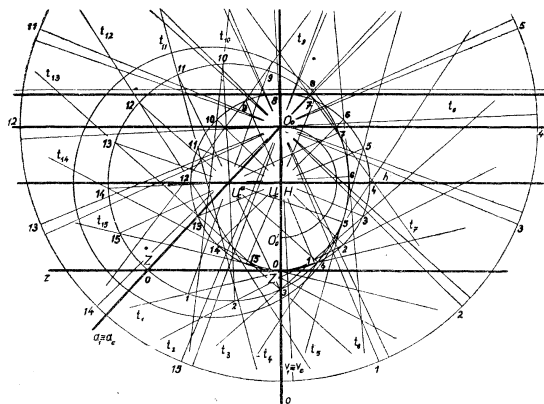
$$O^a, O^{a'}, O^{a''}, \dots O^v, O^{v'}, O^{v''}, \dots$$

incidentních s kružnicemi k^p, k^q jsou proto podobné. Podle definice projektivnosti jsou uvedené svazky i kvadratické řady středů perspektivity na kružnicích k^p, k^q projektivní. V projektivní geometrii však platí věta, která je uvedena bez důkazu.

Věta 2,24. *Dvě projektivní kvadratické řady bodů v téže rovině vytvoří bikvadratický svazek přímek. Přitom je přímka tohoto svazku dána oběma odpovídajícími si body daných kvadratických projektivních řad. Přímky tohoto bikvadratického svazku obalují křivku 4. třídy. Libovolným bodem její roviny procházejí nejvýš 4 přímky svazku [20].*

Přímky našeho svazku jsou právě samodružné přímky x', x'', x''', \dots dané Dürerovy soustavy.

V daném speciálním případě, kdy jsou obě kuželosečky kružnice s podobnými bodovými řadami, se vytvořený bikvadratický svazek přímek rozpadá. V projektivní geometrii se učí, že bikvadratický svazek přímek se rozpadá různým způsobem, např. v reálný svazek 2. třídy (obr. 31) a další část reálnou nebo imaginární. To nastane v daném případě, cbd.



Obr. 31

Je samozřejmé, že nás bude zajímat vzhledem k tématu práce reálná část svazku a proto bude nutné zjistit elementárními prostředky některé jeho vlastnosti.

Definice 2,6 (*řídící kuželosečky*)

Reálnou část obálky bikvadratického svazku, o kterém byla řeč ve větě 2,24, budeme nazývat řídící kuželosečkou dané Dürerovy soustavy.

V obr. 31 jsou sestrojeny tečny řídicí kuželosečky k Dürerovy soustavy pro $d < v$ při aplikaci ${}^1\Omega$ -promítání.

V obr. 46 jsou načrtnuty tečny řídicí kuželosečky pro $d > v$ při aplikaci ${}^2\Omega$ -promítání.

O řídicí kuželosečce můžeme vyslovit několik vět.

Věta 2.25. Základnice z a tečna t^r ke kružnici perspektivity k^r v diametrálním bodě V^r k základnímu bodu Z^r jsou tečnami řídicí kuželosečky k .

Důkaz (obr. 31). Základnice z splývá se samodružnou přímkou x po rozštěpení perspektivní kolincace otočením soustavy ϱ_1 o úhel velikosti 0° . Je totiž podle konstrukce středů perspektivity O^r , O^s náležících slabě samodružným přímkám $v_1 \equiv v_c$, $a_1 \equiv a_c$ pomocí kružnic perspektivity k^r , k^s , ... dříve uvedených (obr. 23) a podle věty 2.10

$$O^r \equiv Z^r, \quad O^s \equiv Z^s.$$

Při otočení soustavy ϱ_1 o úhel $\gamma = 180^\circ$ náleží oběma samodružným přímkám $v_1 \equiv v_c$, $a_1 \equiv a_c$ podle konstrukce středů perspektivity pomocí kružnic perspektivity a podle věty 2.10 body V^r , V^s jako středy perspektivity. Oba určují samodružnou přímkou $x^r \equiv t^r$ (obr. 27), která je podle věty 2.17 tečnou $t^r \parallel z$ ke kružnici perspektivity k^r , cbd.

Věta 2.26. Hlavní vertikála v je osou souměrnosti řídicí kuželosečky.

Důkaz. Ukážeme, že samodružné přímky, tečny řídicí kuželosečky jsou souměrně položené podle hlavní vertikály. Např. samodružné přímky náležící otočení $\gamma = 90^\circ$ a $\gamma = 270^\circ$ mají tuto vlastnost (obr. 32). Užijeme věty 2.5 o poloze samodružné přímky x patřící otočení $\gamma = 90^\circ$ (obr. 20).

Přímý důsledek posledních dvou vět je další věta.

Věta 2.27. Průměr $Z^r V^r$ kružnice perspektivity k^r je hlavní osa řídicí kuželosečky k . Hlavní bod H je její střed, horizont h je osa vedlejší co do polohy.

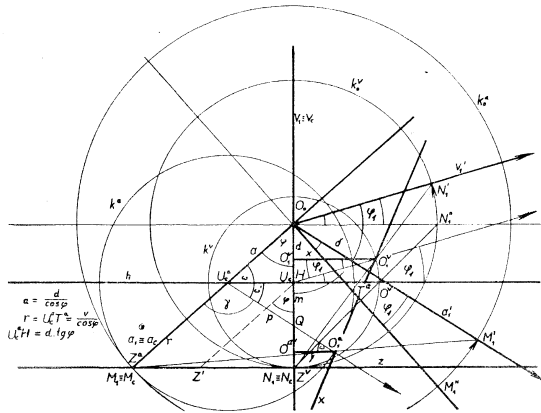
Abychom určili velikost osy vedlejší, stačí sestrojít tečnu kuželosečky rovnoběžnou s hlavní osou $Z^r V^r$, tj. samodružnou přímkou x rovnoběžnou s hlavní vertikálou $v_1 \equiv v_c$. Pro její určení platí tato věta:

Věta 2.28. Samodružná přímka x rovnoběžná s hlavní vertikálou náleží rozštěpení Dürerovy soustavy otočením o úhel $\gamma = 90^\circ + \varphi_1$, pro nějž platí

$$\sin \varphi_1 = \frac{d}{v}.$$

Důkaz. (obr. 33) Jelikož je v I. Dürerově soustavě $d < v$, úhel φ_1 reálně existuje. Podle věty 2.5 (obr. 20) náleží hlavní vertikále $v_1 \equiv v_c$ při otočení základní roviny ϱ_1

samodružná přímka x kolmá k přímce perspektivity O_0O^0 příslušící hlavní vertikále, kde $O^0 \in h$, $HO^0 = v$. Pokud není $d = 0$, tj. pokud $O_0 \neq H$, a tomu tak skutečně není, není též samodružná přímka x náležící otočení $\gamma = 90^\circ$ rovnoběžná s hlavní vertikálou $v_1 \equiv v_c$.



Obr. 33

Náleží tedy samodružná přímka $x \parallel v$ otočení $\gamma = 90^\circ + \varphi_1$. Abychom určili velikost úhlu φ_1 , vytkněme mimo hlavní vertikálu libovolnou samodružnou přímku $a_1 \equiv a_c$ svírající s hlavní vertikálou úhel φ a určíme oba středy perspektivity O^0 , O^a náležící hlavní vertikále $v_1 \equiv v_c$ a samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ při otočení soustavy q_1 o zvolený úhel $\gamma = 90^\circ + \varphi_1$. Z podmínky, aby vzdálenosti x, y těchto středů perspektivity od hlavní vertikály byly stejné, plyne vztah pro φ_1 .

Jak je vidět z obr. 33, platí tyto vztahy plynoucí z konstrukce středu perspektivity O^0 :

$$U_c O_1^0 \parallel O_0 N_1^0,$$

kde

$$\sphericalangle N_1^0 O_0 Z^0 = 90^\circ + \varphi_1, \quad O_1^0 \in k^0, \quad U_c O^0 \parallel v_1^0, \quad \sphericalangle O_1^0 U_c O^0 = \varphi_1.$$

Z konstrukce středu perspektivity O^a vyplývá:

$$U_c^a O_1^a \parallel O_0 M_1^a,$$

$$\sphericalangle M_1^a O_0 Z^a = 90^\circ + \varphi_1, \quad O_1^a \in k^a, \quad U_c^a O_1^a \parallel a_1^a, \quad \sphericalangle O_1^a U_c^a O^a = \varphi_1.$$

Dále je $\gamma = 90^\circ + \varphi_1$.

Z rovnoběžnosti $U_c^a O_1^a \parallel a_1'$ plyne:

$$\begin{aligned}\omega &= 180^\circ - \gamma = 180^\circ - (90^\circ + \varphi_1), \\ \omega &= 90^\circ - \varphi_1, \\ \omega' &= \omega - (90^\circ - \varphi) = 90^\circ - \varphi_1 - (90^\circ - \varphi), \\ \omega' &= \varphi - \varphi_1, \\ U_c^a O_0 &= \frac{d}{\cos \varphi}, \quad U_c^a H = d \cdot \operatorname{tg} \varphi.\end{aligned}$$

Z $\triangle U_c^a H Q$, kde $Q \equiv U_c^a O_1^a$ ($v_1 \equiv v_c$) vyplývá

$$\begin{aligned}m = HQ &= U_c^a H \cdot \operatorname{tg} \omega' = d \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \omega' = d \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_1) \\ p = U_c^a Q &= \frac{U_c^a H}{\cos \omega'} = \frac{d \cdot \operatorname{tg} \varphi}{\cos \omega'} = \frac{d \cdot \operatorname{tg} \varphi}{\cos(\varphi - \varphi_1)} \\ U_c^a O_1^a &= U_c^a Z^a = r = \frac{v}{\cos \varphi} \\ QO_1^a &= U_c^a O_1^a - p = \frac{v}{\cos \varphi} - \frac{d \cdot \operatorname{tg} \varphi}{\cos(\varphi - \varphi_1)}.\end{aligned}$$

Nechť jsou x, y vzdálenosti středu O^v , resp. O^a od hlavní vertikály. Pak je

$$\begin{aligned}U_c^a H : U_c^a Q &= y : QO_1^a, \\ y &= O_1^a O_1^a = \frac{U_c^a H \cdot QO_1^a}{U_c^a Q}, \\ y &= \frac{d \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{v}{\cos \varphi} - \frac{d \cdot \operatorname{tg} \varphi}{\cos(\varphi - \varphi_1)}}{\frac{d \cdot \operatorname{tg} \varphi}{\cos(\varphi - \varphi_1)}}, \\ x &= O_1^a O_1^a = v \cdot \cos \varphi_1.\end{aligned}$$

Pro samodružnou přímkou $x \equiv O_1^a O_1^a \parallel v$ platí: $x = y$.

Je tedy

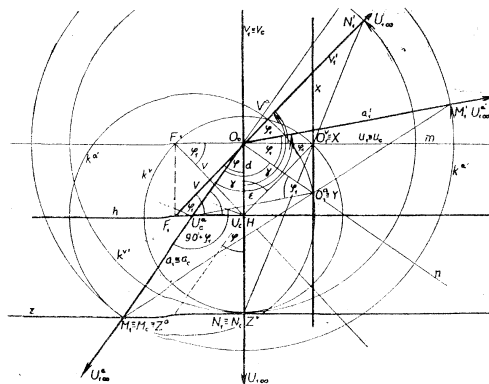
$$\begin{aligned}v \cdot \cos \varphi_1 &= \frac{d \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \left[\frac{v}{\cos \varphi} - \frac{d \cdot \operatorname{tg} \varphi}{\cos(\varphi - \varphi_1)} \right]}{\frac{d \cdot \operatorname{tg} \varphi}{\cos(\varphi - \varphi_1)}} = \\ &= \frac{d \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot [v \cdot \cos(\varphi - \varphi_1) - d \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \varphi]}{d \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \varphi}, \\ v \cdot \cos \varphi_1 &= \frac{v \cdot \cos(\varphi - \varphi_1) - d \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \varphi}{\cos \varphi}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi &= v \cdot \cos (\varphi - \varphi_1) - d \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \varphi = \\
 &= v \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi_1 + v \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varphi_1 - d \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi_1 \\
 v \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varphi_1 &= d \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi_1 \\
 \sin \varphi_1 &= \frac{d \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \varphi}{v \cdot \sin \varphi} = \frac{d}{v}, \quad \text{cbd.}
 \end{aligned}$$

V obr. 34 je sestrojen úhel φ_1 a je uvažována přímka x náležící otočení soustavy ϱ_1 o úhel $\gamma = 90^\circ + \varphi_1$.

Úloha 2.2. Je sestrojiti úhel φ_1 vyhovující požadavkům věty 2,28.

Konstrukce. 1. Je dána Dürerova soustava svým obrazem (O_0, z, h) . Je výtčena hlavní vertikála $v_1 \equiv v_c$ a libovolná samodružná přímka $a_1 \equiv a_c$ a jsou sestrojeny kružnice perspektivity k', k'' jim náležící.



Obr. 34

2. Sestrojena $O_0F \equiv u_1 \equiv u_c \parallel h$,

$$F \equiv (u_1 \equiv u_c) \cdot k''.$$

3. $\sphericalangle O_0FH \equiv \sphericalangle O_0F_1H = \varphi_1$.

Úloha 2.3. Je sestrojiti samodružnou přímku $x \equiv O_1^a O_1^a$ rovnoběžnou s hlavní vertikálou $v_1 \equiv v_c$.

Konstrukce (obr. 34).

1. Sestrojena $O_0N'_1$ tak, aby $\sphericalangle mO_0N'_1 = \varphi_1$,
takže

$$\sphericalangle Z^a O_0N'_1 = \gamma = 90^\circ + \varphi_1.$$

2. Sestrojena $O_0M'_1$ tak, aby $\sphericalangle nO_0M'_1 = \varphi_1$, $n \in O_0$, $n \perp a_1 \equiv a_c$
takže

$$\sphericalangle Z^a O_0M'_1 = \gamma = 90^\circ + \varphi_1.$$

3. $U_c O_1^a \parallel O_0N'_1$, $O_1^a \equiv U_c O_1^c \cdot k^a$,
kontrola

$$O_1^a \equiv HO_1^c \cdot k^a \cdot N_c N'_1.$$

4. $U_c^a O_1^a \parallel O_0M'_1$, $O_1^a \equiv U_c^a O_1^c \cdot k^a$,
kontrola

$$O_1^a \equiv U_c^a O_1^c \cdot k^a \cdot M_c M'_1.$$

5. $x \equiv O_1^a O_1^c$

Polohu obou středů perspektivity O_1^a , O_1^c , jimiž je určena samodružná přímka $x \equiv O_1^a O_1^c \parallel v_1 \equiv v_c$, určuje ještě blíže věta.

Věta 2,29. *Střed perspektivity O_1^a je incidentní s přímkou $u_1 \equiv u_c \parallel h$, $u_1 \equiv u_c \in O_0$, (slabě samodružná přímka rovnoběžná s horizontem, normála hlavní vertikály $v_1 \equiv v_c$). – Střed perspektivity O_1^c je incidentní s normálou $n \perp a_1 \equiv a_c$, $n \in O_0$.*

Důkaz (obr. 34). 1. Nechť $u_1 \equiv u_c$ protne kružnici perspektivity k^a v bodě $X \equiv \equiv k$, ($u_1 \equiv u_c$). Je $X \equiv O_1^a$?

Na základě souměrnosti podle hlavní vertikály je

$$O_0F = O_0X, \quad \sphericalangle O_0XU_c = \sphericalangle O_0FU_c = \varphi_1.$$

Avšak $\sphericalangle N'_1 O_0 X = \sphericalangle O_0 X U_c = \varphi_1$, z čehož plyne, že

$$U_c X \parallel O_0 N'_1 \text{ a též } U_c O_1^a \parallel O_0 N'_1.$$

Proto $O_1^a \equiv X$, cbd.

(Z $\triangle O_1^a O_0 U_c$ je patrné, že $O_0 O_1^a = \sqrt{v^2 - d^2} = v \cdot \cos \varphi_1$.)

2. Nechť je průsečík kružnice perspektivity k^a s normálou n bod Y , $Y \equiv k^a$, n . Je $Y \equiv O_1^c$? Z konstrukce středu perspektivity O_1^c vyplývá pro $\triangle U_c^a O_1^c O_0$ (obr. 35)

$$O_0 M'_1 \parallel U_c^a O_1^c, \quad \sphericalangle M'_1 O_0 O_1^c = \sphericalangle O_0 O_1^c U_c^a = \varphi_1, \\ \sphericalangle O_0 U_c^a O_1^c = \sphericalangle V^a O_0 M'_1 = 180^\circ - (90^\circ + \varphi_1) = 90^\circ - \varphi_1.$$

Dva úhly $\triangle U_c^a O_1^c O_0$ jsou doplňkové, trojúhelník je pravoúhlý. Bod O_0 je vrchol jeho pravého úhlu.

Avšak i trojúhelník $U_c^a Y O_0$ je pravoúhlý, neboť $n \perp U_c^a O_0$. A protože je $U_c^a O_0 = = r = U_c^a Y$, jsou oba trojúhelníky shodné

$$\triangle U_c^a O_1^c O_0 \cong \triangle U_c^a Y O_0 \quad (\text{sSu}).$$

Mají společnou stranu $U_c O_0$ a jsou incidentní s touž polorovinou $U_c^o O_0 O_1^o$. Body O_1^o , Y vyplývají,

$$O_1^o \equiv Y, \text{ cbd.}$$

Z vět 2,25–2,28 je patrný tvar řídicí kuželosečky, což můžeme vyjádřit větou.

Věta 2,30. *V případě první Dürerovy soustavy ($d < v$) je řídicí kuželosečkou elipsa.*

Důkaz (obr. 31, 34). Podle věty 2,25. jsou základnice z a diametrální k ní tečna t^o ke kružnici perspektivity k^o v jejím bodě V^o párem rovnoběžných tečen řídicí kuželosečky k . Obě jsou reálné. Podle věty 2,27 je hlavní vertikála $Z^o V^o$ osou řídicí kuželosečky. Podle věty 2,28 je tečna řídicí kuželosečky rovnoběžná s její osou též reálná, neboť $\sin \varphi_1 = d : v < 1$. Kuželosečka je tedy elipsa, cbd.

Větou 2,28 bylo ukázáno, že samodružná přímka x rovnoběžná s hlavní vertikálou $v_1 \equiv v_c$ náleží otočení $\gamma = 90^\circ + \varphi_1$. Bližší vztah této samodružné přímky k hlavní vertikále vyjadřuje další věta.

Věta 2,31. *Samodružná přímka x rovnoběžná s hlavní vertikálou je incidentní s hraničním bodem T Dürerovy soustavy, tj. vzdálenosti obou od hlavní vertikály jsou stejné.*

Důkaz (obr. 34). a) Podle věty 2,20 je vzdálenost hraničního bodu T od hlavní vertikály $HT = \sqrt{v^2 - d^2}$.

Vzdálenost samodružné přímky x od hlavní vertikály je podle definice rovnoběžných přímek dána vzdáleností jejího bodu O_1^o od hlavní vertikály. Ze shodnosti trojúhelníků $\triangle O_0 F U_c \cong \triangle O_0 O_1^o U_c$ v obr. 34 je vidět, že platí:

$$O_0 O_1^o = O_0 F = \sqrt{v^2 - d^2},$$

což odpovídá i formuli uvedené v důkazu věty 2,29

$$O_0 O_1^o = v \cdot \cos \varphi_1 = \sqrt{v^2 - d^2}, \text{ cbd.}$$

Z těchto vět vyplývá bezprostředně další věta.

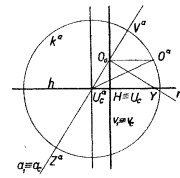
Věta 2,32. *Řídicí kuželosečka k dané Dürerovy soustavy je incidentní s jejím hraničním bodem T . Vedlejší osa kuželosečky je $b = \sqrt{v^2 - d^2}$.*

Důkaz správnosti věty je zřejmý.

Je třeba připomenout, že vzhledem k souměrnosti Dürerovy soustavy podle hlavní vertikální roviny i jejího obrazu podle hlavní vertikály jde o dvě samodružné přímky rovnoběžné s hlavní vertikálou a souměrně položené podle ní, o dvě hraniční kružnice k^T i o dva hraniční body téže vlastnosti.

Je možno ještě vyslovit větu o ohniscích řídicí kuželosečky k .

Věta 2,33. *Oba Ω -průměty O_0 , O_0^o středu O Dürerovy soustavy do perspektivní průmětny π jsou ohniska řídicí kuželosečky.*



Obr. 35

Důkaz. Podle věty 2,30 je řídicí kuželosečka k elipsa. Hlavní její poloosa a podle věty 2,27

$$a = v.$$

Její vedlejší poloosa b je podle věty 2,32

$$b = \sqrt{v^2 - d^2}.$$

Její excentricita je podle známé věty z elementární geometrie kuželoseček

$$e = \frac{d}{a} = \frac{d}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{d}{\sqrt{v^2 - (v^2 - d^2)}} = \frac{d}{d} = 1.$$

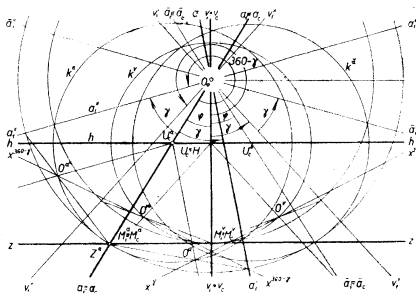
Avšak vzdálenost obou Ω -průmětů O_0, O'_0 od hlavního bodu je d (až na znamení při zavedené orientaci), cbd.

Obojí Ω -promítání aplikované v dané Dürerově soustavě má v teorii mechanických metod rýsování perspektiv uvažovaných v dalším textu značný význam. Např. při určení polohy přímky perspektivity vzhledem k úhlu otočení, při otázce druhu řídicích kuželoseček apod.

Než odpovíme na některé tyto otázky, vyslovíme a dokážeme pomocné věty.

Věta 2,34. *Samodružné přímky x dané Dürerovy soustavy jsou souměrně rozloženy podle hlavní vertikály $v_1 \equiv v_c$.*

Důkaz (obr. 32, 36). O této skutečnosti je mluveno ve větě 2,26. I z obr. 36 je patrné, že samodružné přímky $x^{\gamma}, x^{360-\gamma}$ příslušné otočením udaným indexy jsou souměrně položené podle hlavní vertikály.

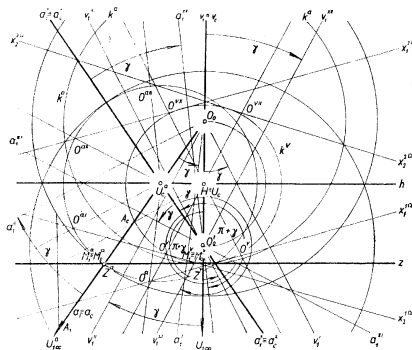


Obr. 36

Věta 2,35. *Při aplikaci ${}^1\Omega$ -promítání v první Dürerově soustavě náleží rozštěpení jejího obrazu otočením γ v kladném smyslu samodružná přímka x_1^{Ω} (obr. 37, 38, 39). Při aplikaci ${}^2\Omega$ -promítání v téže soustavě náleží rozštěpení jejího obrazu otočením*

$\pi + \gamma$ v témž kladném smyslu samodružná přímka $x_1^{2\Omega}$ rovnoběžná se samodružnou přímkou $x_1^{1\Omega}$ a souměrně položená k této samodružné přímce $x_1^{1\Omega}$ podle hlavního bodu $H \equiv U_c$.

Důkaz (obr. 37, 38). K sestrojení samodružné přímky x první Dürerovy soustavy při aplikaci ${}^1\Omega$ -promítání a rozštěpení otočením γ užijeme hlavní vertikály $v_1 \equiv v_c$ a slabě samodružné přímky $a_1 \equiv a_c$ svírající s hlavní vertikálou úhel φ . Samodružná přímka je $x_1^{1\Omega} \equiv O^v O^a$, kde jsou O^v , O^a příslušné středy perspektivity incidentní s kružnicemi perspektivity k^v , resp. k^a .



Obr. 37

K sestrojení samodružné přímky $x_1^{2\Omega}$ při aplikaci ${}^2\Omega$ -promítání a při rozštěpení $\pi + \gamma$ užijeme opět hlavní vertikály označené $v_1^x \equiv v_c^x$ a slabě samodružné přímky $a_1^x \equiv a_c^x$ mající úběžník totožný s úběžníkem U_c^a přímky $a_1 \equiv a_c$. Příslušné středy perspektivity O^{v^x} , O^{a^x} jsou incidentní s oběma uvedenými kružnicemi perspektivity k^v , k^a , které z jednoduchých důvodů náleží i slabě samodružným přímkám $v_1^x \equiv v_c^x$, $a_1^x \equiv a_c^x$. Středy O^{v^x} , O^{a^x} jsou sestrojeny známým způsobem:

$$\begin{aligned} O^{v^x} &\equiv k^v \cdot U_c O^{v^x}, & U_c O^{v^x} &\parallel v_1^{v^x}, \\ O^{a^x} &\equiv k^a \cdot U_c O^{a^x}, & U_c O^{a^x} &\parallel a_1^{a^x}. \end{aligned}$$

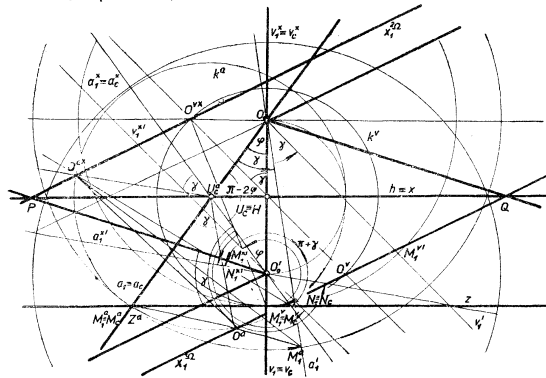
Kontrola správnosti konstrukce:

$$O^{v^x} \in M_c^v M_1^{v^x}, \quad O^{a^x} \in N_c^a N_1^{a^x} \quad (\text{obr. 38}).$$

V obr. 37 jsou sestrojeny samodružné přímky $x_1^{1\Omega}$ a $x_2^{1\Omega}$ při aplikaci ${}^1\Omega$ -projekce

a otočení γ , resp. $-\gamma$. Těž je sestrojen druhý pár x_1^{21} , resp. x_2^{21} při aplikaci ${}^2\Omega$ -projekce a otočení $\pi + \gamma$, resp. $-(\pi + \gamma)$.

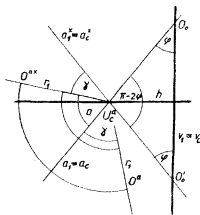
Abychom prokázali správnost druhé části věty, ukážeme, že čtyřúhelník $O^a O^v O^{ax} O^{vx}$ je rovnoběžník. Stačí však dokázat, že jeho protilehlé strany $O^a O^v$, $O^{ax} O^{vx}$ jsou rovnoběžné. Ukážeme však i na rovnost a rovnoběžnost protilehlých stran dalších, např. $O^a O^{ax}$, $O^v O^{vx}$.



Obr. 38

a) Přímka HO^v splývá podle konstrukce s přímkou HO^{ax} , neboť $\sphericalangle M_1 HO^v = \sphericalangle O^c HO^{ax} = \gamma$. Oba středy perspektivity O^v , O^{ax} jsou incidentní s kružnicí perspektivity k^a , jsou to její diametrální body a platí:

$$O^v O^{ax} = 2v.$$



Obr. 39

b) Oba středy perspektivity O^a , O^{ax} , náležící slabě samodružným přímkám $a_1 \equiv a_c$, $a_1^a \equiv a_c^a$, incidentní s kružnicí perspektivity k^a , a bod U_c^a , úběžník obou slabě samodružných přímek, tvoří trojúhelník rovnoramenný o vrcholovém úhlu $\pi - 2\varphi$.

$$\sphericalangle a_1^a U_c^a Z^a = \pi - 2\varphi,$$

$$\sphericalangle O^{ax} U_c^a O^a = \pi - 2\varphi - \gamma + \gamma = \pi - 2\varphi$$

(obr. 39).

Je-li poloměr kružnice perspektivity k^a náležící slabě

samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ dán vzorcem $r_1 = v/\cos \varphi$ (v je výška středu O), pak je základna $O^a O^{ax}$:

$$O^a O^{ax} = 2r_1 \cdot \sin \frac{\pi - 2\varphi}{2} = 2r_1 \cdot \sin(R - \varphi) = 2r_1 \cdot \cos \varphi,$$

$$O^a O^{ax} = 2 \frac{v \cdot \cos \varphi}{\cos \varphi} = 2v.$$

Je tedy $O^a O^{ax} = O^a O^{ax}$.

c) Ukážeme, že $O^a O^{ax} \parallel O^a O^{ax}$ (obr. 38). Zdá se, že nejjednodušší bude důkaz analytický. Počátek soustavy souřadnicové nechť je hlavní bod H , souřadnicová osa x nechť splývá s horizontem h , souřadnicová osa y s hlavní vertikálou $v_1 \equiv v_c$. – Kružnice perspektivity k^v, k^a mají rovnice:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= v^2, \\ (x + d \cdot \operatorname{tg} \varphi)^2 + y^2 &= \frac{v^2}{\cos^2 \varphi}. \end{aligned}$$

Přímky $O^a O^{ax}, U_c^a O^a$, resp. $U_c^a O^{ax}$ mají rovnice:

$$\begin{aligned} O^a O^{ax} &\equiv y = \operatorname{tg}(90^\circ + \gamma) \cdot x, \\ U_c^a O^a &\equiv y = \operatorname{tg}[90^\circ - (\varphi - \gamma)] \cdot (x + d \cdot \operatorname{tg} \varphi), \\ U_c^a O^{ax} &\equiv y = \operatorname{tg}[90^\circ + (\varphi + \gamma)] \cdot (x + d \cdot \operatorname{tg} \varphi). \end{aligned}$$

Po krátkém výpočtu obdržíme souřadnice středů perspektivity

$$\begin{aligned} &O^v, O^a, O^{vx}, O^{ax}: \\ &O^v(v \cdot \sin \gamma; -v \cdot \cos \gamma), \\ &O^a\left(\frac{v \cdot \sin(\varphi - \gamma)}{\cos \varphi} - d \cdot \operatorname{tg} \varphi; -\frac{v \cdot \cos(\varphi - \gamma)}{\cos \varphi}\right), \\ &O^{vx}(-v \cdot \sin \gamma; v \cdot \cos \gamma), \\ &O^{ax}\left(-\frac{v \cdot \sin(\varphi + \gamma)}{\cos \varphi} - d \cdot \operatorname{tg} \varphi; \frac{v \cdot \cos(\varphi + \gamma)}{\cos \varphi}\right). \end{aligned}$$

Obě přímky $O^a O^a, O^{vx} O^{ax}$ jsou rovnoběžné.

Směrnice přímek $O^a O^{ax}, O^a O^{ax}$ jsou

$$\begin{aligned} k_1 &= -\operatorname{cotg} \gamma, & k_2 &= -\operatorname{cotg} \gamma, \\ k_1 &= k_2. \end{aligned}$$

Směrnice jsou stejné a obě přímky jsou rovnoběžné.

Směrnice přímek O^vO^w , $O^{vx}O^{wx}$ jsou

$$k_3 = \frac{v \cdot \sin \varphi \cdot \sin \gamma}{v \cdot \sin \varphi \cdot \cos \gamma + d \cdot \sin \varphi},$$

$$k_4 = \frac{v \cdot \sin \varphi \cdot \sin \gamma}{v \cdot \sin \varphi \cdot \cos \gamma + d \cdot \sin \varphi},$$

$$k_3 = k_4$$

Obě přímky O^vO^w , $O^{vx}O^{wx}$ jsou rovnoběžné.

d) Přímka $O^{vx}O^{wx}$ je incidentní se středem perspektivity O^{vx} , který je souměrně položen k středu O^v podle hlavního bodu H . Je tedy samodružná přímka $x_1^{2\Omega} \equiv \equiv O^{vx}O^{wx}$ souměrně položená k samodružné přímce $x_1^{1\Omega} \equiv O^vO^w$ podle hlavního bodu H , středu řídicí kuželosečky k , cbd.

Nyní může být vyslovena věta o vzájemném vztahu řídicích kuželoseček v první Dürerově soustavě při aplikaci obou Ω -promítání.

Věta 2,36. *Řídící kuželosečky k , k^x obrazu 1. Dürerovy soustavy při aplikaci obou Ω -promítání splývají, ať je otočení o úhel γ při rozštěpení soustavy provedeno v kterémkoliv smyslu.*

Důkaz (obr. 37). a) Uvažme $^1\Omega$ -promítání aplikované v dané soustavě, jímž se zobrazí střed O ve střed O_0 příslušné perspektivní kolineace. Po rozštěpení této kolineace otočením soustavy ϱ_1 o úhel γ v kladném smyslu obdržíme samodružnou přímku $x_1^{1\Omega}$ odpovídající tomuto otočení. Jestliže rozštěpíme perspektivní kolineaci otočením téže soustavy o úhel $-\gamma$, je příslušná samodružná přímka $x_2^{1\Omega}$, která však přísluší i rozštěpení otočením o úhel $2\pi - \gamma$ a je tedy dána středy perspektivity O^w , O^v . Obě samodružné přímky náleží tedy témuž biquadratickému svazku přímek.

b) Uvažme $^2\Omega$ -promítání v téže první Dürerově soustavě, jímž se její střed O zobrazí do středu O'_0 jejího obrazu. Rozštěpíme-li perspektivní kolineaci otočením o úhel $\pi + \gamma$ ve smyslu kladném, pak je tomuto otočení přiřazena samodružná přímka $x_1^{2\Omega}$ daná oběma středy perspektivity O^{vx} , O^{wx} .

Podle věty 2,35 právě dokázané je rovnoběžná se samodružnou přímkou $x_1^{1\Omega}$ a souměrně položená podle hlavního bodu, středu řídicí kuželosečky k . Je tedy samodružná přímka $x_1^{2\Omega}$ tečnou této kuželosečky k .

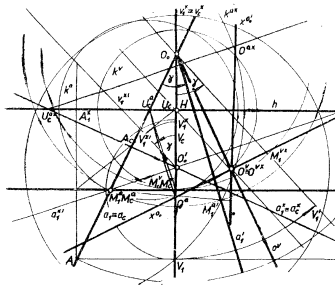
Podle toho můžeme každému rozštěpení perspektivní kolineace otočením γ při aplikaci $^1\Omega$ -promítání, jemuž přísluší určitá samodružná přímka $x_1^{1\Omega}$, přiřadit rozštěpení otočením $\pi + \gamma$ při aplikaci $^2\Omega$ -promítání se samodružnou přímkou $x_1^{2\Omega}$. Obě samodružné přímky, které jsou si tím též přiřazeny, náleží témuž biquadratickému svazku, určujícímu touž řídicí kuželosečku k .

Totéž platí při rozštěpení perspektivní kolineace otočením $-\gamma$ při aplikaci $^1\Omega$ -promítání a při rozštěpení otočením $-(\pi + \gamma)$ při aplikaci $^2\Omega$ -promítání, jak ukazuje obr. 37. Obě si přiřazené samodružné přímky jsou $x_2^{1\Omega} \parallel x_2^{2\Omega}$ souměrně položené podle hlavního bodu H .

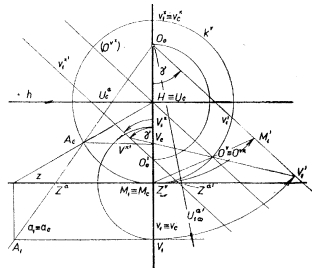
Uvedená věta je správná.

Uvažme obě Ω -projekce v první Dürerově soustavě a označme $x^{O_0}, x^{O_0'}$ samodružné přímky příslušné rozštěpení jejího obrazu otočením γ v témž smyslu. Platí tato věta:

Věta 2,37. *Samodružné přímky $x^{O_0}, x^{O_0'}$ náležící otočení téže velikosti i smyslu při aplikaci obou Ω -promítání se protínají v bodě incidentním s kružnicí perspektivity k^v náležející hlavní vertikále.*



Obr. 40



Obr. 41

Důkaz (obr. 40, 41). Necht' je dána perspektivní kolineace (O_0, z, h) jako obraz první Dürerovy soustavy při aplikaci ${}^1\Omega$ -promítání a pár přiřazených bodů $V_1 \rightarrow V_c$ incidentních s hlavní vertikálou $v_1 \equiv v_c$. Samodružná přímka x^{O_0} náležící rozštěpení perspektivní kolineace otočením γ je incidentní se středem perspektivity O^v příslušným hlavní vertikále. Konstrukce:

$$\begin{aligned} & \sphericalangle V_1 O_0 V_1' = \gamma, \\ O_0 V_1 &= O_0 V_1', & O^v &\equiv V_1' V_c \cdot k^v, \\ O_0 M_1 &= O_0 M_1', & O^v &\equiv M_1' M_c \cdot k^v \equiv M_1' M_c \cdot V_1' V_c, \\ & & O^v &\equiv HO^v \cdot V_1' V_c, \quad (HO^v \equiv U_c O^v \parallel v_1'). \end{aligned}$$

Při aplikaci ${}^2\Omega$ -promítání se zobrazí střed O Dürerovy soustavy v střed O_0' , $O_0' H = O_0 H$, bod V_1 pak se zobrazí do bodu V_1' , ($Z^v V_1 = Z^v V_1'$). Hlavní vertikála je $v_1^v \equiv v_1^x$. Rozštěpením této perspektivní kolineace otočením γ přejde přímka v_1^v v přímku v_1^x , bod V_1^x se otočí do bodu $V_1^{x'}$. Střed perspektivity O^{vx} je jednak

$$O^{vx} \equiv HO^{vx} \cdot k^v, \text{ kde } HO^{vx} \parallel v_1^{x'} \parallel v_1',$$

jednak $O^{vx} \equiv V_1^{x'} V_c \cdot k^v$.

S ním je incidentní samodružná přímka $x^{O_0'}$ náležící rozštěpení otočením γ (obr. 40).

Lze dokázat, že z průsečíků O^{px} , (O^{px}) přímky HO^{px} s kružnicí perspektivity k^p přichází v úvahu bod O^{px} , který zřejmě splývá s O^p , čímž bude věta 2.37 dokázána. Střed perspektivity O^{px} je též, jak je výše uvedeno,

$$O^{px} \equiv V_1^{px} V_c . k^p .$$

(V obr. 41 je bod V_1^{px} označen V^{px}).

Lze ukázat, že přímky $V_1^{px} V_c$, $V_1^p V_c$ splynou, protože splynou i body $O^p \equiv O^{px}$. Charakteristika první perspektivní kolineace je

$$\begin{aligned} k_1 &= (O_0 Z^p V_1 V_c) = (O_0 Z^p U_{1\infty} U_c) = \\ &= \frac{O_0 V_1}{Z^p V_1} : \frac{O_0 V_c}{Z^p V_c} = \frac{O_0 U_{1\infty}}{Z^p U_{1\infty}} : \frac{O_0 U_c}{Z^p U_c} . \\ \frac{O_0 V_1}{O_0 V_c} \cdot \underbrace{\frac{Z^p V_c}{Z^p V_1}}_1 &= 1 \cdot \frac{O_0 U_c}{Z^p U_c} = -\frac{v}{d} . \\ &\quad \frac{1}{m} \\ \frac{O_0 V_1}{O_0 V_c} &= -\frac{v}{d} \cdot m . \end{aligned} \quad (1)$$

Charakteristika druhé perspektivní kolineace je

$$\begin{aligned} k_2 &= (O_0' Z^p V_1' V_c) = (O_0' Z^p U_{1\infty} U_c) = \\ &= \frac{O_0' V_1'}{Z^p V_c} : \frac{O_0' V_c}{Z^p V_c} = \frac{O_0' U_{1\infty}}{Z^p U_{1\infty}} : \frac{O_0' U_c}{Z^p U_c} . \\ \frac{O_0' V_1'}{O_0' V_c} \cdot \underbrace{\frac{Z^p V_c}{Z^p V_1'}}_1 &= 1 \cdot \frac{Z^p U_c}{O_0' U_c} = \frac{v}{d} . \\ &\quad -\frac{1}{m} \\ \frac{O_0' V_1'}{O_0' V_c} &= -\frac{v}{d} \cdot m . \end{aligned} \quad (2)$$

Z výsledků (1), (2) a z rovnoběžnosti $v_1^{px} \parallel v_1^p$ vyplývá, že $\triangle V_c V_1^{px} O_0'$, $\triangle V_c V_1^p O_0$ jsou homotetické podle středu V_c a obě jmenované přímky splývají,

$$V_c V_1^{px} \equiv V_c V_1^p \quad \text{cbd.}$$

V obr. 40 jsou obě samodružné přímky x^{o_0} , $x^{o_0'}$ nakresleny.

Zbývá ještě uvážit rozštěpení první Dürerovy soustavy otočením roviny ϱ_1 o úhel $\gamma = 90^\circ$.

Platí věty obdobné větám, které byly uvedeny pro úhel $\gamma \neq 90^\circ$.

Řídící kuželosečky, jejíž osy jsou snadno sestrojitelné, je možno použít k určování samodružných přímk x pro jednotlivé velikosti úhlu otočení. Toto určení může být v mechanických konstrukcích perspektiv výhodné. Stačí určit jeden bod samodružné přímky x a sestrojít ji jako tečnu řídicí kuželosečky.

Řídící kuželosečky můžeme použít i vzhledem k větám 2,35, 2,36, 2,37. Je-li dána řídicí kuželosečka a samodružná přímka při rozštěpení perspektivní kolineace otočením γ při užití některé Ω -projekce, můžeme sestrojít a) samodružnou přímku při rozštěpení tímž otočením při aplikaci druhé Ω -projekce, b) samodružnou přímku při rozštěpení otočením o úhel $\pi + \gamma$ při aplikaci druhé Ω -projekce.

Konstrukce. a) Hledaná samodružná přímka je tečna řídicí kuželosečky k vedená z příslušného průsečíku dané samodružné přímky s kružnicí perspektivity náležící hlavní vertikále. b) Hledaná samodružná přímka je tečna řídicí kuželosečky rovnoběžná s danou samodružnou přímkou.

2. Druhá Dürerova soustava

Ze základní vlastnosti druhé Dürerovy soustavy, $d = v$, tj. $O_0H = HZ''$, vyplývá, že kružnice perspektivity náležící hlavní vertikále $v_1 \equiv v_c$, která má střed v hlavním úběžníku $U_c \equiv H \in h$ a je incidentní se základním bodem Z'' , je incidentní i se středem obrazu O_0 , ${}^1\Omega$ -průmětem středu O do perspektivní průmětny. Základní bod Z'' je však ${}^2\Omega$ -průmět O_0' středu O do perspektivní průmětny.

To platí i o kružnicích perspektivity náležících ostatním slabě samodružným přímkám obrazu druhé Dürerovy soustavy. Protože však oba středy O_0 , O_0' obrazu Dürerovy soustavy jsou Ω -průměty středu O do perspektivní průmětny, jak bylo uvedeno, můžeme vyslovit větu přesněji.

Věta 2,38. *Kružnice perspektivity k^v , k^a , ... náležící slabě samodružným přímkám $v_1 \equiv v_c$, $a_1 \equiv a_c$, ... druhé Dürerovy soustavy jsou kružnice svazku o bázi v Ω -průmětech O_0 , O_0' středu perspektivního promítání O do perspektivní průmětny π .*

Důkaz (obr. 26). Nechť je dána druhá Dürerova soustava svým obrazem, harmonickou perspektivní kolineací (O_0, z, h) . Vytkněme slabě samodružnou přímku $a_1 \equiv a_c$. Z rovnosti $O_0H = HZ''$ ($d = v$) a ze základní vlastnosti homotetie se středem O_0 platí pro její stopník Z'' a pro úběžník U_c''

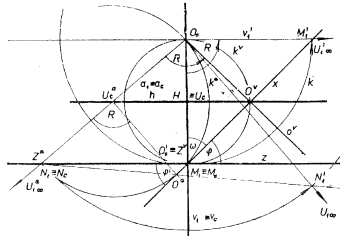
$$O_0U_c'' = U_c''Z'' \quad (1)$$

Kružnice perspektivity k^a má střed v bodě U_c'' a je incidentní se stopníkem Z'' . Proto je vzhledem k rovnosti (1) incidentní i se středem O_0 , ${}^1\Omega$ -průmětem středu O do perspektivní průmětny.

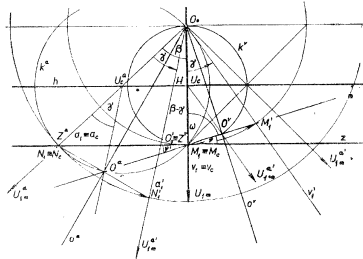
Základnice z je incidentní se stopníkem Z'' , hlavní vertikála v se středem O_0 . Obě tyto přímky jsou k sobě kolmé a mají společný základní bod $Z'' \equiv z \cdot v$. Proto podle Thaletovy věty je kružnice k^a incidentní se základním bodem Z'' . Ten je však tototž s ${}^2\Omega$ -průmětem středu O do perspektivní průmětny π , cbd.

Uvažme nyní samodružné přímky druhé Dürerovy soustavy, řídicí kuželošedku, ..., jak tomu bylo u soustavy první.

Na obr. 42, 43 jsou sestrojeny středy perspektivity O'' , O'' náležící hlavní vertikále $v_1 \equiv v_c$ a slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ při otočení o velikost úhlu γ . Oba středy určují samodružnou přímku x protilehlou k středu $O_0 \equiv X$. Z rysu lze soudit, že tato samodružná přímka x je incidentní s ${}^2\Omega$ -průmětem O'_0 a že je tedy kolmá k přímce perspektivity náležící hlavní vertikále. Lze dokázat, že tomu tak skutečně je. Platí následující věta.



Obr. 42



Obr. 43

Věta 2.39. V druhé Dürerově soustavě je samodružná přímka x protilehlá k jejímu středu O_0 po rozštěpení obrazu otočením γ kolmá k přímce perspektivity $o'' \equiv O_0O''$ náležící hlavní vertikále, ať volíme otočení soustavy q_1 jakékoli velikosti. Jinak řečeno: Za uvedených podmínek je poloha samodružné přímky x vzhledem k přímce perspektivity příslušné hlavní vertikále nezávislá na velikosti úhlu otočení γ .

Důkaz (obr. 42, 43). a) Při rozštěpení soustavy otočením $\gamma = 90^\circ$ věta platí, jak bylo dokázáno větou 2.5.

b) Nechť je úhel otočení $\gamma \neq 90^\circ$ (obr. 43). Samodružná přímka x dané soustavy je určena dvěma středy perspektivity, např. O'' , O'' , $x \equiv O''O''$. Tyto středy O'' , O''

jsou incidentní s příslušnými kružnicemi perspektivity k'' , k'' sestrojenými podle věty 2.6. Proto je

$$O''(\rightarrow M_1O_0M_1' = \rightarrow \gamma, \quad O_0M_1' = O_0M_1, \quad O'' \equiv k'', \quad M_cM_1' \equiv k'', \quad U_cU_{1\infty}''),$$

$$O''(\rightarrow N_1O_0N_1' = \rightarrow \gamma, \quad O_0N_1' = O_0N_1, \quad O'' \equiv k'', \quad N_cN_1' \equiv k'', \quad U_c''U_{1\infty}'').$$

Přitom jsou trojúhelníky $\triangle O_0M_1M_1'$, $\triangle O_0N_1N_1'$ rovnoramenné. O'' , O'' jsou středy jejich základěn, o'' , o'' jsou jejich výšky. Kolmice k přímce perspektivity o'' ve středu

perspektivity O^o je tedy jeho základna $Z^o M_1^o$ a je incidentní se základním bodem $Z^o \equiv M_1 \equiv M_c$.

Lze snadno dokázat, že přímky $O^o Z^o$, $O^a Z^o$ splynou, což nastane při rovnosti úhlů

$$\sphericalangle z Z^o M_1^o = \sphericalangle \varphi = \sphericalangle z Z^o O^o = \sphericalangle Z^o Z^o O^o = \sphericalangle \varphi'.$$

Pro $v_1 \equiv v_c$ platí:

$$\sphericalangle Z^o O_0 M_1^o = \sphericalangle \gamma.$$

$$\sphericalangle O_0 Z^o M_1^o = \sphericalangle \omega = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

$$\sphericalangle z Z^o M_1^o = \sphericalangle \varphi = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\gamma}{2}.$$

Pro $a_1 \equiv a_c$ platí: $\sphericalangle Z^o O_0 N_1^o = \sphericalangle Z^o U_c^o O^o = \gamma$ je středový úhel příslušný těživě $Z^o O^o$ v kružnici perspektivity k^o náležející samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$.

Dále je $\sphericalangle Z^o Z^o O^o$ obvodový úhel v téže kružnici k^o sestrojený nad touto těživou $Z^o O^o$, tedy

$$\sphericalangle Z^o Z^o O^o = \sphericalangle \frac{\gamma}{2}, \quad \text{a je tedy} \quad \sphericalangle \varphi = \sphericalangle \varphi'.$$

Tím je prokázáno splnutí přímek $O^a Z^o \equiv O^o Z^o$ a též správnost věty 2,39.

Na základě této věty je možno vyslovit větu další.

Věta 2,40. *Samodružné přímky x druhé Dürerovy soustavy po jejím rozšíření otočením o přípustné velikosti úhlu γ náležejí do svazku o bázi v Ω -průmětu středu O perspektivního promítání různém od středu soustavy.*

Důkaz (obr. 42). a) Při otočení $\gamma = 90^\circ$ je samodružná přímka x incidentní se středem perspektivity O^o a kolmá k přímce perspektivity o^o podle věty 2,5. Protože však střed perspektivity O^o je incidentní s kružnicí perspektivity k^o podle věty 2,6 a kružnice perspektivity k^o je podle věty 2,38 incidentní s oběma Ω -průměty O_0, O_0' , je samodružná přímka x incidentní s Ω -průmětem O_0' středu O , cbd.

To také vyplývá z úvahy obdobné úvaze v důkazu věty předešlé. $x \equiv O^o O^a$. Přímky $O^o Z^o, O^a Z^o$ splývají, neboť $\sphericalangle \varphi = \sphericalangle \varphi'$.

$$\begin{aligned} \text{Úhel} \quad \sphericalangle O_0 Z^o O^o &= \sphericalangle \omega = \sphericalangle O_0 Z^o M_1^o = 45^\circ, & \varphi &= 45^\circ, \\ \sphericalangle Z^o O_0 N_1^o &= \sphericalangle Z^o U_c^o O^o = 90^\circ \end{aligned}$$

je středový úhel v kružnici k^o příslušný těživě $Z^o O^o$. $\sphericalangle Z^o Z^o O^o$ je obvodový úhel v k^o nad toutéž těživou, tedy $\sphericalangle Z^o Z^o O^o = 45^\circ$ a tudíž $\sphericalangle \varphi = \sphericalangle \varphi'$.

Základní bod Z^o však splývá s Ω -průmětem O_0' středu O , čímž je správnost věty dokázána.

b) Při otočení $\gamma \neq 90^\circ$ vyplývá správnost věty z důkazu správnosti věty předešlé. Bylo dokázáno, že pro přímky $O^o Z^o, O^a Z^o$ platí: $O^o Z^o \equiv O^a Z^o$. Avšak základní bod Z^o splývá s průmětem O_0' středu O , cbd.

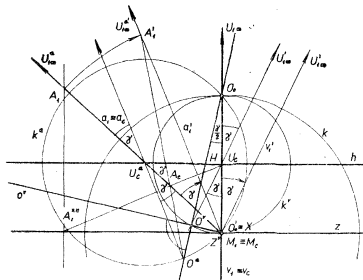
c) Pokud se týká elace jako obrazu druhé Dürerovy soustavy (obr. 44, v němž je O'_0 jejím středem, $\gamma \neq 90^\circ$) vyplývá správnost uvedeně věty 2,40 i z této úvahy:

$$x \equiv O''O''.$$

Lze ukázat, že přímky O_0O'' , O_0O'' splynou.

$$\sphericalangle O_0O'_0U'_{1x} = \sphericalangle \gamma = \sphericalangle O_0U_cU'_{1x} = \sphericalangle O''U_cO'_0, \text{ resp.}$$

$$\sphericalangle A_1O'_0A'_1 = \sphericalangle \gamma = \sphericalangle A_1U'_cU'_{1x} = \sphericalangle O''U'_cO'_0.$$



Obr. 44

Úhel $\sphericalangle O''U_cO'_0$ je středový úhel v kružnici perspektivity k'' příslušný tětivě O'_0O'' , $\sphericalangle O''O_0O'_0$ je obvodový úhel v téže kružnici příslušný téže tětivě, je to tedy úhel velikosti $\gamma/2$.

Podobně $\sphericalangle O''U'_cO'_0$ je středový úhel v kružnici perspektivity k' příslušný tětivě $O''_0O'_0$, $\sphericalangle O''O_0O'_0$ je obvodový úhel v téže kružnici příslušný téže tětivě, je tedy velikosti $\gamma/2$. Oba úhly $\sphericalangle O''O_0O'_0 = \sphericalangle O''O_0O'_0 = \gamma/2$ jsou shodné, přímky $O_0O'' \equiv O_0O'' \equiv O''O'' \equiv x$, cbd.

Tentýž výsledek obdržíme pro $\gamma = 90^\circ$. Uvedené vlastnosti samodružných přímek druhé Dürerovy soustavy užijeme při jejich konstrukci. Je totiž pro každou dán předem jeden bod, takže stačí bod další nebo její směr.

Po zdůvodnění této věty je třeba uvážit obsah věty 2,23, podle níž je geometrickým místem samodružných přímek dané Dürerovy soustavy bikvadratický svazek přímek rozpadající se ve svazek kvadratický a další část. Je patrné, že v případě druhé Dürerovy soustavy se tento svazek dále rozpadá. Můžeme vyslovit tuto větu.

Věta 2,41. *Kvadratický svazek samodružných přímek určující řídící kuželosečku druhé Dürerovy soustavy se rozpadá. Při aplikaci $^1\Omega$ -promítání pozůstává z lineárního svazku přímek o bázi v $^2\Omega$ -průřezu středu O soustavy, tj. v bodu O'_0 , a z bodu O_0 (lin. svazku o tomto středu).*

Důkaz správnosti věty vyplývá z věty předešlé.

I tato věta potvrzuje obsah věty 2,36, podle níž kvadratické svazky samodružných přímek při aplikaci obou Ω -promítání splývají.

Jistě nebude bez užítku a zajímavosti určit hraniční kružnici a samodružné přímky x rovnoběžné s hlavní vertikálou. Na základě předešlé věty o rozpadu řídící kuželosečky je možno vyslovit větu.

Věta 2.42. V případě druhé Dürerovy soustavy je

a) hraniční bod T incidentní s hlavní vertikálou $v_1 \equiv v_c$, tj. splývá s hlavním bodem H .

b) hraniční kružnice a samodružná přímka rovnoběžná s hlavní vertikálou splývají s touto vertikálou.

Důkaz (obr. 45). Podle věty 2.19 je hraniční kružnice kružnicí perspektivity náležící slabě samodružné přímce $m_1 \equiv m_c$, jejíž úhel φ^m s hlavní vertikálou vyhovuje rovnici

$$\sin \varphi^m = \frac{d}{v}.$$

V případě druhé Dürerovy soustavy je

$$\sin \varphi^m = \frac{d}{v} = 1,$$

tedy $\varphi^m = 90^\circ$. Je to tedy slabě samodružná přímka $m_1 \equiv m_c$ rovnoběžná s horizontem h . Střed její kružnice perspektivity je nevlastní bod $U_{c\infty}^m$. Podle věty 2.38 je kružnice incidentní s oběma průměty O_0, O_0' středu soustavy O , splývá tedy s hlavní vertikálou.

Hraniční bod T^m podle definice 2,5 splývá s hlavním bodem H .

Samodružná přímka x rovnoběžná s hlavní vertikálou je podle věty 2.31 incidentní s hraničním bodem soustavy, splývá tedy s hlavní vertikálou.

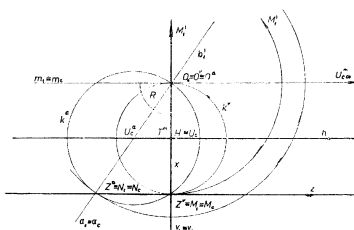
To vyplývá i z věty 2,28, podle níž samodružná přímka rovnoběžná s hlavní vertikálou náleží rozštěpení Dürerovy soustavy otočením o úhel $\gamma = 90^\circ + \varphi_1$, kde $\sin \varphi_1 = d/v$. V druhé Dürerově soustavě je, jak už bylo uvedeno, $\sin \varphi_1 = 1$, $\varphi_1 = 90^\circ$ a otočení $\gamma = 180^\circ$.

Střed perspektivity O^p, O^p náležící slabě samodružným přímkám $v_1 \equiv v_c, a_1 \equiv a_c$ splývají se středem O_0 . Samodružná přímka x náležící uvedenému otočení $\gamma = 180^\circ$ splývá s hlavní vertikálou, cbd.

V druhé Dürerově soustavě se potvrzuje platnost věty 2,35 a věty 2,37. Podle první z vět jsou samodružné přímky $x^{\gamma} \equiv x_1^{\Omega}$ náležící rozštěpení soustavy otočením o úhel γ při aplikaci ${}^1\Omega$ -promítání a $x^{\pi+\gamma} \equiv x_1^{2\Omega}$ při rozštěpení soustavy otočením o úhel $\pi + \gamma$ při aplikaci ${}^2\Omega$ -promítání rovnoběžné.

Správnost toho vyplývá z věty 2,40 a ze skutečnosti, že bod O^m samodružné přímky $x^{\pi+\gamma} \equiv x_1^{2\Omega}$ je souměrně položen k bodu O^p samodružné přímky $x^{\gamma} \equiv x_1^{\Omega}$ podle hlavního bodu H .

Samodružná přímka $x^{-\gamma}$ náležící rozštěpení otočením $-\gamma$ (v záporném smyslu)



Obr. 45

při aplikaci 1Q -promítání je souměrně položená podle hlavní vertikály k samodružné přímce λ^2 náležící otočení $+\gamma$ při aplikaci 1Q -promítání.

Věta 2,37 mluví o vztahu samodružných přímek náležících rozštěpení soustavy otočením γ při aplikaci 1Q -promítání a 2Q -promítání. Podle ní se uvedené samodružné přímky protínají na kružnici perspektivity k^p náležící hlavní vertikále. Právě tak je tomu u druhé Dürerovy soustavy.

3. Třetí Dürerova soustava

Vlastnosti této soustavy, pro kterou je $d > v$, můžeme sledovat krok za krokem, jak jsme činili u první Dürerovy soustavy ($d < v$). Shledáme, že obě soustavy mají některé vlastnosti stejné, jiné obdobné. Tak platí věta obdobná větě 2,15.

Věta 2,43. *Kružnice perspektivity k^a, k^b, k^c, \dots náležící slabě samodružným přímkám $v_1 \equiv v_c, a_1 \equiv a_c, b_1 \equiv b_c, \dots$ mají oba středy O_0, O'_0 za své vnější body.*

Důkaz správnosti je zřejmý (obr. 46). Platí i věta 2,16.

Věta 2,44. *Vzdálenost středu obrazu třetí Dürerovy soustavy O_0 , resp. O'_0 od kružnice perspektivity k^a, k^b, \dots je nepřímo závislá na kosinu úhlu φ slabě samodružných přímek $a_1 \equiv a_c, b_1 \equiv b_c, \dots$ s hlavní vertikálou $v_1 \equiv v_c$.*

Důkaz (obr. 46). *Vzdálenost středu $O_0 (O'_0)$ od kružnice perspektivity k^a náležící hlavní vertikále $v_1 \equiv v_c$ je*

$$O_0V^a = d - v = \frac{k}{\cos \varphi}, \quad (d - v = k).$$

Pro libovolnou samodružnou přímku $a_1 \equiv a_c$ svírající s hlavní vertikálou úhel φ platí:

$$\begin{aligned} O_0V^a &= O_0Z^a - V^aZ^a \\ &= (U_c^aZ^a + U_c^aO_0) - 2U_c^aZ^a \\ &= U_c^aO_0 - U_c^aZ^a \quad U_c^aO_0 = \frac{d}{\cos \varphi}, \quad (d = O_0H) \\ &= \frac{d}{\cos \varphi} - \frac{v}{\cos \varphi} \quad U_c^aZ^a = \frac{v}{\cos \varphi}, \quad (v = HZ^a) \\ &= \frac{d - v}{\cos \varphi} = \frac{k}{\cos \varphi}, \quad \text{cbd.} \end{aligned}$$

Věta 2,45. *Kružnice perspektivity náležící slabě samodružné přímce $u_1 \equiv u_c \parallel h$ je neelastní přímkou roviny.*

Důkaz je obdobný důkazu věty 2,16.

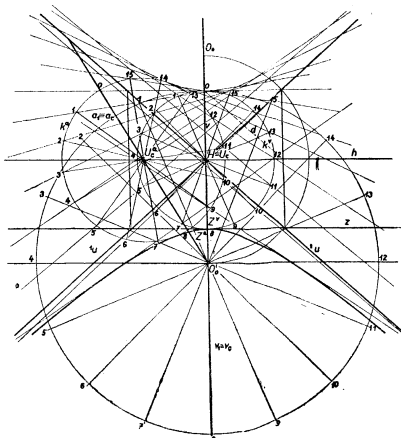
Z vlastností homotetie o středu $O_0(O'_0)$ vyplývá i správnost věty obdobné větě 2,17 o incidenci bodů V^a, V^b, \dots s tečnou t^a sestrojenu ke kružnici perspektivity k^a v bodě V^a .

Poněkud jiný je vztah hlavního bodu třetí Dürerovy soustavy ke kružnicím perspektivity náležícím jednotlivým slabě samodružným přímkám. Platí tato věta.

Věta 2.46. *Vzdálenost hlavního bodu od kružnic perspektivity náležících slabě samodružným přímkám nabývá všech reálných hodnot (orientujeme-li horizont h). Hodnoty 0 nabývá pro slabě samodružnou přímku $t_1 \equiv t_c$ svírající s hlavní vertikálou úhel φ_0 , pro který platí:*

$$\sin \varphi_0 = \frac{v}{d}. \quad (1)$$

Tato slabě samodružná přímka $t_1 \equiv t_c$ je tečna vedená středem O_0 ke kružnici perspektivity k^0 náležící hlavní vertikále.



Obr. 46

Důkaz (obr. 47). Budeme uvažovat úhel φ v intervalu $(0^\circ, 90^\circ)$. vzdálenost hlavního bodu H od kružnic perspektivity k^a je:

$$\begin{aligned} HT^a &= U_c^a T^a - U_c^a H \\ &= U_c^a Z^a - U_c^a H \\ &= \frac{v}{\cos \varphi} - d \cdot \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned}$$

a) Pro hlavní vertikálu $v_1 \equiv v_c$, pro níž $\varphi = 0$, je

$$HT^v = \frac{v}{\cos 0^\circ} - d \cdot \operatorname{tg} 0^\circ = v.$$

b) Hodnoty 0 nabývá HT^a pro slabě samodružnou přímku l svírající s hlavní vertikálou úhel φ_0 splňující vztah:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{v}{\cos \varphi_0} - d \cdot \operatorname{tg} \varphi_0 \\ 0 &= v - d \cdot \sin \varphi_0 \\ \sin \varphi_0 &= \frac{v}{d}. \end{aligned}$$

c) Pro úhel φ v intervalu $\langle 0, \varphi_0 \rangle$, kdy $\sin \varphi < v/d$, platí:

$$\begin{aligned} HT^c &= \frac{v}{\cos \varphi} - d \cdot \operatorname{tg} \varphi \\ &= \frac{v - d \cdot \sin \varphi}{\cos \varphi} \quad \begin{array}{l} \cos \varphi \neq 0 \\ d \neq 0 \end{array} \\ HT^c &= \frac{\frac{v}{d} - \sin \varphi}{\frac{\cos \varphi}{d}} > 0. \end{aligned}$$

Pro úhel φ v tomto intervalu nabývá HT^c hodnot kladných v intervalu $\langle v, 0 \rangle$.

d) Pro úhel φ v intervalu $(\varphi_0, 90^\circ)$, kdy $\sin \varphi > v/d$, platí:

$$\begin{aligned} HT^d &= \frac{v}{\cos \varphi} - d \cdot \operatorname{tg} \varphi & HT^d &= \frac{\frac{v}{d} - \sin \varphi}{\frac{\cos \varphi}{d}} < 0 \\ &= \frac{v - d \cdot \sin \varphi}{\cos \varphi} \end{aligned}$$

Pro úhel φ v tomto intervalu nabývá HT^d hodnot záporných v intervalu $(0, -\infty)$.

Obdobně je tomu, jestliže úhel φ probíhá interval $\langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$ ve smyslu opačném. V tom případě probíhá vzdálenost HT^a interval $\langle -v, \dots \rangle$. Tím je správnost první části věty 2.46 dokázána.

Správnost druhé části vyplývá ze vztahu (1). Vedeme-li kolmici $HT \perp t_1 \equiv t_c$ z hlavního bodu, je trojúhelník O_0HT pravoúhlý o přeponě $O_0H = d$. Odvěsna HT je rovna výšce v , tj. poloměru kružnice perspektivity k' . Bód T je s k'' incidentní, cbd. Vzhledem k získaným výsledkům můžeme vyslovit další větu.

Věta 2.47. *Třetí Dürerova soustava nemá reálných hraničních bodů ani hraniční kružnice.*

Důkaz správnosti této věty vyplývá z definice uvedených pojmů a z věty právě vyslovené a dokázané, i z vět 2.19 a 2.20. Podle nich je hraniční bod T^a průsečík horizontu h s kružnicí perspektivity k'' náležející slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$, pro jejíž úhel φ s hlavní vertikálou $v_1 \equiv v_c$ platí:

$$\sin \varphi = \frac{d}{v}. \quad (1)$$

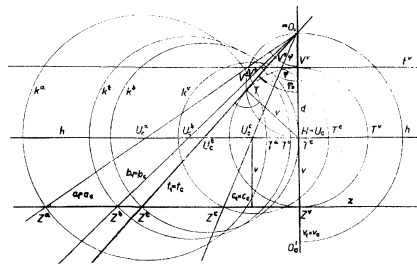
Avšak $d : v > 1$ a úhel φ neexistuje. Vzdálenost hraničního bodu T^a od hlavního bodu H je

$$HT^a = \pm \sqrt{v^2 - d^2} = \pm i \sqrt{d^2 - v^2} \quad (2)$$

a poloměr hraniční kružnice je

$$r = \frac{v}{\sqrt{v^2 - d^2}}. \quad (3)$$

Oba poslední výrazy jsou v třetí Dürerově soustavě ($d > v$) imaginární, cbd.



Obr. 47

Reálný zástupce hraničního bodu T^a (obr. 48) je T_r^a , reálný zástupce hraniční kružnice k^a je kružnice k_r^a , pro něž platí

$$HT_r^a = \sqrt{d^2 - v^2},$$

$$r_r = \frac{v}{\sqrt{d^2 - v^2}}.$$

Úloha 2,4 (obr. 48). Je sestavit reálného zástupce T_r^a hraničního bodu a reálného zástupce hraniční kružnice k_r^a .

a) Konstrukce bodu T_r^a :

$$V^v \equiv k^v. (v_1 \equiv v_r), \quad HV^v = v, \quad V^v T_r^a = d.$$

b) Konstrukce poloměru r_r reálného zástupce hraniční kružnice:

$$r_r = \frac{v^2}{\sqrt{d^2 - v^2}},$$

$$v^2 = r_r \cdot \sqrt{d^2 - v^2},$$

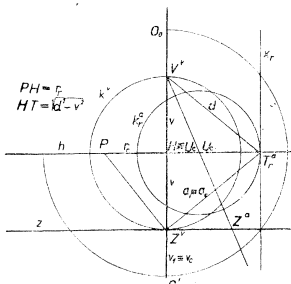
$$T_r^a Z^v, \quad Z^v P \perp T_r^a Z^v,$$

$$HP = r_r.$$

k_r^o je hledaný zástupce hraniční kružnice. Existují dva zástupci hraničních bodů a kružnic, jak plyne z konstrukce.

Vzhledem k těmto výsledkům můžeme vyslovit větu obdobnou k větě 2,28.

Věta 2,48. Samodružná přímka x rovnoběžná s hlavní vertikálou neexistuje. Její reálný zástupce je incidentní s reálným zástupcem T_r^o hraničního bodu.



Obr. 48

Důkaz. Podle věty 2,28 náleží tato samodružná přímka Dürerovy soustavy rozštěpení otočením o úhel $\gamma = 90^\circ + \varphi_1$, kde $\sin \varphi_1 = d : v$. Protože však $d > v$, úhel φ_1 neexistuje, cbd.

Správnost věty však vyplývá i z platnosti věty 2,31, podle níž je samodružná přímka rovnoběžná s hlavní vertikálou incidentní s hraničním bodem. Ten však neexistuje, neexistuje ani jmenovaná samodružná přímka, cbd.

Reálný obraz této samodružné přímky x (obr. 48) je rovnoběžný s hlavní vertikálou $v_1 \equiv v_2$ a incidentní s reálným zástupcem T_r^o hraničního bodu T^o .

Uvedené vlastnosti třetí Dürerovy soustavy dávají možnost poznat řídicí kuželosečku k soustavy jako množinu samodružných přímek soustavy.

Podle věty 2,25 jsou základnice z a tečna t^o ke kružnici perspektivity k^v v diametrálním bodě V^v vrcholové tečny řídicí kuželosečky k . Hlavní vertikála $v_1 \equiv v_2$, s níž jsou incidentní středy O_0, O_0' , je osou souměrnosti řídicí kuželosečky. Její úsek Z^vV^v je jedna z jejích os, a to osa hlavní. Druhá osa incidentní s horizontem je omezena hraničními body:

$$HT^o = \sqrt{v^2 - d^2}.$$

Tato osa je imaginární.

Ohniska kuželosečky jsou podle věty 2,33 oba Ω -průměty středu soustavy, středy O_0, O_0' .

Lze dokázat, že je správná i následující věta.

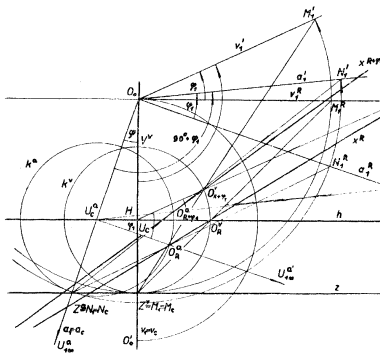
Věta 2,49. V případě třetí Dürerovy soustavy existují dvě samodružné přímky $^1u, ^2u$ incidentní se středem H řídicí kuželosečky k . Tyto samodružné přímky jsou tedy asymptotami řídicí kuželosečky. Jsou přiřazené rozštěpení Dürerovy soustavy otočením o úhel $\gamma = 90^\circ + \varphi_1$ v obou směrech, kde φ_1 vyhovuje vztahu: $\sin \varphi_1 = d : v$. Přímky tvoří s horizontem právě úhel φ_1 .

Důkaz (obr. 46, 49, 50). Aplikujme na Dürerovu soustavu $^1\Omega$ -promítání. Podle věty 2,5 (obr. 20) náleží otočení $\gamma = 90^\circ$ samodružná přímka x kolmá k přímce perspektivity O_0O^o příslušející hlavní vertikále $v_1 \equiv v_2$, kde je $O^o \in h, HO^o = v$.

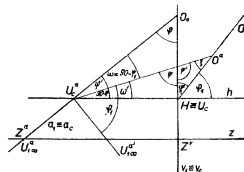
Pokud není $d = \infty$, tj. pokud není O_0 nevlastní bod hlavní vertikály, a tomu tak skutečně není, neprochází samodružná přímka x hlavním bodem H , středem řídicí kuželosečky.

Náleží tedy samodružná přímka incidentní s hlavním bodem H otočení $\gamma = 90^\circ + \varphi_1$. Abychom určili velikost úhlu φ_1 , vytkneme mimo hlavní vertikálu $v_1 \equiv v_c$

libovolnou slabě samodružnou přímku $a_1 \equiv a_c$ svírající s hlavní vertikálou úhel φ a určíme oba středy perspektivity O' , O'' při otočení soustavy q_1 o úhel $\gamma = 90^\circ + \varphi_1$. Z podmínky, aby samodružná přímka x procházela hlavním bodem H , plyne vztah pro φ_1 .



Obr. 49



Obr. 50

V obr. 49 je sestrojena samodružná přímka x^R příslušející rozštěpení Dürerovy soustavy otočením o úhel 90° a samodružná přímka $x^{R+\varphi_1}$ příslušející rozštěpení soustavy otočením o úhel $\gamma = 90^\circ + \varphi_1$. Tento volený úhel φ_1 ovšem nevyhovuje danému požadavku.

Aby tato samodružná přímka $x^{R+\varphi_1}$ byla incidentní s hlavním bodem H , musí středy perspektivity O' , O'' zaujmout polohu, která je naznačena v obr. 50. Platí následující vztahy.

Na základě konstrukce středu perspektivity O'' je

$$\sphericalangle hHO'' = \sphericalangle hHO' = \varphi_1,$$

čímž je prokázána správnost poslední části věty.

Na základě konstrukce středu perspektivity O' je

$$\sphericalangle U_1'' U_c'' O'' = \varphi_1.$$

Dále platí:

$$\varphi' = 90^\circ - \varphi$$

$$\psi = 90^\circ - \omega'$$

$$\omega = 90^\circ - \varphi_1$$

$$\psi' = 180^\circ - \psi = 180^\circ - (90^\circ - \omega') = 90^\circ + \omega'$$

$$\begin{aligned}\omega' &= 90^\circ - \varphi - (90^\circ - \varphi_1) & \varphi_1' &= 90^\circ - \varphi_1 \\ \omega' &= \varphi_1 - \varphi & \zeta &= 180^\circ - \varphi_1' - \psi' = 180^\circ - 90^\circ + \varphi_1 - \\ & & & - 90^\circ - \omega' = \varphi_1 - \omega' = \varphi_1 - \varphi_1 + \varphi = \varphi.\end{aligned}$$

Poloměr r kružnice perspektivity náležející slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_e$ je

$$r = \frac{v}{\cos \varphi} = U_c^s O^s.$$

Dále je

$$\begin{aligned}U_c^s H &= d \cdot \operatorname{tg} \varphi \\ HO^s &= v\end{aligned}$$

(v je poloměr kružnice perspektivity k^s náležející hlavní vertikále). Z trojúhelníku $\triangle U_c^s HO^s$ vyplývá vztah (sinová věta):

$$\begin{aligned}U_c^s H : U_c^s O^s &= \sin \zeta : \sin (180^\circ - \varphi_1) \\ d \cdot \operatorname{tg} \varphi : \frac{v}{\cos \varphi} &= \sin \varphi : \sin \varphi_1 & \cos \varphi &\neq 0 \\ \frac{d}{v} \cdot \sin \varphi &= \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_1} & \varphi &\neq 0, \sin \varphi \neq 0 \\ \sin \varphi_1 &= \frac{v}{d}, \text{ cbd.}\end{aligned}$$

Věta 2.50. Řídicí kuželosečka třetí Dürerovy soustavy je hyperbola o hlavní poloose $HV^s = HZ^s$, vedlejší poloose HT_r^s a ohniscích v bodech O_0, O_0' .

Důkaz správnosti věty vyplývá z výsledků dosud získaných. Obě poloosy HZ^s a HT_r^s a excentricita $HO_0 = HO_0'$ splňují základní vlastnosti hyperboly.

$$\begin{aligned}(HT_r^s)^2 &= (HO_0)^2 - (HV^s)^2 \\ &= (HO_0')^2 - (HZ^s)^2 \\ (HT_r^s)^2 &= d^2 - v^2.\end{aligned}$$

I úhel horizontu h s asymptotami řídicí kuželosečky, jejíž hlavní poloosa je v , excentricita d a vedlejší poloosa $\sqrt{v^2 - d^2}$, je φ_1 a platí pro něj:

$$\sin \varphi_1 = \frac{v}{d},$$

což souhlasí s větou 2.44.

V obr. 46 je nakreslen obraz třetí Dürerovy soustavy a řídicí kuželosečkou při aplikaci ${}^2\Omega$ -promítání. Tutéž polohu má řídicí kuželosečka při aplikaci ${}^1\Omega$ -promítání.

Nakonec nechť je zmínka o Dürerově soustavě, pro kterou je

- $d = 0$,
- $d \rightarrow \infty$.

V případě a) jde o první Dürerovu soustavu, neboť $d = 0 < v$ ($v \neq 0$). V případě b) jde o třetí Dürerovu soustavu, neboť $d \rightarrow \infty > v$.

Nechť je dána Dürerova soustava, pro niž je

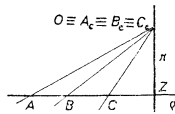
$$d = 0, \quad v \neq 0.$$

Jde zřejmě o rozpadlou perspektivní kolineaci, v níž odpovídá každému bodu A, B, C, \dots základní roviny q tentýž bod $A_c \equiv B_c \equiv C_c \dots \equiv O$ (obr. 51, 52).

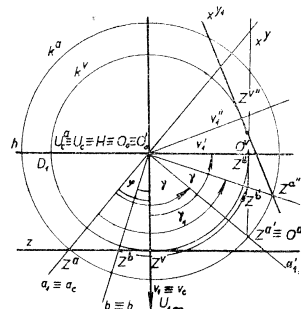
Tento případ perspektivní kolineace nemá praktického významu. Přesto necht je vyslovena věta o řídicí kuželosečce.

Věta 2.51. *Řídicí kuželosečka rozpadlé Dürerovy soustavy pro $d = 0$ je kružnice splývající s kružnicí perspektivity náležící hlavní vertikále.*

Důkaz (obr. 52). Necht' je dána Dürerova soustava, v níž $O_0 \equiv O'_0 \equiv O \equiv H$.



Obr. 51



Obr. 52

Vytkněme dvě slabě samodružné přímky $v_1 \equiv v_1'$, $a_1 \equiv a_1'$ a sestrojme samodružnou přímku $x \equiv O''O''$ pro úhel otočení $\gamma = 90^\circ$.

Sestrojíme známým způsobem oba středy perspektivity O^v , O^a náležící vytčeným slabě samodružným přímkám. Tyto středy jsou incidentní s příslušnými kružnicemi perspektivity k^v , k^a , které sestrojíme. Otočíme přímku v_1 do polohy v_1' , přímku a_1 do polohy a_1' pomocí jejich stopníků Z^v , Z^a . Sestrojíme přímku $U_1O'' \parallel v_1'$, která splývá s v_1' a určuje na k^v střed perspektivity $O^v \equiv Z^v$. Podobně přímka $U_2O'' \parallel a_1'$ splývá s a_1' a určí na k^a bod $O^a \equiv Z^a$.

Přímka $x \equiv O''O''$ je hledaná samodružná přímka. Tato přímka x je však tečnou kružnice k^v v jejím bodu $O^v \equiv Z^v$.

Správnost tohoto tvrzení je hned patrná, uvážíme-li oba trojúhelníky $\triangle HZ^vZ^a \cong \triangle HZ^aZ^v$, které jsou shodné podle věty (sus). Z nich druhý vznikne otočením prvního o úhel $\gamma = 90^\circ$.

V obr. 52 je sestrojena samodružná přímka x přiřazená otočení soustavy q_1 o úhel $\gamma_1 = \sphericalangle Z^aO''Z^v$.

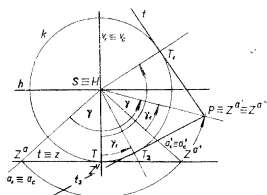
S tím souvisí elementární konstrukce tečny v bodě dané kružnice k^v pomocí otočení, jestliže je dána jedna z jejích tečen v daném bodu Z^v (obr. 53).

Úloha 2.5. *Nechť je dána kružnice k o středu S a její tečna $t \equiv z$ v bodě $T \equiv Z^a$. Je sestrojiti tečnu kružnice k v jejím bodě T_1 .*

Řešení. 1. Sestrojíme poloměr ST dotkového bodu T tečny z a určíme jeho úhel s poloměrem ST_1 .

2. Vedme středem kružnice $S \equiv H$ libovolnou přímkou $l \equiv a_1 = a_c$ a vytkněme její průsečík Z^a s tečnou z .

3. Otočíme bod Z^a kolem středu $S \equiv H$ o tentýž úhel γ do polohy $P \equiv Z^{a'}$. Pak přímkou $Z^{a'}T_1$ je hledaná tečna ke kružnici k v jejím bodě T_1 .



Obr. 53

Do bodu $Z^{a'}$ přejde též bod Z^a , a to otočením o úhel γ_1 . Bod $Z^{a'}$ je incidentní s kružnicí otočení bodu Z^a a s tečnou $t \equiv z$. Tento bod určuje přímkou $a_1' \equiv a_c'$, jejíž úhel otočení je $\gamma_1 = \sphericalangle Z^{a'}SP$. Stačí sestrojiti úhel $\sphericalangle Z^{a'}ST_2 = \sphericalangle Z^{a'}SP = \gamma_1$. T_2 je dotkový bod druhé tečny vedené bodem P ke kružnici k .

b) Nechť je dán druhý případ, kdy je $d \rightarrow \infty$, $v \neq 0$. Jde zřejmě o rovnoběžné promítání z nevlastního bodu O_∞ incidentního se základní rovinou na kolmici k základnici. Jde opět o rozpadlou soustavu, o které bude pojednáno v kapitole 4.

3. Poznámky k druhému rozštěpení Dürerovy soustavy

Ve všech provedených úvahách o Dürerově soustavě perspektivního promítání bylo užito prvního rozštěpení, tj. podle definice 2.1 rozštěpení otočením soustavy základní roviny ϱ kolem středu O_0 , resp. O_0' o daný úhel γ .

Ve větě 2.2 a 2.3 bylo uvažováno druhé rozštěpení otočením soustavy perspektivní průmětny π . Nakonec byla uvedena možnost záměny funkcí obou rovin π , ϱ . Platí věta.

Věta 3.1. *Zaměníme-li funkce obou rovin π , ϱ , tj. učiníme-li rovinu ϱ perspektivní průmětnou a rovinu π rovinou základní, platí všechny věty uvedené při studiu Dürerovy soustavy. Přitom úloha základnice z zůstává, úlohu horizontu převezme úběžnice w . Úlohu průměť O_0 , O_0' středu zobrazení O do perspektivní průmětny π převezmou příslušné průměty O_{00} , O_{00}' středu O do základní roviny ϱ (obr. 54).*

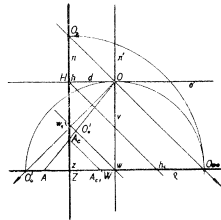
Důkaz správnosti věty je při užití obr. 54 zřejmý.

Není nutné provádět znovu všechny úvahy. Stačí uvést jen některé věty platné vzhledem k druhému rozštěpení dané Dürerovy soustavy. Než tak učiníme, vyslovíme a zdůvodníme dvě základní věty. Přitom ponecháme dřívější označení, takže bod originálu je např. A_c , jeho perspektiva A (A_1 po otočení průmětny ϱ do roviny π , ${}^1\Omega$ -průmět bodu A_c je A_{c1} ... atd.).

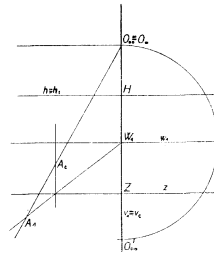
Věta 3.2. *Nechť je provedena záměna funkcí rovin π , ϱ Dürerovy soustavy a je apli-*

kováno na základní rovinu π ${}^1\Omega$ -promítání. Pak vzájemná poloha středu $O_{00} \equiv O_0$, úběžnic h_1 , w a základnice z je též jako při původní funkci rovin π , q . Úběžnice h_1 se však stává úběžnicí perspektivní průmětny q , w je úběžnicí základní roviny π , průmět O_{00} středu O do perspektivní průmětny q je souměrně položen k $O_{00} \equiv O_0$ podle úběžnice w .

Z věty je patrný rozdíl mezi obrazy Dürerovy soustavy při obojí funkci rovin π , q . Správnost věty potvrzují obr. 54, 55. V obr. 54 je znázorněna Dürerova soustava v paralelním promítání do hlavní vertikální roviny, daném základnicí z . Je z něho



Obr. 54



Obr. 55

patrné, že po otočení perspektivní průmětny q kolem základnice z do roviny π je $O_{00} \equiv O_0$, $h_1 \equiv h$, $w_1 \equiv w$, $W_1 \equiv W$, ... atd. V obr. 55 je přímý pohled na rovinu q otočenou do roviny π .

Obdobná věta platí při aplikaci ${}^2\Omega$ -promítání.

Věta 3.3. *Vzájemná poloha středu $O'_{00} \equiv O'_0$, úběžnic h_1 , w a základnice z je též jako při původní funkci rovin π , q . Úběžnice h_1 se však stává úběžnicí perspektivní průmětny q , w úběžnicí základní roviny π , průmět O_{00} středu O do perspektivní průmětny q je souměrně položen k $O'_{00} \equiv O'_0$ podle úběžnice w (rozdíl od původního případu).*

Důkaz správnosti věty je obdobný důkazu předešlé věty a je vystižen v obr. 56, 57.

Vzhledem k záměně funkcí rovin π , q zaměňují své funkce i obě úběžnice h , w , jak bylo uvedeno v obou větách. Právě tak zaměňují své funkce výška středu zobrazení a distance, což není třeba zvlášť dokazovat.

Důsledek toho je změna jakosti Dürerovy soustavy. Platí tato věta.

Věta 3.4. *Záměnou funkcí rovin π , q Dürerovy soustavy přechází první Dürerova soustava v třetí Dürerovu soustavu a obráceně. Druhá Dürerova soustava se záměnou zachovává.*

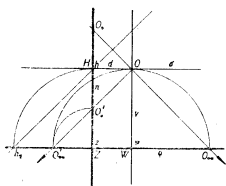
Důkaz (obr. 54, 55, 56, 57). Správnost věty vyplývá ze záměny funkce distance d a výšky v . Pro první Dürerovu soustavu platí:

$$d < v,$$

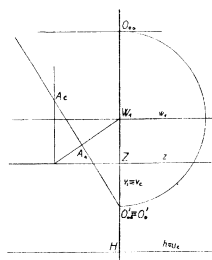
což je vztah platný pro třetí Dürerovu soustavu při záměně funkcí rovin π, ϱ . A obráceně.

Pro druhou Dürerovu soustavu platí: $d = v$, což zůstává i po záměně funkcí rovin π, ϱ , cbd.

Uvedeme nyní bez důkazu některé věty platné po záměně funkcí rovin π, ϱ při rozštěpení soustavy otočením základní roviny π , tj. při rozštěpení otočením soustavy perspektivní prámětny při původní funkci obou rovin π, ϱ , při druhém rozštěpení Dürerovy soustavy.



Obr. 56



Obr. 57

Věta 3,5 (obdobná větě 2,4).

Přímka perspektivity O'' příslušící hlavní vertikále $v_1 \equiv v$, po otočení soustavy π svírá s hlavní vertikálou úhel φ , pro který platí: $\operatorname{tg} \varphi = d/v$.

Věta 3,6 (viz větu 2,5).

Samodružná přímka x náležící otočení $\gamma = 90^\circ$ soustavy perspektivy π je incidentní se středem perspektivity $O'' \in w$ náležícím hlavní vertikále a je kolmá k přímce perspektivity $o'' \equiv O_{00}O''$ náležící hlavní vertikále.

Věta 3,7 (viz větu 2,6).

*Množina středů perspektivity O'' náležících hlavní vertikále pro všechny velikosti úhlu otočení γ je kružnice opsaná kolem středu $W \in w$, $W \equiv v_1 \cdot w$, poloměrem *distance* zobrazení (kružnice perspektivity).*

Totéž platí o libovolné slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_1$, což bylo dříve obsahem věty 2,7.

Vzhledem k vzájemné poloze středu O_{00} , resp. O'_{00} obrazu Dürerovy soustavy a kružnice perspektivity rozlišujeme tři případy Dürerovy soustavy, a to pro:

$$d \cong v.$$

Jejich teorie v případě záměny funkcí rovin π, ϱ , tj. při rozštěpení otočením soustavy základní roviny π je obdobná teorii Dürerovy soustavy při původní funkci obou rovin.

Ještě uvedeme tyto věty:

Věta 3.8. *Množina samodružných přímek x příslušících všem velikostem otočení γ tvoří bikvadratický svazek přímek, jehož reálná část je svazek kvadratický, určující řídící kuželosečku k .*

Speciálně platí pro 1. Dürerovu soustavu věta.

Věta 3.9. *Řídící kuželosečka k nové první Dürerovy soustavy při rozštěpení otočením základní roviny π je hyperbola, jejíž ohniska jsou průměty $O_{00} \equiv O_0, O'_{00}$ středu O'_0 do roviny ϱ .*

Důkaz správnosti věty vyplývá z toho, že jde o záměnu funkcí rovin π, ϱ , již daná třetí Dürerova soustava přechází v první Dürerovu soustavu. Platí tedy další věta.

Věta 3.10. *Řídící kuželosečka původní první Dürerovy soustavy po rozštěpení otočením základní roviny π je elipsa, po rozštěpení otočením perspektivní průmětny π hyperbola. Obě kuželosečky mají společné ohnisko $O_{00} \equiv O_0$ a společnou vrcholovou tečnu v základnici z .*

Důkaz správnosti věty je zřejmý.

Z toho vyplývá věta:

Věta 3.11. *Mění-li základní rovina $\varrho \perp \pi$ svou polohu, tvoří řídící kuželosečky po rozštěpení otočením základní roviny ϱ a po rozštěpení otočením perspektivní průmětny π páry kuželoseček, elipsy a hyperboly, které mají společně jedno ohnisko. Je to střed $O_0 \equiv O_{00}$ při aplikaci ${}^1\Omega$ -promítání a $O'_0 \equiv O'_{00}$ při aplikaci ${}^2\Omega$ -promítání.*

Důkaz správnosti věty vyplývá z předešlého textu.

III. POMŮCKY A PŘÍSTROJE K USNADNĚNÍ RÝSOVÁNÍ PERSPEKTIV NA ZÁKLADĚ TEORIE DÜREROVY SOUSTAVY

1. Mechanické pomůcky

V předešlé kapitole bylo uvedeno několik zajímavých poznatků z teorie Dürerovy soustavy, hlavně po jejím rozštěpení otočením $\gamma = 90^\circ$. Je jich možno využít při konstrukci perspektiv rovinných i prostorových objektů pomocí několika jednoduchých mechanických pomůcek. Jsou to:

1. celuloidové pravítko tvaru kruhové výseče,
2. pravoúhlé pravítko celuloidové nebo lepenkové,
3. celuloidové obdélníkové pravítko,
4. celuloidový perspektograf tvaru obdélníka,
5. celuloidový perspektograf tvaru polokruhu,
6. trojdielné pravítko Nicholsonovo,
7. dvojdielné pravoúhlé pravítko,
8. Nicholsonovo pravítko s posuvnými měřítky,
9. dvojdielné pravoúhlé pravítko s posuvnými měřítky.

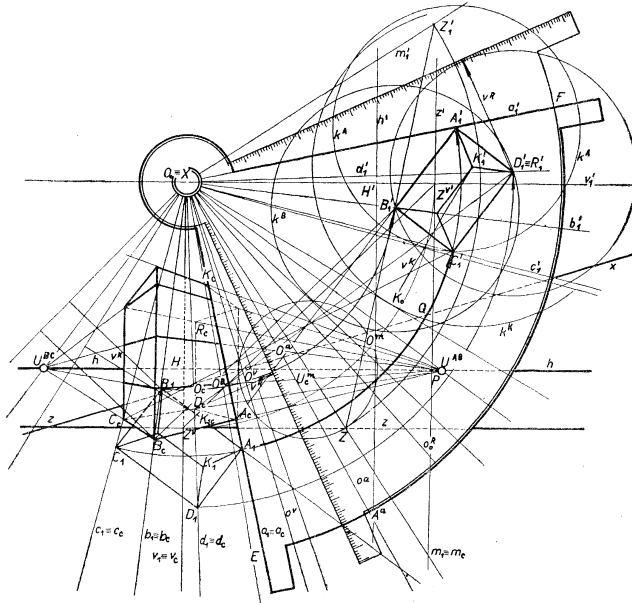
2. Celuloidové pravohlé pravitko tvaru kruhové výseče

Budiž dán obraz Dürerovy soustavy, perspektivní kolíneace ($O_0 \equiv X, z, h$) dvou soumístných rovinných soustav $A_1, B_1, C_1, \dots, A_c, B_c, C_c, \dots$

Sestrojení perspektivy rovinného obrazce incidentního se základní rovinou g , např. obdélníka $ABCD$, provedeme pomocí celuloidového perspektivního pravitka tvaru pravohlé kruhové výseče O_0EF s vyztuženým středem $O_0 \equiv X$. (obr. 58).

Můžeme postupovat různým způsobem a podle toho přístroj uzpůsobit.

a) Před rýsováním perspektivy obrazce otočíme prvky ($z, h, v_1 \equiv v_c$) dané perspektivní kolíneace kolem středu $O_0 \equiv X$ o úhel $\gamma = 90^\circ$ do polohy z', h', v'_1 . Přitom můžeme k otočení hlavní vertikály využít pravitka. Narýsuje otocené půdorysy $A'_1B'_1C'_1D'_1$ daného obrazce v téže vzájemné poloze k z' a h' , jako zaujímal půdorysy $A_1B_1C_1D_1$ vzhledem k z a h , při čemž je třeba připomenout, že $A_1B_1 \parallel A'_1D'_1 \parallel B'_1C'_1$.



Obr. 58

Samodružná přímka x na papíře rysu je dána průsečíkem $O^v \equiv Z^v Z^{v'}$, h , tedy vedením jedné přímky $Z^v Z^{v'}$. Přímku perspektivy $o^v \equiv O_0 O^v$ můžeme sestrojít pomocí perspektivního pravítka pouhým jeho otočením do polohy, v níž se hrana $a_1 \equiv a_c$ nebo a'_1 stane incidentní s bodem O^v . Samodružnou přímku x pak sestrojíme pomocí pravouhého trojúhelníka přiloženého k hraně perspektivního pravítka $a_1 \equiv a_c$ incidentní se středem O^v .

Samodružnou přímku x můžeme určit též pomocí bodu Q incidentního s otočenou základnicí z' podle vztahu: $HO^v = PQ = v$, kde $P \equiv h \cdot z'$. Oba trojúhelníky, $\triangle O_0 HO^v$, $\triangle O^v PQ$ jsou totiž shodné (věta *usu*). Je tedy:

$$x \equiv O^v Q.$$

Před použitím je nutno upevnit pravítko tak, aby jeho střed $O_0 \equiv X$ splýnul se středem daného obrazu Dürerovy soustavy stejně označeným. Jako primitivní prostředek poslouží jehlice zapuštěná v bodu $O_0 \equiv X$, kolem níž je možno pravítkem spočívajícím na desce rysu libovolně otáčet. K důkladnějšímu upevnění slouží zařízení k centrování a ustavení přístroje, potřebné hlavně u těžších přístrojů.

Přímku perspektivy o^v narýsujeme na pravítku pohodlně. Otočíme perspektivním pravítkem, aby jeho hrana $a_1 \equiv a_c$ splýnula s hlavní vertikálou $v_1 \equiv v_c$ a vyznačíme na pravítku přímku $o^v \equiv O_0 O^v$ okopírováním z papíru rysu, nebo podle věty 2,5 předešlé kap., i jinými způsoby. To záleží na technickém provedení přístroje.

Je patrné, že k určení samodružné přímky x a přímky perspektivy o^v je potřeba sestrojení jedné přímky $Z^v Z^{v'}$ nebo dvou nanesení výšky středu zobrazení O na polopřímky HP a $PZ^{v'}$.

Perspektivy jednotlivých bodů obrazce sestrojíme známým způsobem. Učiníme hranu a'_1 perspektivního pravítka incidentní s otočeným půdorysem např. A'_1 bodu A a vedeme rayon a_c podél hrany $a_1 \equiv a_c$, s níž je perspektiva A_c incidentní. Na rýsovacím papíře vyznačíme bod A^v na kruhové hraně EF pravítka a na přímkce perspektivity o^v zaujímající polohu o^v . Otočíme pravítkem, aby hrana $a_1 \equiv a_c$ procházela bodem A^v , vedeme podél ní rayon a vyznačíme jeho průsečík O^v se samodružnou přímku x . Otočíme přístrojem, aby bylo možno narýsovat přímku $A'_1 O^v$, která určuje na přímkce a_c perspektivu A_c bodu A .

Je patrné, že perspektivu bodu objektu rýsujeme pomocí tří přímek a_c , o^v , $A'_1 O^v$, z nichž první dvě rýsujeme pomocí přístroje.

b) Opatříme-li hrany $a_1 \equiv a_c$, a'_1 perspektivního pravítka měřítky, jak ukazuje obr. 58, není nutné rýsovat otočený obraz dané Dürerovy soustavy, ani otočený půdorys. Stačí narýsovat půdorys $A_1 B_1 C_1 D_1$ v původní poloze. To je výhoda této konstrukce perspektivního pravítka.

Samodružnou přímku sestrojíme takto: Postavíme perspektivní pravítko, aby hrana $a_1 \equiv a_c$ splýnula s hlavní vertikálou $v_1 \equiv v_c$ a čteme na jejím měřítku kótu bodu Z^v ($k = d + v$, např. 13,8). Vyhledáme bod $Z^{v'}$ o téže kótě na hraně a'_1 , která je nyní v poloze v'_1 , a označíme jej na ryse. $Z^v Z^{v'}$ určuje na horizontu h střed

perspektivy O' , přímka perspektivy $o' \equiv O_0O'$. Samodružná přímka $X \in O'$, $x \perp O_0O'$.

Při konstrukci perspektivy A_c bodu A otočíme přístrojem, aby jeho hrana $a_1 \equiv a_c$ byla incidentní s půdorysem A_1 bodu A , vyznačíme na kruhové hraně EF a na přímce perspektivy o' bod A'' a čteme kótu bodu A_1 , bod A_1' téže kóty na hraně a_1' vyznačíme na ryse, načez otočíme pravítkem, až hrana a_1' se stane incidentní s bodem A'' , vedeme rayon O_0A'' a určíme jeho průsečík O'' se samodružnou přímkou x . Odsuneme pravítko a sestrojíme přímku $A_1'O''$, která určí na přímce $a_1 \equiv a_c$ perspektivu A_c bodu A .

Perspektivu kolmic k základní rovině ϱ vztyčených v jejích bodech sestrojíme podle věty 4.4 kapitoly I. Máme-li např. sestřít perspektivu $D_c R_c (K_1, K_c)$ výšky $DR (K_1 K)$ vztyčené v bodu $D (K_1)$ k základní rovině, postupujeme takto:

Uvedeme přístroj do polohy, při níž je jeho hrana a_1' ve vzdálenosti velikosti hrany od příslušného otočeného půdorysu $D_1' (K_1')$. K uvedení pravítka do této polohy můžeme narýsovat kružnici o středu $D_1' (K_1')$ a poloměru rovném velikosti příslušné výšky [1] a otočíme pravítkem, aby se hrana a_1' stala tečnou této kružnice. S výhodou můžeme též užít trojúhelníkového pravouhlého pravítka posuvného po hraně a_1' perspektivního pravítka, jehož odvěsna je opatřena měřítkem k udání vzdálenosti otočeného bodu $D_1' (K_1')$ od hrany a_1' . – Abychom určili velikost perspektivy kolmice, narýsujeme přímku podle hrany $a_1 \equiv a_c$ při uvedené poloze přístroje a určíme vzdálenost perspektivy $D_c (K_{1c})$ od této přímky. Je-li přístroj v uvedené poloze dostatečně pevný, přiložíme k hraně $a_1 \equiv a_c$ pravouhlý trojúhelník jeho odvěsnou a na druhé odvěsně opatřené měřítkem a incidentní s $D_c (K_{1c})$ čteme velikost perspektivy uvažované výšky. K čtení velikostí perspektivy je výhodné opatřit perspektivní pravítko osnovou přímek rovnoběžných s hranou a_1' a číselvaných od této hrany.

Číselvaných hran $a_1 \equiv a_c$, a_1' je možno užít i u kosoúhlých perspektivních pravítek probíraných dřívě.

Při kontrole správnosti právě provedené konstrukce perspektivy, i při konstrukci samé, slouží úběžníky rovnoběžných přímek objektu, z nichž jsou hlavní $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$. Úběžníky těchto přímek jsou označeny U^{AB} , U^{BC} . Z teorie konstrukce perspektiv je známo, že tyto úběžníky jsou incidentní s horizontem h v průsečících slabě samodružných přímek rovnoběžných s půdorysy (Ω -průměty) příslušných hran.

K určení těchto úběžníků stačí narýsovat rovnoběžku s jednou stranou půdorysu podstavy objektu, např. $O_0U^{AB} \parallel A_1B_1$. Tato rovnoběžka určuje úběžník U^{AB} . Druhý úběžník U^{BC} určíme pomocí perspektivního pravítka. Otočíme jím, až hrana a_1' splyne s přímkou O_0U^{AB} a vytkneme průsečík U^{BC} hrany $a_1 \equiv a_c$ s horizontem h .

Jak použijeme těchto úběžníků, je všeobecně známo.

3. Celuloidové nebo lepenkové pravouhlé perspektivní pravítko

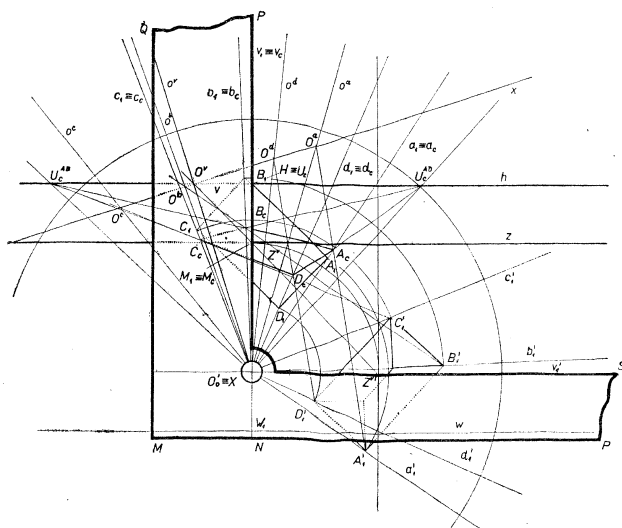
Tvar obrazce a jeho perspektivy (obdélník $ABCD \in \varrho$) i konstrukci schématu

skladiště ukazují obr. 59, 60. Pravitko, kterého použijeme při konstrukci, pozůstává ze dvou obdélníkových částí, $MNPQ$, $NRSO'_0$, spojených v pravém úhlu a vyztužených středem $O_0 \equiv X$, kolem něhož se přístroj při práci otáčí. Je jej možno zhotovit z průhledného celuloidu nebo z jiné průhledné hmoty, nebo z lepenky. Jeho rameno $MNPQ$ obsahuje přímku perspektivity o^v , je dostatečně široké pro její zakreslení v potřebném rozsahu.

Nechť je dán obraz Dürerovy soustavy ($O_0 \equiv X, z, h$) při aplikaci ${}^2\Omega$ -promítání a půdorys $A_1B_1C_1D_1$ podstavu stavby. Perspektivní kolineaci rozštěpíme otočením soustavy ϱ_1 o úhel $\gamma = 90^\circ$ do polohy ϱ'_1 a sestrojíme jako dřívě samodružnou přímku x obou rovinných soustav $\varrho'_1, \varrho_c \equiv \pi$. Incidentní s ní střed perspektivity O^v je určen odvozeným vztahem: $HO^v = v$ proti směru otáčení, jak plyne z konstrukce

$$O^v \equiv h, Z^v Z'^v.$$

Samodružná přímka x je určena: $x \in O^v$, $x \perp O_0 O^v$. Právě tak jednoduše vyznačíme na pravitku přímku perspektivity $o^v \equiv O_0 O^v$.



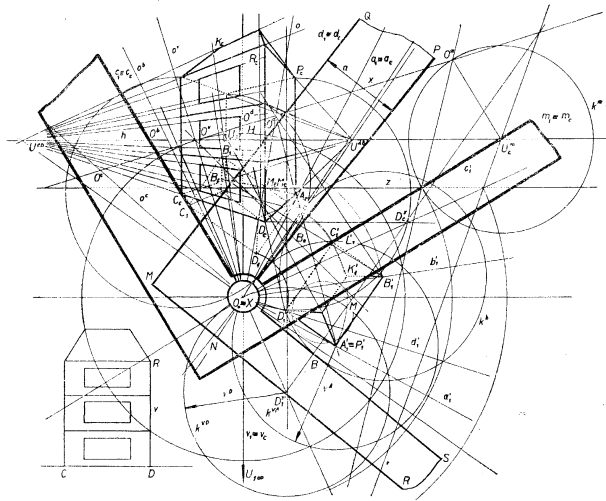
Obr. 59

Úběžníky U^{AB} , U^{BC} dvojice protilehlých stran AB, CD ; AD, BC obdržíme současně otočením přístroje tak, aby jeho hrana a'_1 byla rovnoběžná se stranou půdorysu $A_1B_1 \parallel A'_1D'_1$ nebo $A_1D_1 \parallel A'_1B'_1$. Pak hrana $a_1 \equiv a_c$ v příslušné poloze určuje na horizontu h úběžník U^{AB} strany AB a hrana a'_1 pak úběžník U^{AD} strany AD .

Perspektivy vrcholů obdélníka určíme známým způsobem po jeho otočení o 90° do polohy $A'_1B'_1C'_1D'_1$. Sestrojení udává obr. 59.

Na obr. 60 je sestrojena perspektiva budovy. Velikosti perspektiv jednotlivých bočných hran jsou sestrojeny známým způsobem pomocí kružnic naryšovaných kolem otočených půdorysů jednotlivých vrcholů podstavy a pomocí pravouhlého trojúhelníka. Při sestrojění perspektivy např. bočné hrany vrcholem B si můžeme, počínat trojím způsobem:

1. Otočením pravítka uvedeme jeho hranu a'_1 do vzdálenosti velikosti bočné hrany od vrcholu B'_1 . Toho docílíme např. pomocí pravouhlého trojúhelníka opřené odvěsny o hranu a'_1 a opatřeného měřítkem na kolmé odvěsne k hraně a'_1 . Právě v této poloze určující velikost perspektivy kolmice v bodě B základní roviny je pravítko v obr. 60 položeno. Je vytaženo tenkou čarou. Hrana a'_1 nabude polohy



Obr. 60

O_0B . Její vzdálenost B'_1B od otočeného půdorysu B'_1 je rovna velikosti bočné hrany bodem B podstavu. Hrana $a_1 \equiv a_c$ nabude polohy O_0B_0 . Vrchol B'_1 náleží zřejmě vnitřku pravého úhlu obou hran $a_1 \equiv a_c, a'_1$. Tím se stane, jak plyne z konstrukce perspektivy B_c , že se tato perspektiva B_c octne pod ramenem pravítka nebo náleží vnějšku pravého úhlu obou ramen. V obou případech brání pravítko vedení kolmice $B_cB_0 \perp \perp O_0B_0$ a zjištění perspektivy výšky. Proto nemůžeme použít k určení vzdálenosti bodu B_c od hrany O_0B_0 , což je velikost perspektivy bočné hrany vrcholem B , téhož nebo dalšího trojúhelníka hned. Je třeba narýsovat rayon O_0B_0 podél hrany $a_1 \equiv a_c$, odsunout pravítko a určit vzdálenost perspektivy B_c od tohoto rayonu a přenést ji pomocí kružítka.

Je možno též otočit pravítkem, až hrana a'_1 splyne s rayonem O_0B_0 , přiložit trojúhelníkové pravítko dříve užité a určit pomocí něho vzdálenost B_cB_0 bodu B_c od rayonu O_0B_0 .

2. Druhý způsob pozůstává v tom, že opíšeme kolem otočeného půdorysu B'_1 kružnici k^b poloměrem velikosti bočné hrany vedené vrcholem B podstavu a položíme pravítko tak, aby hrana a'_1 byla její tečnou. Velikost perspektivy hrany určíme narýsováním rayonu O_0B_0 podél hrany $a_1 \equiv a_c$ a určením jeho vzdálenosti od perspektivy B_c . Velikost perspektivy výšky můžeme však určit pomocí pravoúhlého trojúhelníkového pravítka posunovaného po hraně $a_1 \equiv a_c$. Proto musí náležet perspektiva B_c vnitřku pravého úhlu hran $a_1 \equiv a_c, a'_1$, bod B'_1 jeho vnějšku. Položíme proto hranu a'_1 incidentní s tou tečnou kružnice k^b , aby uvedená poloha nastala, přiložíme trojúhelníkové pravítko na hranu $a_1 \equiv a_c$, aby jeho obvěšna byla incidentní s perspektívou B_c a přečteme na ní vzdálenost bodu B_c od hrany $a_1 \equiv a_c$.

3. a) Jedno z ramen pravítka je možno zhotovit tak, aby mělo určitou známou šířku a , např. rameno $MNPQ$. Při sestrojení perspektivy výšky v bodu B si počínáme takto: Postavíme pravítko pomocí pravoúhlého trojúhelníka do polohy uvedené v 1., v níž je otočený půdorys B'_1 od hrany a'_1 ve vzdálenosti výšky v vztyčené k základní rovině v bodě B . Upevníme pravítko a změříme vzdálenost p perspektivy B_c od hrany MQ , když je perspektiva mimo pravítko. Velikost perspektivy výšky pak je $p + a$.

b) V případě, že se octne perspektiva B_c pod pravítkem, které je průhledné, je výhodné opatřit je osnou přímek rovnoběžných s hranou $a_1 \equiv a_c$ ve vzdálenostech jednotek měřítka. V tom případě je možno velikost perspektivy výšky číst.

Roli obou částí pravítka $MNPQ, MRSO$ je možno při určení velikosti perspektiv kolmic zaměnit.

Při tomto určení velikosti perspektiv bočných hran, např. bočné hrany procházející bodem B , je třeba uvažovat tři možnosti.

1. Střed $O_0 \equiv X$ náleží vnějšku kružnice k^b . Dají se z něho vést dvě reálné tečny od sebe různé a pracujeme jedním ze způsobů, jak bylo právě uvedeno.

2. Střed $O_0 \equiv X$ je bodem kružnice k^b . V tom případě otočíme pravítkem, aby jeho hrana a'_1 byla kolmá k přímce $O_0B'_1$ (tečna kružnice k^b v středu soustavy $O_0 \equiv$

$\equiv X$). Pak vzdálenost perspektivy B_c od hrany $a_1 \equiv a_c$ je hledaná velikost perspektivy uvažované bočné hrany. Pravitko uvedeme do žádané polohy pomocí pravouhlého trojúhelníka opřené odvěsnou o hranu a'_1 . Tato možnost nastala u bodu A (obr. 60).

3. Střed $O_0 \equiv X$ náleží vnitřku kružnice k^b , což nastalo u bodu D . Ze středu O_0 nelze vést reálné tečny ke kružnici k^b a nelze určit tímto způsobem velikost perspektivy bočné hrany vrcholem D .

Obdržíme ji tímto opatřením: Posuneme bod D rovnoběžně s perspektivní průmětnou π např. do polohy D^x , čímž se podle věty 4,3 kapitoly I nemění velikost perspektivy bočné hrany vedené bodem D . Bod D posuneme po hlavní přímce roviny ϱ (rovnoběžně se základnicí z) incidentní s půdorysem D_1 do polohy D_1^x . Abychom se vyhnuli otáčení tohoto bodu D_1^x a řešení zjednodušili, posuneme přímo bod D_1 do polohy D_1^y ve směru otočené základnice z' , tj. ve směru $z' \parallel v_1 \equiv v_c$.

Perspektivu D_c^x tohoto bodu D^x sestrojíme známým způsobem. Velikost perspektivy hrany bodem D určíme jako v případě 1, kdy střed $O_0 \equiv X$ náležel vnějšku kružnice k^d . Na obr. 60 je velikost perspektivy bočné hrany vrcholem D sestrojena jako v případě 2. Těto konstrukce použijeme též při určení perspektivy bodu K hřebene střechy.

Jestliže střed $O_0 \equiv X$ náleží sice vnějšku kružnice k^d , ale není od ní příliš vzdálen, takže tečny jím vedené ke kružnici k^d nelze sestrojit přesně, posuneme bod D_1 po jeho hlavní přímce do takové polohy, aby kružnice k^d středem $O_0 \equiv X$ procházela.

Pro tuto polohu bodu D_1^x platí:

- a) Leží na hlavní přímce $D_1^x D_1^y \parallel z'$.
- b) Vzdálenost bodu D_1^x od středu $O_0 \equiv X$ se rovná velikosti bočné hrany v bodě D , $O_0 D_1^x = v^D$.

Velikost perspektivy bočné hrany vrcholem D je pak určena jako v případě 2. V obr. 60 je bod D_1^x posunut právě do této polohy D_1^x .

4. Určení polohy přímky perspektivity vzhledem k úhlu otočení

Než budou uvedeny další návrhy mechanických perspektivních pomůcek na základě rozštěpení perspektivně kolineárního vztahu, mající různé výhody při mechanických konstrukcích perspektiv, je třeba uvážit důležitou okolnost pro udělení vhodného tvaru perspektivnímu pravitku. Je jistě nápadné, že v posledních konstrukcích zaujímá přímka perspektivy o^v vzhledem k úhlu otočení $\sphericalangle a'_1 O_0 a_c$ různou polohu. V obr. 58 náleží přímka o^v vnitřku tohoto úhlu, v obr. 59 pak jeho vnějšku. Stejně je tomu tak v obr. 12, 14, kdy náleží přímka perspektivity o^v vnitřku úhlu otočení a v obr. 20 pak vnějšku úhlu otočení.

Uvažme poslední tvar perspektivního pravitka. Pro rýsování rayonů podél hran a'_1 , $a_1 \equiv a_c$ by bylo možno mu dát dvojitý tvar. Jednak uvedený v obr. 59, v němž jsou hrany a'_1 , $a_1 \equiv a_c$, možno říci, vnitřní hrany pravitka, jednak tvar např. čtverce,

obdélníka, kruhové výseče, uvedený v obr. 58, 71, v němž jsou hrany $a'_1, a_1 \equiv a_c$ vnějšími hranami pravítka.

Dáme-li přednost druhému tvaru, mohli bychom jej dát pravítku vždy, náleželi-li přímka perspektivity o'' vnitřku úhlu otočení $\sphericalangle a'_1 O_0 a_c$. Tomu tak např. v obr. 59 není.

Je otázka, je-li poloha přímky perspektivity ovlivněna např. vzájemnou polohou prvků v obrazu Dürerovy soustavy nebo jinými okolnostmi. Je-li tomu tak, pak je možno polohu přímky perspektivity předem určit a podle toho dát pravítku vhodný tvar.

Je tedy konkrétní otázka, zdali je poloha přímky perspektivity závislá na zadání Dürerovy soustavy nebo na jiných okolnostech, za jakých podmínek náleží přímka perspektivity o'' :

- a) vnitřku úhlu $\sphericalangle a'_1 O_0 a_c$,
- b) vnějšímu tohoto úhlu,
- c) rameni tohoto úhlu.

Odpověď na první otázku je kladná. Důkaz toho a též důkaz správnosti tvrzení o určení polohy přímky perspektivity, jak bylo uvedeno, vyplývá z několika vět, v nichž předpokládáme Dürerovu soustavu perspektivního promítání danou jejím obrazem.

Věta 4.1. a) *Body základnice z mají tu vlastnost, že jejich perspektivní průměty splývají s jejich průměty v obou Ω -promítáních.*

b) *Mimo body základnice z splývá perspektivní průmět bodu $O^{1\Omega}$ s jeho $^1\Omega$ -průmětem do π , kde $O^{1\Omega}$ je $^1\Omega$ -průmět středu O do základní roviny (obr. 61).*

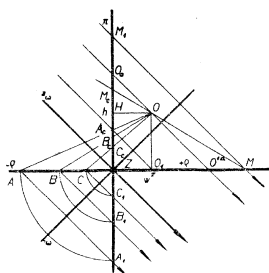
c) *Podobně mimo body základnice z splývá perspektivní průmět bodu $O^{2\Omega}$ s jeho $^2\Omega$ -průmětem, kde $O^{2\Omega}$ je $^2\Omega$ -průmět středu O do základní roviny ϱ .*

Důkaz. a) Body základnice z jsou incidentní s oběma rovinami. Jejich perspektivní průměty i jejich Ω -průměty s nimi splývají.

b) Promítací přímka bodu $O^{1\Omega} \in \varrho$ (obr. 61), který má uvedenou vlastnost, splývá v $^1\Omega$ -promítání s perspektivně promítací přímkou tohoto bodu. Mimo obě promítací přímky bodu $O^{1\Omega}$ nespývají promítací přímky žádného jiného bodu základní roviny, neboť bodem lze vést právě jednu přímku daného směru. Proto $^1\Omega$ -průmět i perspektivní průmět tohoto bodu $O^{1\Omega}$ splývají, cbd.

c) Podobně se dokáže platnost výroku c). Platí však i věta obrácená.

Věta 4.2. 1. *Množina bodů základní roviny ϱ , jejichž perspektivní průměty a $^1\Omega$ -průměty splývají, jsou*



Obr. 61

- a) body základnice z ,
- b) průmět $O^{1\Omega}$ středu O perspektivního promítání do základní roviny q .

2. Množina bodů základní roviny q , jejichž perspektivní průměty a ${}^2\Omega$ -průměty splývají, jsou

- a) body základnice z ,
- b) průmět $O^{2\Omega}$ středu perspektivního promítání O do základní roviny q .

Důkaz. 1. a), 2. a) Body množiny a) jsou incidentní se společnou přímkou rovin π , q , jsou v obou promítáních samodružné, čímž je správnost tvrzení 1. a), 2. a) dokázána.

α) (obr. 61). Při ${}^1\Omega$ -promítání se zobrazuje množina bodů záporné poloroviny $-q$ do vnitřních bodů záporné poloroviny $-\pi$, zatím co při perspektivním promítání se zobrazuje množina bodů téže poloroviny $-q$ do množiny bodů rovinného pásu o krajních přímkách v základnici z a v horizontu h . Tyto množiny jsou disjunktí a nemůže splýnout Ω -průmět s perspektivním průmětem žádného bodu této části základní roviny.

β) Při ${}^1\Omega$ -promítání se zobrazuje množina bodů kladné poloroviny $+q$ do množiny bodů kladné poloroviny $+\pi$. Při perspektivním promítání se zobrazuje první množina bodů do celé roviny π s výjimkou rovinného pásu uvažovaného v odstavci α).

γ) Množina bodů incidentních s $+q$ je možno rozložit v množinu pásu o krajních přímkách v základnici z a v distanční přímce, průsečnici $w^s = \pi' \cdot q$ distanční roviny se základní rovinou q a v množinu poloroviny w^sM určené distanční přímkou w^s a opačné k pásu $w^s z$. ${}^1\Omega$ -průmět množiny bodů pásu $w^s z$ je množina bodů pásu $w_1 z$, kde w_1 je ${}^1\Omega$ -průmět úběžnice w . Středový průmět množiny bodů tohoto pásu $w^s z$ je množina bodů záporné perspektivní průmětny $-\pi$. To jsou však množiny disjunktí a neexistuje bod této části $+q$, jehož oba průměty by splýnuly.

δ) Při ${}^1\Omega$ -promítání se zobrazuje množina bodů poloroviny w^sM do množiny bodů poloroviny w_1M_1 , při perspektivním promítání se zobrazuje do množiny bodů poloroviny hM_c . Avšak tyto dvě množiny w_1M_1 , hM_c mají neprázdný průnik, a to množinu druhou, která je podmnožinou množiny první, jestliže platí: $d < v$, tj. jedná-li se o první Dürerovu soustavu. Jestliže platí: $d > v$, tj. jedná-li se o třetí Dürerovu soustavu, mají obě množiny neprázdný průnik, a to množinu první w_1M_1 , která je podmnožinou množiny druhé. V případě rovnostranné Dürerovy soustavy jsou obě množiny totožné.

Tedy jedině v polorovině w^sM základní roviny q mohou existovat body, které mají ve větě uvedenou vlastnost, tj. jejich průměty Ω a perspektivní průměty splývají.

Má-li však splýnout ${}^1\Omega$ -průmět takového bodu s jeho průmětem perspektivním, musí splýnout promítací přímkou bodu v obou promítáních. Jelikož promítací přímka perspektivního promítání je incidentní se středem O a tímto středem lze vést jedinou rovnoběžku se směrem ${}^1\Omega$ -promítání, je bod uvedených vlastností incidentní s rovinou q jediný, a to průmět $O^{1\Omega}$ středu O perspektivního promítání do základní roviny q .

Perspektivní průmět tohoto bodu i jeho ${}^1\Omega$ -průmět splývají, jak je patrné z obr. 61,

se středem perspektivní kolineace, o níž mluví Stevinova věta 1,17 kapitoly I. Je tedy tento střed O_0 samodružným bodem uvedené perspektivní kolineace.

Podobně dokážeme platnost druhé části věty 4.2. Můžeme tedy vyslovit větu.

Věta 4.3. *Nutná a dostačující podmínka proto, aby splýnul perspektivní průmět bodu základní roviny ρ s jeho ${}^1\Omega$ -průmětem do perspektivní průmětny, resp. s jeho ${}^2\Omega$ -průmětem zní: Bod je bodem základnice z , nebo je to bod $O^{1\Omega}$, resp. bod $O^{2\Omega}$.*

S touto větou souvisí věta další.

Věta 4.4. *Přímky incidentní se základní rovinou ρ náležící svazku o středu $O^{1\Omega}$, resp. svazku o středu $O^{2\Omega}$ a jejich perspektivní průměty náležící do svazku o středu v bodu O_0 , resp. O'_0 tvoří perspektivní svazky o základnici z jako ose perspektivnosti. Oba svazky v základní rovině ρ mají tu vlastnost, že ${}^1\Omega$ -průmět, resp. ${}^2\Omega$ -průmět každé přímky svazku $O^{1\Omega}$, resp. $O^{2\Omega}$ splývá s perspektivním průmětem této přímky.*

Důkaz. 1. Body základnice z jsou samodružné v perspektivní projekci i v ${}^1\Omega$ -projekci, resp. v ${}^2\Omega$ -projekci, jak bylo uvedeno ve větě 4,1, čímž je prokázána správnost první části věty.

2. Bod O_0 , resp. O'_0 je perspektivním průmětem bodu $O^{1\Omega}$, resp. $O^{2\Omega}$ a taktéž ${}^1\Omega$ -průmětem bodu $O^{1\Omega}$, resp. ${}^2\Omega$ -průmětem bodu $O^{2\Omega}$.

Perspektivní průmět přímky svazku o středu $O^{1\Omega}$, resp. o středu $O^{2\Omega}$ tedy splývá s jejím ${}^1\Omega$ -průmětem, resp. ${}^2\Omega$ -průmětem, protože splývají tyto průměty dvou jejich bodů, cbd.

Platí však i věta obrácená.

Věta 4.5. *Přímky incidentní se základní rovinou ρ , jejichž perspektivy v rovině π splývají s jejich ${}^1\Omega$ -průměty, resp. ${}^2\Omega$ -průměty, tvoří mimo základnici z dva perspektivní svazky přímků o středech v bodech $O^{1\Omega}$, resp. $O^{2\Omega}$, o základnici z jako ose perspektivnosti.*

Důkaz. Má-li splýnout perspektivní průmět přímky roviny ρ s ${}^1\Omega$ -průmětem této přímky, musí splýnout perspektivní průmět s ${}^1\Omega$ -průmětem dvou jejích bodů. Takové přímky jsou:

a) základnice z , jejíž každý bod má žádanou vlastnost,

b) přímky různé od základnice z náležící do svazku o středu v bodě $O^{1\Omega}$, neboť perspektivní průmět a ${}^1\Omega$ -průmět jejich společných bodů se základnicí splývá s jejich ${}^1\Omega$ -průmětem. Mimo body základnice z splývá však podle věty 4,2 perspektivní průmět a ${}^1\Omega$ -průmět toliko bodu $O^{1\Omega}$.

Podobná úvaha platí o přímkách svazku o středu $O^{2\Omega}$, cbd.

Je tedy možno říci větu.

Věta 4.6. *Nutná a dostačující podmínka pro to, aby splýnuly perspektivní průměty a ${}^1\Omega$ -průměty, resp. ${}^2\Omega$ -průměty přímků základní roviny ρ zní: Přímky jsou:*

a) základnice z ,

b) přímky roviny ρ náležící svazku o středu v bodě $O^{1\Omega}$, resp. přímky roviny ρ náležící do svazku o středu v bodě $O^{2\Omega}$.

Splývající perspektivní průměty a ${}^1\Omega$ -průměty, resp. ${}^2\Omega$ -průměty přímků svazku

o středu $O^{1\Omega}$, resp. $O^{2\Omega}$ jsou slabě samodružné přímky perspektivní kolineace o středu O_0 , resp. O'_0 , o níž mluví Stevinova věta.

Je důležité si uvědomit, že tyto samodružné přímky mají jen dva své body samodružné, ostatní body samodružné nejsou. Nejsou to tedy přímky samodružných bodů, jak je tomu u základnice z .

Můžeme o tom vyslovit další větu.

Věta 4.7. Vytkneme-li slabě samodružnou přímku $a_1 \equiv a_c$ v perspektivní kolineaci mezi $^1\Omega$ -průmětem základní roviny ρ do průmětny π a jejím perspektivním průmětem, odpovídá jí přímka a základní roviny, jejíž průměty jsou a_1, a_c . Pak se řada bodů A, B, C, \dots incidentních s přímkou a zobrazuje v Ω -promítání i v perspektivě do soumístných projektivních řad $A_1, B_1, C_1, \dots, A_c, B_c, O_c, \dots$ na $a_1 \equiv a_c$.

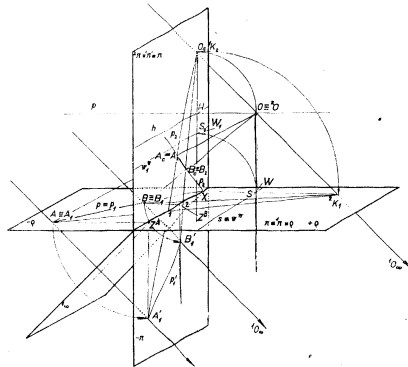
Důkaz správnosti věty vyplývá ze základních poznatků projektivní geometrie.

O těchto projektivních řadách platí věta.

Věta 4.8. Tyto dvě soumístné projektivní řady na přímkách $a_1 \equiv a_c$ mají vždycky dva samodružné body reálné od sebe různé. Výjimku tvoří přímka rovnoběžná se základnicí, jejíž řady jsou podobné, mají jeden vlastní samodružný bod O_0 , druhý samodružný bod je bod nevlastní.

Důkaz. Podle věty 4,1 a 4,2 jsou to body O_0 (střed svazku samodružných přímek $a_1 \equiv a_c$) a průsečík se základnicí z .

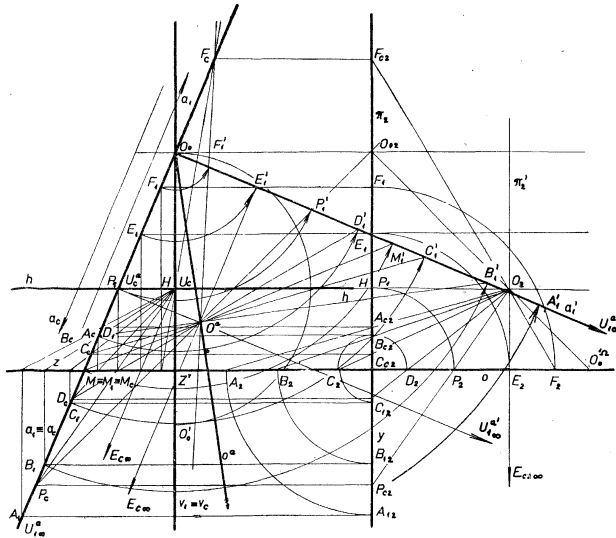
Je-li přímka $a_1 \equiv a_c$ rovnoběžná se základnicí z , je její druhý bod samodružný nevlastní bod. Takové řady jsou, jak učí projektivní geometrie a jak by bylo možno i zde podrobněji zdůvodnit, podobné cbd.



Obr. 62

O obou souměrných projektivních řadách na slabě samodružných přímkách $a_1 \equiv a_c$ svazku o středu v samodružném bodu O_0 (O_0') platí podrobnější věta.

Věta 4.9. Uvedené souměrné projektivní řady na slabě samodružných přímkách $a_1 \equiv a_c$ perspektivní kolíneace jsou nesouhlasné, jestliže bylo aplikováno ${}^1\Omega$ -promítání základní roviny ϱ do perspektivní průmětny π a jsou souhlasné, bylo-li aplikováno ${}^2\Omega$ -promítání.



Obr. 63

Důkaz (obr. 62, 63). 1. Nechť je v dané Dürerově soustavě aplikováno ${}^1\Omega$ -promítání základní roviny ϱ a středu O do perspektivní průmětny π . V obr. 63 je naryšován obraz soustavy a obou promítání i v stranoryse (pohled směrem základnice z je označen indexem 2). Jsou výtčeny body $O^{1\Omega}$ a O_0 jako středy svazků přímek, které přecházejí při perspektivním promítání a ${}^1\Omega$ -promítání v sebe podle věty 4,4, a 4,5. Je výtčena přímka a roviny ϱ náležející do svazku o středu $O^{1\Omega}$, která se zobrazuje podle Stevinovy věty v obou uvedených promítáních do samodružné přímky $a_1 \equiv a_c$ perspektivní kolíneace obou souměrných soustav.

Jelikož se přímka a zobrazuje v perspektivním promítání i v Ω -promítání^o stejně, splývají obě promítací roviny v společnou promítací rovinu.

Rozdělme přímku a na části incidentní s částmi základní roviny ϱ vyičenými v důkazu správnosti věty 4,2, polopřímku MA , úsečku ME a polopřímku EF .

Polopřímka MA incidentní s polorovinou $-\varrho$ se zobrazuje ${}^1\Omega$ -promítáním do polopřímky MA_1 , incidentní s polorovinou $-\pi$, zatím co perspektivním promítáním se zobrazuje v úsečku MU_c^a incidentní s polorovinou $+\pi$. Náleží tedy ${}^1\Omega$ -průmět a perspektivní průmět polopřímky MA opačným polorovinám perspektivní průmětny π .

Bliží-li se bod A polopřímky MA samodružnému bodu $M \equiv M_1 \equiv M_c \in z$ přes bod B , blíží se jeho perspektivní průmět A_c samodružnému bodu $M \equiv M_1 \equiv M_c$ přes perspektivu B_c bodu B a průmět A_1 bodu A se blíží samodružnému bodu $M \equiv M_1 \equiv M_c$ přes průmět B_1 . Obě řady bodů $A_1 B_1 C_1 \dots, A_c B_c C_c \dots$ na přímce $a_1 \equiv a_c$ jsou v označené její části nesouhlasné.

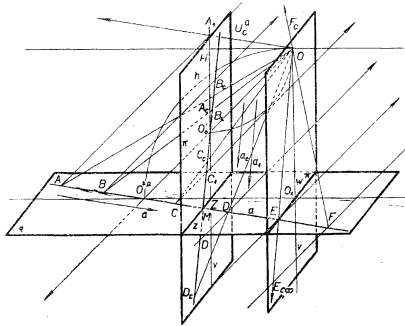
Stejně se dá ukázat, že tomu tak je, probíhá-li bod A úsečku MDE . Jeho perspektivní průmět probíhá polopřímku MD_c , zatím co ${}^1\Omega$ -průmět probíhá v opačném smyslu úsečku MD_1E_1 .

Probíhá-li konečně bod A polopřímku EF , pohybuje se jeho perspektivní průmět po polopřímce U_1^a, U_c^a ve smyslu $O_0 U_c^a$, zatím co ${}^1\Omega$ -průmět probíhá polopřímku $E_1 O_0$ v tomto smyslu. Obě řady jsou též nesouhlasné a mají zřejmě v bodě O_0 samodružný bod.

Tím je správnost první části věty dokázána.

2. K důkazu správnosti druhé části věty 4,9, uijíme obr. 64, 65.

Přímku $a \in \varrho$ rozdělíme na části jako v I. části důkazu a budeme na ně aplikovat perspektivní promítání a zároveň Ω -promítání.



Obr. 64

Je patrné, že polopřímka MA incidentní s $-e$ se zobrazuje ${}^2\Omega$ -promítáním do kladné poloroviny perspektivní průmětny $+\pi$. Probíhá-li bod A polopřímkou MA smyslu AM a blíží-li se bodu samodružnému M přes bod B , probíhá jeho ${}^2\Omega$ -průmět polopřímkou MO_0 a blíží se v smyslu A_1M přes bod B_1 samodružnému bodu M . Jeho perspektivní průmět A_c probíhá úsečkou $U_c^a M$ v tomto smyslu a blíží se přes perspektivu B_c bodu B samodružnému bodu M . Obě řady jsou v tomto úseku souhlasné. Zaujme-li bod A polohu $O^{2\Omega}$, splynou oba jeho průměty v samodružném bodě O_0 .

Stejně se dá dokázat, že obě řady jsou souhlasné, probíhá-li bod A úsečkou MDE přímkou a . Jeho ${}^2\Omega$ -průmět probíhá úsečkou MD_1E_1 v tomto smyslu, zatím co perspektivní průmět probíhá v témž smyslu polopřímkou $MD_c \equiv MD_1E_1$.

Probíhá-li bod A poslední částí přímky a , polopřímkou EF , probíhá jeho ${}^2\Omega$ -průmět polopřímkou E_1F_1 v tomto smyslu, kdežto perspektivní průmět probíhá polopřímkou $U_c^a F_c$ v opačném smyslu, tj. v souhlasném smyslu s E_1F_1 .

Tím je věta 4,9 dokázána.

Z uvedených a dokázaných vět vyplývá věta o poloze přímky perspektivity o^a příslušné perspektivním řadám na přímkách a_c, a'_1 po rozštěpení perspektivní kolineace otočením soustavy e_1 o velikost úhlu γ (90°).

Věta 4,10. *V případě nesouhlasných soumístných projektivních řad bodových na slabě samodružné přímce dané perspektivní kolineace, tj. v případě aplikace ${}^1\Omega$ -promítání v příslušné Dürerově soustavě podle věty 4,9, náleží přímka perspektivity o^a (resp. o^a), sestřená po rozštěpení perspektivní kolineace, vnitřku úhlu $\sphericalangle v'_1 O_0 v_c$ (resp. $\sphericalangle a'_1 O_0 a_c$) perspektivních řad v'_1, v_c (resp. a'_1, a_c).*

Důkaz (obr. 63). Uvažujme slabě samodružnou přímku $a_1 \equiv a_c$ s incidentními nesouhlasnými projektivními řadami dané perspektivní kolineace $(A_1 B_1 C_1 \dots E_1 \dots U_{1\infty}^a \dots) \pi (A_c B_c C_c \dots E_c \dots U_c^a \dots)$. Rozštěpme tuto kolineaci otočením řady a_1 o úhel 90° do polohy a'_1 . Obě řady $a_c \equiv A_c B_c C_c \dots, a'_1 \equiv A'_1 B'_1 C'_1 \dots$ jsou perspektivní podle středu perspektivity $O^a = A'_1 A_c \cdot B'_1 B_c \equiv U_{1\infty}^a U_c^a \cdot E'_1 E_{c\infty}$ a přímka $O_0 O^a$ je přímka perspektivity příslušející dvojici a'_1, a_c .

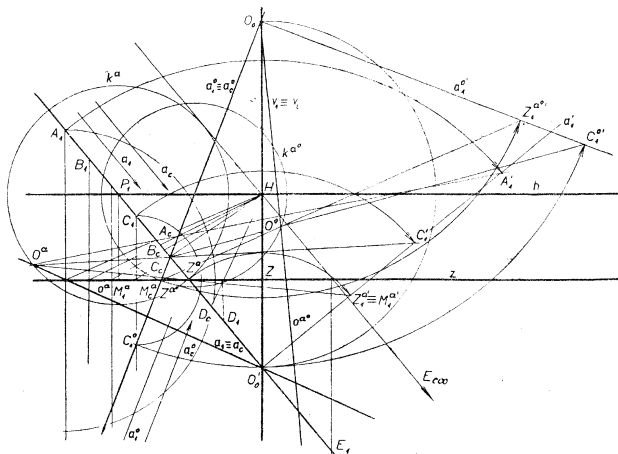
Lze snadno dokázat, že střed perspektivity O^a je vnitřním bodem pravého úhlu $a'_1 O_0 a_c$, nebo příslušného úhlu vrcholového, čímž je proveden důkaz správnosti 1. části věty 4,10.

Uvažme střed perspektivity jako bod incidentní s přímkami $U_{1\infty}^a U_c^a, E'_1 E_{c\infty}$, které spojují odpovídající si body $U_{1\infty}^a \rightarrow U_c^a, E'_1 \rightarrow E_{c\infty}$ obou perspektivních řad a'_1, a_c .

Přímka $U_{1\infty}^a U_c^a$ incidentní s bodem U_c^a je rovnoběžná s přímkou a'_1 a je tedy incidentní s polorovinou $a'_1 U_c^a$, jejíž částí je úhel $\sphericalangle a'_1 O_0 a_c$. Přímka $E'_1 E_{c\infty}$ incidentní s bodem E'_1 je rovnoběžná s přímkou a_c a je tedy incidentní s polorovinou $a_c E'_1$, jejíž částí je tentýž úhel $\sphericalangle a'_1 O_0 a_c$.

Obě poloroviny $a'_1 U_c^a, a_c E'_1$ mají společný průnik, úhel $\sphericalangle a'_1 O_0 a_c$, s nímž je střed perspektivity o^a incidentní. Mohli bychom vzít i jiné dva páry odpovídajících si bodů

obou řad $a_1 \pi a_c$: např. $M_1 \rightarrow M_c, A_1 \rightarrow A_c$. Protože $M_1 \equiv M_c, O_0A_1 > O_0A_c$ nebo obráceně a $O_0A_1 > O_0M_c$, nebo obráceně a $O_0A_c < O_0M_c$, platí po otočení: $O_0M_1' = O_0M_c, O_0A_1' > O_0A_c$, nebo obráceně, $O_0A_1' > O_0M_c$, nebo obráceně, a $O_0A_c < O_0M_c$. Z toho vyplývá, že přímky $M_1'M_c, A_1'A_c$ se protínají na úsečce $M_1'M_c$, tedy v bodě o^s , který náleží vnitřku úhlu $\sphericalangle a_1'O_0a_c$.



Obr. 65

Tim je na základě definice přímky perspektivity o^s správnost první části věty dokázána.

Touž úvahou zdůvodníme správnost i druhé části věty 4,10.

Nechť je dána Dürerova soustava svým obrazem, perspektivní kolineací se souhlasnými projektivními řadami na slabě samodružných přímkách $a_1 \equiv a_c$ (obr. 64, 65), je tedy aplikováno ${}^2\Omega$ -promítání. Uvažme pro krátkost dvojice $M_1 \rightarrow M_c, A_1 \rightarrow A_c$. První dvojici tvoří samodružný bod incidentní se základnicí z , druhá je ${}^2\Omega$ -průmět a perspektivní průmět bodu přímky a incidentního se zápornou základní rovinou q . Zřejmě je $O_0A_1 > O_0A_c; O_0A_1, O_0A_c > O_0M_1 (M_1 \equiv M_c \equiv Z^o)$.

Po otočení řady a_1 do polohy a_1' zůstávají tyto vztahy v platnosti: $O_0A_1' > O_0A_c; O_0A_1', O_0A_c > O_0M_1' (= O_0M_c)$. Z toho vyplývá, že úsečky $M_1'M_c, A_1'A_c$ nemají společného bodu a přímky $M_1'M_c, A_1'A_c$ mají společný bod náležící vnějšku pravého úhlu, $\sphericalangle a_1'O_0a_c$ cbd.

Na základě vyslovených a dokázaných vět můžeme odpovědět na otázku položenou na začátku § 4 a vyslovit výsledek větou.

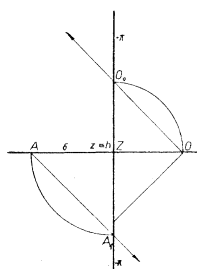
Věta 4.11. V Dürerově soustavě perspektivního promítání dané obrazem (O_0, z, h) je poloha přímky perspektivity o^p (o^p) vzhledem k úhlu $\sphericalangle v_1 O_0 v_c$ ($\sphericalangle a_1' O_0 a_c$) závislá na aplikovaném Ω -promítání základní roviny q do perspektivní průmětny π . Při aplikaci $^1\Omega$ -promítání je o^p přímkou náležící vnitřku úhlu $\sphericalangle v_1' O_0 v_c$ ($\sphericalangle a_1' O_0 a_c$), při aplikaci $^2\Omega$ -promítání náleží vnějšku tohoto úhlu.

Lze tedy volbou Ω -promítání vždy dosáhnout toho, aby přímka perspektivity o^p náležela buď vnitřku nebo vnějšku úhlu určeného odpovídajícími si dvojicemi perspektivních bodových řad na přímkách v_1', v_c (a_1', a_c) po rozštěpení perspektivní kolineace.

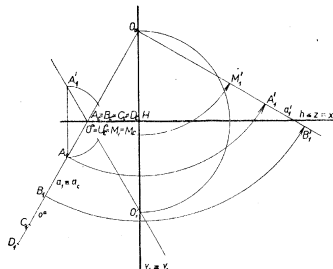
Tento zajímavý výsledek, důležitý pro konstrukci některých mechanických pomůcek k usnadnění rýsování perspektiv, doplníme dvěma poznámkami. První je odpověď na otázku, kdy splyne přímka perspektivity o^p s ramenem úhlu $\sphericalangle v_1' O_0 v_c$.

Věta 4.12. Přímka perspektivity o^p splyne s ramenem úhlu $\sphericalangle v_1' O_0 v_c$ ($\sphericalangle a_1' O_0 a_c$) v tom a jen v tom případě, jde-li o perspektivu horizontální roviny q Dürerovy soustavy. Projektivita na její slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ degeneruje. Přímka perspektivity pak splyne s přímkou v_c (a_c), nikoli s druhým ramenem úhlu otočení $\sphericalangle v_1' O_0 v_c$ ($\sphericalangle a_1' O_0 a_c$).

Samodružná přímka obecně kolineace vzniklé rozštěpením perspektivní kolineace splyne s horizontem h a zároveň se základnicí z .



Obr. 66



Obr. 67

Důkaz (obr. 66, 67).

Nechť je dána Dürerova soustava $(O, \pi \perp q)$, v níž je základní rovina totožná s rovinou horizontální q , tedy $v = 0$. V obraze soustavy splyne základnice z s horizontem h . Uvažme hlavní vertikálu $v_1 \equiv v_c$ nebo libovolnou jinou slabě samodružnou přímkou $a_1 \equiv a_c$ dané perspektivní kolineace.

Aplikujeme-li na soustavu $^1\Omega$ -promítání, je střed $O^{1\Omega}$ svazku přímek a incident-

nich se základní rovinou ϱ , jejichž průměty a_1 v perspektivní průmětně π splývají s jejich perspektivními průměty a_c , totožný se středem promítání O , ${}^1\Omega$ -průmět středu O do perspektivní průmětny je bod O_0 , pro nějž je $HO_0 = d$.

Z toho je patrné, že perspektivní průměty všech bodů A, B, C, \dots přímky a splývají v jeden a tentýž bod $A_c \equiv B_c \equiv C_c \equiv \dots$, průsečík přímky a s horizontem h . To plyne též z konstrukce perspektivních průmětů bodů pomocí spádových přímek s^a , případně i z názoru.

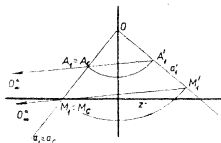
Jde skutečně o degenerovanou projektivitu, jak bylo ve větě řečeno. Rozštěpíme-li perspektivní kolineaci otočením řady a_1 o úhel γ (90°) do polohy a'_1 , je příslušný střed perspektivity $O'' \equiv A'_1A_c, B'_1B_c, \dots$, tedy $O'' \equiv M_c \equiv A_c \equiv B_c \equiv \dots$ a přímka perspektivity $o'' \equiv a_1 \equiv a_c$.

Otočíme-li řadu a_c , je střed perspektivity $O'' \equiv M_1M'_c, A_1A'_c$, což je bod $M'_c \equiv A'_c \equiv B'_c \equiv \dots$ a přímka perspektivity $o'' \equiv a'_c$. Přímka perspektivity nesplyne ani s a'_1 , ani s a_1 , cbd.

Z úvahy dále plyne, že množina bodů perspektivity pro všechny dvojice $a'_1, a_c; b'_1, b_c; c'_1, c_c, \dots$ je horizont h splývající se základnicí x , a to je právě přímka samodružná x , tedy $x \equiv h \equiv z$, cbd. Důkaz správnosti věty obrácené je jednoduchý.

2. Jako druhá poznámka je odpověď na otázku, kdy je střed perspektivity O'' nevlastní. Tuto odpověď dává věta.

Věta 4.13. *Jestliže střed perspektivity je bod nevlastní, pak perspektivní promítání při vlastním středu O je promítání identické, tj. kladná rovina ϱ splývá s perspektivní průmětnou π .*



Obr. 68

Důkaz (obr. 68). Nechť je dána Dürerova soustava svým obrazem, perspektivní kolineací, v níž

jsou samodružné body, jak bylo ukázáno větou 4.1, body základnice (slabě samodružné body) a průmět O_0 středu promítání O (silně samodružný bod). Na přímce slabě samodružné, např. na $a_1 = a_c$, nemůže být žádný další bod samodružný. Pro střed perspektivity O'' platí: $O'' \equiv M'_1M_c, A'_1A_c$, při čemž $M_1 \equiv M_c$ (bod základnice), $O_0M_c = O_0M'_1, O_0M'_1 \neq O_0M_c$.

Jestliže je bod O'' nevlastní, pak musí platit: $M'_1M_c \parallel A'_1A_c$, a proto musí být $O_0A'_1 = O_0A_c$ a je tedy $A_1 \equiv A_c$.

Z toho plyne, že dvě projektivní řady bodové na slabě samodružné přímce mají tři samodružné body a jsou proto všechny její body samodružné. Z toho jednoduchou úvahou dále vyplývá, že všechny body roviny jsou samodružné. Základní rovina ϱ splývá s perspektivní průmětnou π a Dürerova soustava degeneruje. Každá přímka roviny může být vzata za základnici, každý bod prostoru nikoli incidentní s $\varrho \equiv \pi$ za střed promítání O a každý bod roviny za bod O_0 (i nevlastní).

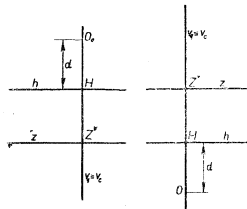
Tím je správnost věty 4.13 dokázána.

Platí též věta obrácená.

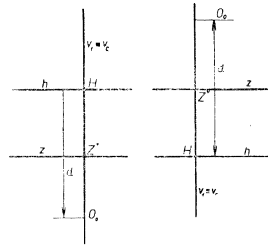
5. Celuloidové perspektivní pravítko čtvercové nebo obdélníkové

Věta 4,11 byl vysloven důležitý výsledek řady úvah o poloze přímky perspektivity o'' vzhledem k dvojici přímek $v_1 \equiv v_c, v_1'$. Podle této věty můžeme předem zařadit, aby přímka perspektivity o'' náležela vnitřku nebo vnějšku úhlu obou přímek.

Je-li Dürerova soustava dána svým obrazem ($O_0 \equiv X, z, h$), pak první případ je nakreslen v obr. 69, druhý případ v obr. 70.



Obr. 69



Obr. 70

Můžeme se proto rozhodnout v další práci pro některou z poloh přímky perspektivity a podle toho volit druh Ω -promítání v dané Dürerově soustavě. Chceme-li dát přístroji tvar čtverce nebo obdélníka podle poznámky na str. 101, pak volíme $^1\Omega$ -promítání. V tom případě bude přístroj zaujímat menší plochu. Uzájme obojí možnosti.

Nechť je dána Dürerova soustava svým obrazem (O_0, z, h), jak ukazuje obr. 71. Jde o případ naznačený v obr. 69, kdy je aplikováno $^1\Omega$ -promítání.

Nejdříve sestrojíme střed perspektivity O'' náležející hlavní vertikále $v_1 \equiv v_c$. Tento střed je, jak je známo z dřívějších úvah, incidentní s horizontem h a platí pro něj: $HO'' = HZ'' = v$ ve smyslu dovnitř úhlu otočení $\angle v_1'O_0v_c$. Středem perspektivity je určena přímka perspektivity přináležející přímce $v_1 \equiv v_c, o'' \equiv O_0O''$. Samodružná přímka x je incidentní se středem perspektivity O'' a je kolmá k přímce perspektivity o'' , čímž je stanovena.

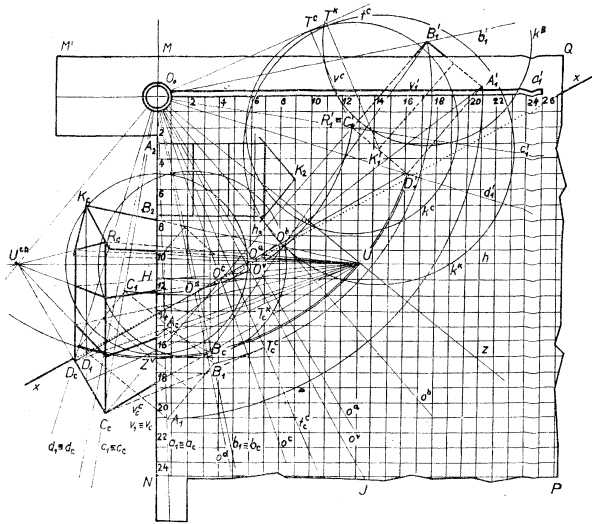
Nechť je dán půdorys a nárys objektu s podstavou v základní rovině q , jehož perspektivu je sestrojiti. Perspektivy jednotlivých bodů podstavy sestrojíme známým způsobem.

Konstrukce. 1. Upevníme vhodně pravítko, aby jím bylo možno jednak snadno otáčet kolem bodu $O_0 \equiv X$, jednak aby je bylo možno v každé poloze dostatečně upevnit. Vyznačíme na něm přímku perspektivity o'' , hlavní její bod J na hraně NP (obr. 71).

2. Otočíme půdorys $A_1B_1C_1D_1$ objektu v kladném smyslu o úhel $\gamma = 90^\circ$ do polohy $A_1'B_1'C_1'D_1'$.

3. Při sestavení perspektivy A_c bodu A otočíme pravítkem, aby jeho hrana $v_1'(a_1')$ byla incidentní s otočeným půdorysem A_1' a vedeme rayon podél hrany $v_1 \equiv v_c$ ($a_1 \equiv a_c$). Zároveň vyznačíme na ryse bod J přímky perspektivy $o'(o^o)$.

4. Otočíme pravítkem, aby hrana $v_1'(a_1')$ nebo $v_1 \equiv v_c$ ($a_1 \equiv a_c$) byla incidentní s bodem J a vedeme podél ní rayon O_0J .



Obr. 71

5. Tento rayon protne samodružnou přímkou x v bodu O'' , středu perspektivy slabě samodružné přímky $a_1 \equiv a_c$ incidentní s perspektivou A_c . Stačí sestavit přímkou $A_1'O''$, která určí na a_c hledanou perspektivu A_c bodu A .

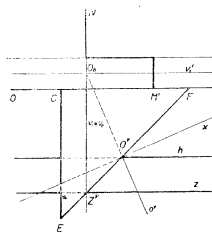
Opatříme-li hrany pravítka měřítka, jak je tomu na obr. 71, můžeme otočit půdorys do polohy $A_1'B_1'C_1'D_1'$ zcela jednoduše pomocí pravítka.

Provedení. Otočíme pravítkem, aby hrana $v_1 \equiv v_c$ byla incidentní s půdorysem A_1 bodu A a čteme kótu tohoto půdorysu. Na hraně v_1' čteme tutéž kótu a vyznačíme na ryse bodem. Tento bod je otočený půdorys A_1' . Stejně učiníme s ostatními body.

Při tomto opatření hran pravítka měřítka není však třeba rýsovat celý otočený půdorys, nýbrž označovat uvedeným způsobem jen jeho body. Abychom nemuseli

otáčet půdorys $A_1B_1C_1D_1$ do polohy $A'_1B'_1C'_1D'_1$, je výhodné otočit předem obraz Dürerovy soustavy do polohy $(O_0 \equiv X, z', h')$, jak ukazuje obr. 58, a narýsovat půdorys $A'_1B'_1C'_1D'_1$ jen jednou v této otočené soustavě. Pomocí pravítka můžeme pak určit hned perspektivu $A_eB_eC_eD_e$. Můžeme postupovat i tak, že považujeme půdorys $A_1B_1C_1D_1$ v soustavě (O_0, z, h) za otočený, při čemž obdržíme perspektivu $A_eB_eC_eD_e$ otočenou o 90° v záporném smyslu. Při poloze soustavy dané v obr. 71 by byly bočné hrany objektu vodorovné. Při použití tohoto tvaru perspektivního pravítka můžeme sestrojít samodružnou přímku x a přímku perspektivity o'' pomocí přístroje a pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka EFG dostatečně velkého.

Konstrukce (obr. 71, 72). Otočíme přístrojem o 180° ze základní polohy uvedené v obr. 71 do polohy uvedené v obr. 72. Přiložíme trojúhelník EFG odvěsnou FG k hraně $M'Q$ perspektivního pravítka, aby byla hrana přepony incidentní se základním bodem Z'' a narýsujeme podél ní přímku $Z''F$ protínající horizont h v bodě O'' . Otočíme přístrojem, aby jeho hrana O_0N byla incidentní s bodem O'' , a narýsujeme podél ní přímku perspektivity o'' . Přiložíme trojúhelník EFG odvěsnou k této hraně perspektivního pravítka, aby vrchol pravého úhlu splyval s bodem O'' , narýsujeme podél druhé odvěsny jednu z polopřímek samodružné přímky x a po odsunutí pravítka ji doplníme.



Obr. 72

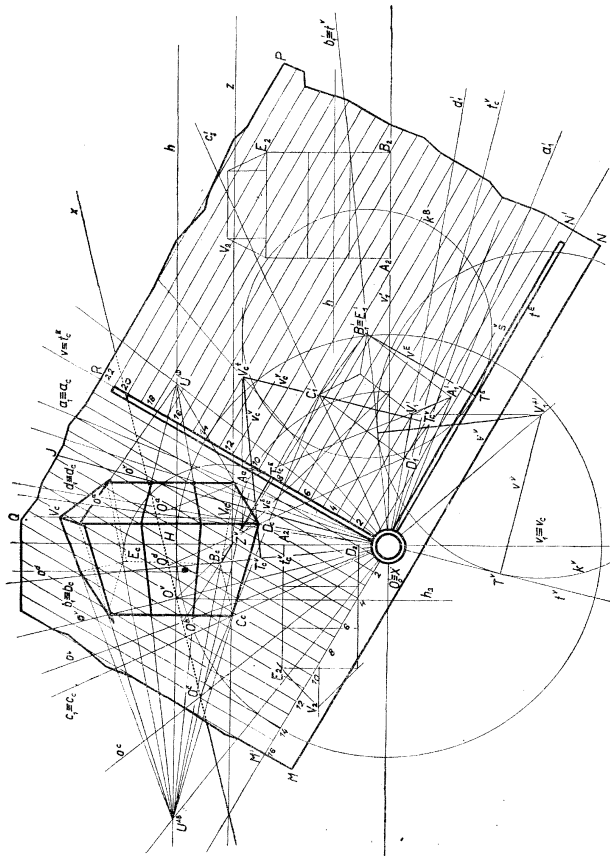
Vrátíme-li perspektivní pravítko do polohy v obr. 71, můžeme vyznačit přímku perspektivity o'' na pravítku.

Abychom mohli sestrojít pohodlně např. perspektivu budovy, a vyznačit na ní vodorovné přímky, je výhodné opatřit přístroj čtvercovou sítí a umístit vhodně nárys budovy, aby byly čitelné nebo odsunovatelné výšky jednotlivých jejích bodů. Je účelné vzít $v_1 \equiv v_e$ za základnici pro nárys a vyznačit nárys h_2 horizontu h , jak ukazuje obr. 71. Z předešlého je patrné, že tento nárys h_2 je incidentní se středem perspektivity O'' , takže h, x, o'' náležejí témuž svazku přímek.

Chceme-li určit perspektivu bočné hrany CR , kolmé k základní rovině v bodu C , přečteme její velikost v nárysu pomocí čtvercové sítě. V obr. 71 je $v = 7$. Otočíme přístrojem, až se vrchol C'_1 stane incidentním s přímkou sítě o kótě 7 na hraně $v_1 \equiv v_e$, a vedeme přímku t'_c podél hrany pravítka $v_1 \equiv v_e$. Vzdálenost perspektivy C_e od této přímky naměřená na kolmici v'_c je velikost C_eR_e perspektivy bočné hrany vrcholem C . Tuto kolmici je třeba narýsovat pomocí pravoúhlého trojúhelníka.

Velikost perspektivy C_eR_e je však možno určit pomocí pravítka. Otočíme jím, aby hrana v'_1 pravítka splynula s rayonem t'_c . Kóta přímky sítě rovnoběžné s v'_1 incidentní s perspektivou C_e je velikost perspektivy hrany CR . Kótu čteme na hraně $v_1 \equiv v_e$.

Určení velikostí perspektiv výšek objektu můžeme zjednodušit. Učiníme toto



Обр. 73

opatření: Rozšíříme perspektivní pravítko, takže nabude tvaru naznačeného v obr. 73. Přitom můžeme původní část pravítka opatřit jen osnovou přímek a taktéž část novou. To je výhoda této nové úpravy.

Jiná výhoda tohoto tvaru je v tom, že nezáleží na poloze přímky perspektivity vzhledem k úhlu otočení, neboť je vždy na pravítku určitelná. U tohoto tvaru lze aplikovat kteroukoli Ω -projekci.

Abychom mohli číst velikost výšek bodů nad základní rovinou ϱ , můžeme u tohoto tvaru umístit nárys dvojím způsobem, jak ukazují obr. 73.

Jde-li o perspektivu E_c bodu E na hraně vrcholem B podstavy předmětu, tedy o perspektivu bočné hrany BE , pro jejíž určení je přístroj v obr. 73 postaven, postupujeme takto:

1. Otočíme přístrojem do základní polohy, tj. aby jeho hrana O_0R splynula s hlavní vertikálou, a čteme výšku $v = 8,3$ bodu E .

2. Otočíme perspektivním pravítkem, až bude bod B'_1 incidentní s přímkou osnovy o kótě 8,3 hrany O_0R a čteme kótu 6,6 přímky druhé osnovy incidentní s perspektivou B_c bodu B , vyznačené na hraně O_0M' . Tato kóta udává velikost hledané perspektivy.

Další výhoda tohoto pravítka je v tom, že není nutno rýsovat rayon l_c^E podél hrany O_0R a není nutno otáčet pravítkem, abychom mohli číst velikost perspektivy hrany, jak bylo nutné u pravítka jednoduchého.

V obr. 73 je vyznačena konstrukce výšky vrcholu V střešního hřebene. Protože je tato výška větší než vzdálenost $O_0V'_1$ (O_0 náleží vnitřku kružnice opsané kolem středu V_1 poloměrem V_1V rovným výšce střešního hřebene), posuneme bod V'_1 rovnoběžně se základnicí $z' \perp z$ do polohy V''_1 . Pro perspektivu výšky $V'_1V^x = V_1V$ platí věta 4,3 první kapitoly: $V''_1V^x = V_{1c}V_c$.

Sestrojíme perspektivu V_c^x a určíme známým způsobem velikost perspektivy kolmice $V''_1V^x = v_c^o$ (obr. 73). ($V_{1c}V_c^x \parallel z$, $O_0V_c^x \perp O_0V''_1$, $v_c^o = V_c^xT_c^o$).

Abychom mohli v případě potřeby přece narýsovat rayon podél hran O_0R ($v_1 \equiv v_c$), $O_0N'(v'_1)$, je třeba vyříznout v pravítku podélnou štěrbinu O_0R , $O_0N'(\delta)$. Těž při rýsování samodružné přímky x způsobem, který byl naznačen v obr. 71, je třeba pomocně štěrbiny δ nebo dostatečně velkého trojúhelníka.

V obr. 73 jsou vyznačeny polohy hran pravítka při určení perspektiv jednotlivých bodů, např. $c_1 \equiv c_c$, o^c při určení perspektivy C_c bodu C . Je zde aplikováno $^2\Omega$ -promítání a otočení půdorysu je provedeno ve smyslu záporném.

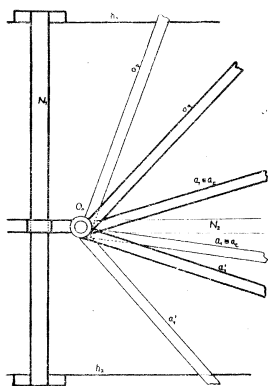
V případě potřeby je možno pravítko rozšířit o další část.

6. Pravítko Nicholsonovo jako jednoduchý perspektograf

Uvážíme-li, že při uvedených konstrukcích přichází stále v úvahu invariantní trojice přímek $v_1 \equiv v_c$, v'_1 , o^o náležící svazku o středu O_0 , můžeme užít trojdílného Nicholsonova pravítka jako cenné pomůcky k rýsování perspektiv. Dvě z jeho ramen slouží jako ramena úhlu otočení, která též často označujeme $a_1 \equiv a_c$, a'_1 , třetí

má úlohu přímky perspektivity o'' příslušící slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ při jejím rozštěpení.

Pravítko je nakresleno ve dvou různých polohách v obr. 74. Tam je též schématicky naznačeno nosné zařízení, aby bylo možno přístrojem pohybovat ve směru



Obr. 74

vodorovném i svislém a aby jej bylo možno umístit kloubem O_0 , který zastupuje střed perspektivní kolíneace, v kterémkoli bodě nákresny. Tohoto zařízení je možno použít i u předešlých mechanismů.

Zavedeme pojem *dotředění* (*centrace*) a *ustavení* přístroje.

Dotředěním přístroje budeme rozumět takové umístění přístroje na rýsovací desce, aby osa otáčení ramen procházela daným bodem nákresny a přitom nepronikala rýsovacím papírem.

Ustavením přístroje rozumíme upevnění jeho ramen v konstantní vzájemné poloze tak, aby jím bylo možno pohybovat (otáčet, příp. posunovat) se zachováním této vzájemné polohy.

Abyste Nicholsonovo pravítko mohlo sloužit jako uvedená perspektivní pomůcka, je třeba několika zařízení. Jsou to:

1. Vhodné spojení s nosným zařízením, aby bylo možno pravítkem otáčet v kloubu $O_0 \equiv X$ a posunovat jím a aby byla otáčivá jednotlivá ramena zvlášť.
2. Zařízení, jímž přístroj dotředíme v daném bodě.
3. Šroubové zařízení v hlavici $O_0 \equiv X$, jímž je možno upevnit ramena v každé jejich vzájemné poloze, tj. ustavovací zařízení. Případně
4. Zařízení, jímž by bylo možno upevnit ramena v úhlu dané velikosti.
5. Hrany pravítek, podél kterých bude rýsováno, musí procházet středem kloubu O_0 jak ukazují obr. 74, 75.

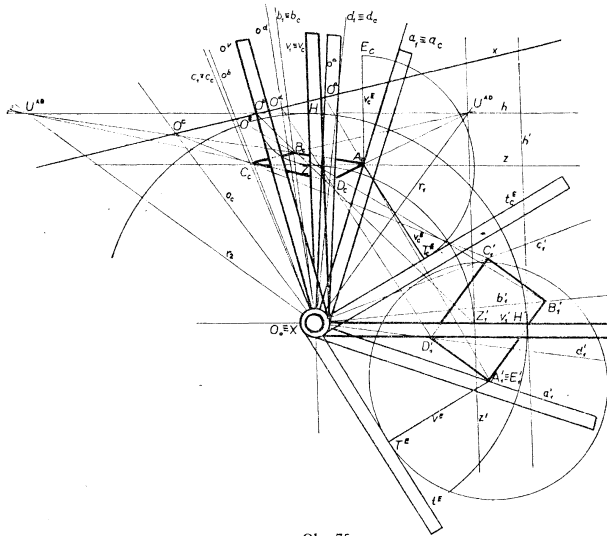
Nechť je dána Dürerova soustava svým obrazem (O_0, z, h) . Aplikujme pro sklápění základní roviny do perspektivní průmětny ${}^2\Omega$ -promítání. Konstrukce perspektivity pozůstává z částečných operací v tomto pořadí:

1. Otočíme danou soustavu kolem středu $O_0 \equiv X$, pro něž platí $HO_0 \perp h$, $HO_0 = d$, o úhel $\gamma = 90^\circ$ do polohy (O_0, z', h') . Hlavní vertikála $HO_0 \equiv v_1 \equiv v_c$ zaujme polohu $H'O_0 \equiv v_1'$. Nakreslíme otočený půdorys obrazce v poloze $A_1'B_1'C_1'D_1'$.
2. Sestrojíme střed perspektivity, přímku perspektivity a samodružnou přímku x : $HO^v \equiv h$, $HO^p \equiv HZ = v$ (v opačném smyslu k otočení γ), $o^p \equiv O_0O^p$, $x \perp O_0O^p$, $x \in O^p$.

3. Dostředíme přístroj ve středu O_0 obrazu soustavy, uvedeme jej do základní polohy, aby hrany dvou ramen byly incidentní s hlavními vertikálami $v_1 \equiv v_c, v'_1$, třetí s přímkou perspektivity o^a a upevníme ramena, aby zachovávala konstantní vzájemnou polohu.

4. Chceme-li sestrojiti perspektivu A_c bodu A , uvolníme zajišťovací zařízení a otočíme přístrojem, až příslušná hrana pravítka v'_1 bude incidentní s otočeným půdorysem A'_1 bodu A a narýsujeme rayony podél hran pravítek $a_1 \equiv a_c, o^a$ (obr. 75).

5. Otočíme pravítkem, aby byla nákrešna volná a vyznačíme průsečík $O^a \equiv o^a . x$. Přímka $O^a A'_1$ vytíná na rayonu a_c hledanou perspektivu A_c bodu A .

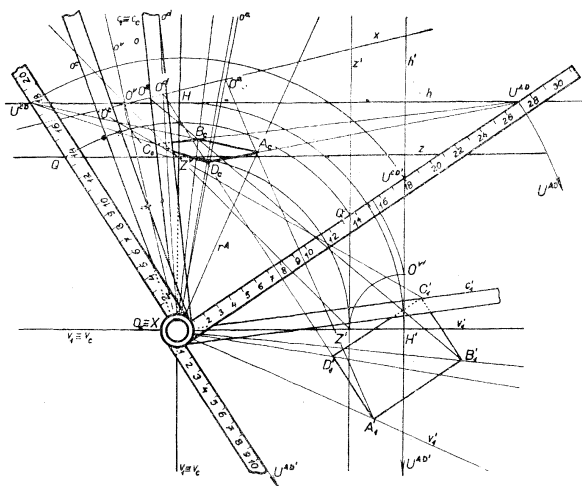


Obr. 75

Pro zjednodušení konstrukce a kontrolu její správnosti sestrojíme úběžníky U^{AB} , U^{AD} přímkou AB, AD . Uvedeme jedno rameno, např. v'_1 , do polohy rovnoběžné se stranou $A'_1 D'_1$, resp. $A'_1 B'_1$ otočeného obdélníka a vedeme rayony r_1, r_2 podél hran obou ramen v'_1, v_c . Jejich průsečíky s horizontem jsou hledané úběžníky. Jelikož hrany otočeného obdélníka a obdélníka v původní poloze jsou střídavě se sebou

rovnoběžné: $A_1'B_1' \parallel A_1D_1$, $A_1'D_1' \parallel A_1B_1$ podle známých vět z planimetrie, jsou úběžníky $U^{AD} \equiv r_1 \cdot h$, $U^{AB} \equiv r_2 \cdot h$.

Jestliže je vrcholem A obdélníka vedena kolmice velikosti $v^A = AE$ k základní rovině g , můžeme sestavit její perspektivu známým způsobem. Při uvedeném tvaru pravítka není však jiné možnosti, než opsat kružnici poloměrem v^A kolem otočeného



Obr. 76

vrcholu A_1' a otočit pravítko tak, aby rameno v_1' bylo tečnou k této kružnici, aby tedy nabylo polohy t^E . Vzdálenost perspektivy A_c bodu A od druhého ramene $v_c \equiv t_c^E$ pravého úhlu je velikost perspektivy výšky v^A . Proto vedeme rayon t_c^E podél hrany v_c a stanovíme vzdálenost $A_c - t_c^E = A_c T_c^E$ a přeneseme na $A_c E_c \perp z$.

Jisté výhody má Nicholsonovo pravítko, jehož hrany opatřime měřítky s nulovým bodem ve středu O_0 , jak ukazuje obr. 76. Zjednodušení konstrukce spočívá též v tom, že není třeba rýsovat obě soustavy (O_0, z, h) , (O_0, z', h') a oba půdorysy obrazce.

Mějme Dürerovu soustavu danou jejím obrazem (O_0, z, h) a půdorys obdélníka, jehož perspektivu vzhledem k vodorovné základnici chceme získat. Narýsujeme zá-

kladnici z' a horizont h' ve svislé poloze, jak je učiněno v obr. 77, a považujeme je za otočené v záporném smyslu.

Pomocí Nicholsonova pravítka obdržíme perspektivu v základní poloze bez základnice a horizontu (v obr. 76 jsou základnice z a horizont h narýsovány). Postup je tento:

1. Předně je nutno přístroj dostředit a ustavit. Ustavení provedeme takto: Naneseme na horizont h' od hlavního bodu H' kladným směrem otáčení (aplikováno ${}^2\Omega$ -promítání) výšku středu O zobrazení, $H'O'' = v$, čímž obdržíme střed perspektivity O'' náležející hlavní vertikále. Ježto je v Dürerově soustavě aplikováno ${}^2\Omega$ -promítání, náleží bod O'' i přímka perspektivity o'' vnitřku úhlu otočení $\sphericalangle v'_1 O'' v_c$. Položíme pravítko $v_1 \equiv v_c$ na hlavní vertikálu otočené soustavy (vpravo), pravítko v'_1 k němu kolmo (dolů) a pravítko o'' tak, aby jeho hrana procházela bodem O'' . V této poloze pravítko ustavíme. Přečteme kótu bodu O'' na pravítku o'' (v obr. 77 je kóta 15,4, pravítko je označeno r'_1 , jednotka je 1,75 mm).

2. Otočíme přístrojem, aby pravítko v'_1 přešlo na místo pravítka $v_1 \equiv v_c$ (do hlavní vertikály). Kóta 15,4 pravítka o'' v této poloze udává bod O'' samodružné přímky x , která je kolmá k hraně tohoto pravítka. Narýsujeme podél ní rayon r_1 a sestrojíme $x \perp r_1$, $x \in O''$.

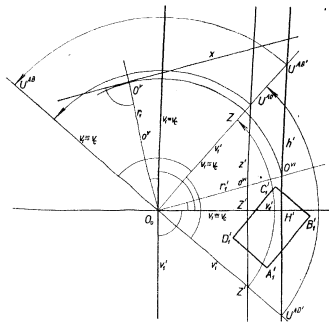
Důkaz správnosti konstrukce plyne ze shodnosti figur, např. v obr. 75.

3. Sestrojíme úběžníky obou směrů stran rovnoběžníka $ABCD$. Otočíme přístrojem aby hrana pravítka v'_1 byla rovnoběžná se stranou $A_1 D_1$ rovnoběžníka a čteme kótu průsečků $U^{AD'}$ hrany tohoto pravítka s horizontem h' (v obr. 77 kóta 19,6). Vytkneme na hraně druhého pravítka $v_1 \equiv v_c$ bod téže kóty a označíme jej na ryse jako bod U^{AD} , úběžník strany AD v hledané perspektivě.

Otočíme dále přístrojem, aby hrana pravítka v'_1 procházela právě určeným úběžníkem U^{AD} , čteme na tomto pravítku kótu 23,0 průsečků $U^{AB'}$ jeho strany s horizontem h' . Vytkneme tutéž kótu na pravítku $v_1 \equiv v_c$ a označíme na ryse tento bod U^{AB} , úběžník směru AB . V obr. 76 je tento úběžník označen U^{CD} , jeho kóta je 18.

Důkaz správnosti a) prvního tvrzení.

Soustava $(O_0: z', h')$ považujeme za otočenou, původní soustava není narýsována (obr. 77 ve srovnání s obr. 76).



Obr. 77

Platí:

$$O_0 U^{AB} \parallel A'_1 B'_1, \quad O_0 U^{AD} \parallel A'_1 D'_1,$$

kde U^{AB} , U^{AD} jsou úběžníky směrů AB , AD na horizontu h' .

Dále platí:

$$\triangle O_0 U^{AD'} H' \cong \triangle O_0 U^{AD} H \quad (\text{usu}),$$

z čehož plyne:

$$O_0 U^{AD'} = O_0 U^{AD}, \quad O_0 H' \parallel h, \quad O_0 H' = d$$

Též platí:

$$O_0 U^{AD} \perp O_0 U^{AD'} \parallel A'_1 D'_1, \quad O_0 U^{AD} \parallel A'_1 B'_1 \parallel A_1 D_1, \text{ cbd.}$$

($A_1 D_1$ je strana obdélníka v původní poloze).

Důkaz správnosti b) druhého tvrzení:

Platí:

$$U^{AB'} \equiv O_0 U^{AD}, h',$$

$$\triangle O_0 H' U^{AB'} \cong \triangle O_0 H U^{AB} \quad (\text{usu}),$$

z čehož plyne:

$$O_0 U^{AB'} = O_0 U^{AB}$$

Dále platí:

$$O_0 U^{AB} \perp O_0 U^{AD} \parallel A'_1 B'_1, \quad O_0 U^{AB} \parallel A'_1 D'_1 \parallel A_1 B_1, \text{ cbd.}$$

4. Sestrojíme perspektivu A_c bodu A (obr. 76). Otočíme přístrojem, aby hrana pravítka v'_1 byla incidentní s vrcholem A'_1 půdorysu obrazce, vedeme rayon r^A podél hrany pravítka v_c a vyznačíme průsečík hrany pravítka o^a se samodružnou přímkou x , $O^a = o^a \cdot x$. Perspektiva A_c je: $A_c \equiv r^A$, $O^a A'_1$.

Perspektivy kolmic k základní rovině q v jejich bodech sestrojíme jako dvě. V obr. 77 jsou přímky $v_1 \equiv v_c$, v'_1 tvořící páry opatřeny obloučky opsanými kolem středu O_0 .

Z uvedených úvah a konstrukcí je patrné, že v strojných úlohách se opakuje řada základních operací a základních úloh tak, jak je tomu vůbec při řešení strojných úloh v deskriptivní geometrii. Všimneme-li si této skutečnosti, můžeme některé tyto úlohy formulovat a vyslovit větu.

Věta 6.1. *Některé základní úlohy při konstrukci perspektiv obrazců incidentních se základní rovinou q Dürerovy soustavy se dají provádět pomocí dvojdílného pravítka prostého, nebo opatřeného měřítka s nulovým bodem v jeho kloubu, nebo opatřeného posuvnými ortogonálními měřítka. – Jsou to např. úlohy:*

1. Sestrojit perspektivu přímky incidentní se základní rovinou dané Dürerovy soustavy.
2. Úloha obrácená, sestrojit přímku roviny q z její perspektivy.
3. Sestrojit perspektivu úsečky na dané přímce incidentní se základní rovinou q .
4. Úloha obrácená, sestrojit skutečnou velikost úsečky.

5. Nanést na danou polopřímku úsečku dané velikosti.
6. Rozdělit danou úsečku na n stejných dílů.
7. Vztýčit nebo spustit v základní rovině kolmici k dané přímce.
8. Sestrojit skutečnou velikost úhlu různoběžek ležících v základní rovině daných perspektivami.

Důkaz správnosti tvrzení provedeme, uskutečnime-li tyto konstrukce.

Úloha 1. *Nechť je dána Dürerova soustava svým obrazem (O_0, z', h') jako v obr. 76. Považujeme ji opět za otočenou v záporném smyslu o úhel $\gamma = 90^\circ$. Budíž dána přímka svým půdorysem a'_1 . Je sestrojit její perspektivu v obvyklé poloze soustavy.*

Konstrukce. Ná základě axiomu o určenosti přímky dvěma body od sebe různými a na základě věty o zachování incidence při promítání sestrojíme perspektivu dvou jejích různých bodů. Výhodné je použít stopníku Z^a přímky a a nevlastního jejího bodu U_∞^a (obr. 78).

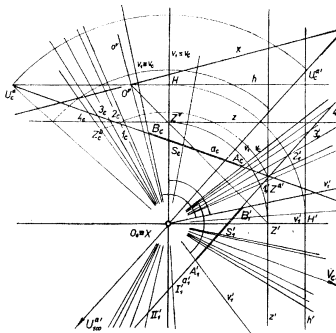
a) Sestrojení perspektivity stopníku Z^a přímky a :

$$\alpha) \quad Z^{a'} \equiv a'_1 \cdot z'.$$

$\beta)$ Sestrojíme přímku $O_0Z^{a'}$, vedeme k ní středem O_0 kolmici a určíme bod $Z^a \equiv Z_c^a$ s ní incidentní,

$$O_0Z^a = O_0Z^{a'}.$$

Důkaz správnosti. Stopník Z^a přímky a incidentní se základní rovinou ϱ je jej společný bod se základnicí z , je to tedy její samodružný bod. Při otočení soustavy ϱ_1 do polohy ϱ'_1 přejde bod Z^a v bod $Z^{a'} = a'_1 \cdot z'$.



Obr. 78

Platí tedy:

$$O_0Z^a = O_0Z^{a'}, \quad O_0Z^a \perp O_0Z^{a'}, \text{ cbd.}$$

b) **Konstrukce** úběžníku U_c^a přímky a .

Sestrojíme rovnoběžku $O_0U_c^{a'}$ s přímkou a'_1 a incidentní se středem O_0 , vytkneme její průsečík $U_c^{a'}$ s horizontem h' a vedeme středem O_0 k přímce $O_0U_c^{a'}$ kolmici $O_0U_c^a$

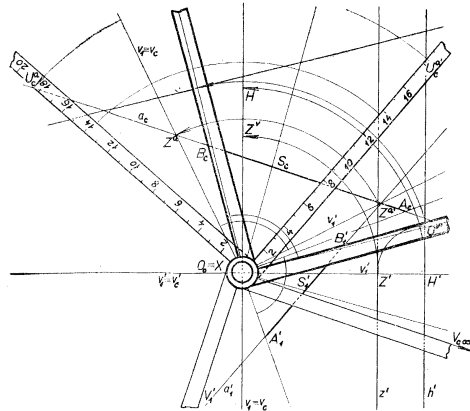
$$O_0U_c^a \perp O_0U_c^{a'}.$$

Na této kolmici určíme bod U_c^a tak, aby bylo

$$O_0U_c^a = O_0U_c^{a'},$$

U_c^a je hledaný úběžník přímky a .

Důkaz. Úběžník U_c^a přímky a incidentní se základní rovinou je bod horizontu h . Jelikož úběžník U_c^a a úběžný bod $U_{1\infty}^a$ jsou v kolíneaci o středu O_0 přiřazené body, leží oba na téže slabě samodružné přímce $O_0U_c^a \parallel a_1$. Po otočení přímky a_1 o úhel $\gamma = 90^\circ$ do polohy a_1' přejde bod $U_{1\infty}^a$ přímky a_1 v bod $U_{1\infty}^{a'}$ přímky a_1' a $a_1' \perp a_1$. Že platí $O_0U_c^a = O_0U_c^{a'}$, bylo dříve dokázáno ($O_0U_c^a \parallel a_1'$, $U_c^{a'} \equiv O_0U_c^{a'} \cdot h'$).



Obr. 79

K sestrojení perspektivity a_c přímky a stačí dvojdílné pravítko opatřené měřítky, jak je naznačeno v obr. 79. Ramena označíme $v_1 \equiv v_c$, v_1' jako hlavní vertikálu po jejím rozštěpení. Příklad dostředíme v bodu O_0 a ustavíme v základní poloze: $v_1' \equiv O_0H'$, $v_1 \equiv v_c \perp O_0H'$ (vzhůru). Otočíme přístroj, až se hrana pravítka v_1' stane incidentní se stopníkem $Z'' \equiv a_1'$. z' a čteme kótu tohoto bodu Z'' hrany v_1' (v obr. 79 je to kóta 10,0). Vyhledáme na rameni $v_1 \equiv v_c$ tuto kótu a označíme bod na rysu. Je to hledaný stopník Z'' .

Podruhé otočíme pravítkem, až se hrana ramene v_1' stane rovnoběžnou s otočenou přímkou a_1' , určíme společný bod této hrany s horizontem h' a čteme jeho kótu (v obr. 79 kóta 18,3). Vyhledáme na rameni $v_1 \equiv v_c$ bod o téže kóte 18,3 a vyznačíme jej na rysu. Podle konstrukce, jejíž správnost byla dříve prokázána, je to úběžník U_c^a přímky a . Perspektiva přímky a je pak dána:

$$a_c \equiv Z''U_c^a.$$

Je zřejmé, že perspektivu přímky $a \in \varrho$ sestrojíme pomocí dvou otočení přístroje a dvou párů odečtení kót za předpokladu, že je naryšována přímka $O_0 U_{1\infty}'' \parallel a_1'$ incidentní se středem O_0 . Platí následující věta.

Věta 6.2. *Perspektivu další přímky incidentní se základní rovinou můžeme sestrojit pomocí dvou otočení (nastavení) přístroje a jednoho páru odečtení. Perspektivu přímky třetí a další už jen pomocí dvou otočení přístroje.*

Důkaz (obr. 80). Nechť je dána přímka $p \in \varrho$ Dürerovy soustavy a je sestrojena její perspektiva p_c pomocí jejího stopníku Z^p a úběžníku U_c^p , jak bylo učiněno v obr. 78. Nechť je dále dána přímka g otočeným půdorysem g_1' (obr. 80). Její dva body vhodné pro konstrukci její perspektivy g_c jsou stopník Z^g a její společný bod R s přímkou p :

$$Z_c^g \equiv Z^g, \quad O_0 Z^g = O_0 Z^p, \quad R_1' \equiv p_1' \cdot g_1'.$$

Perspektiva stopníku Z^g je sestrojena pomocí otočení a páru odečtení kót, kdežto perspektiva R_c průsečíku R je na základě věty o zachování incidence při promítání sestrojena pomocí jednoho otočení přístroje.

Perspektiva další přímky t , která je dána oběma svými průsečíky s přímkami p, g ($T \equiv p \cdot t, Q \equiv g \cdot t$), je určena jen dvěma otočeními (nastaveními) přístroje.

Stejně je tomu při konstrukci další přímky, cbd.

Úloha 2. a) *Je sestrojít půdorys p_1 přímky $p \in \varrho$, je-li dána její perspektiva p_c stopníkem Z^p a úběžníkem U_c^p .*

Řešení této úlohy vyplývá z řešení úlohy 1. Předně je patrné, že platí tato věta.

Věta 6.3. *Dürerova soustava je dána středem O_0 a perspektivou p_c přímky $p \in \varrho, p_c \equiv Z^p U_c^p$.*

Důkaz. Nechť je dán střed O_0 a perspektiva $p_c \equiv Z^p U_c^p$ přímky p . (obr. 81). Podle řešení úlohy 1a) je

$$O_0 Z^p = O_0 Z^{p'}, \quad O_0 Z^p \perp O_0 Z^{p'}.$$

Základnice $z(z')$ je incidentní se stopníkem Z^p ($Z^{p'}$) a má známou polohu. Dále platí:

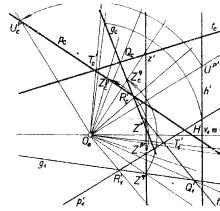
$$O_0 U_c^{p'} = O_0 U_c^p, \quad O_0 U_c^{p'} \perp O_0 U_c^p.$$

Horizont h' je incidentní s úběžnicí $U_c^{p'}$ a je rovnoběžný se základnicí z' .

Tim je dána Dürerova soustava, cbd.

Lze dokázat, že tato věta je speciální případ obecnější věty.

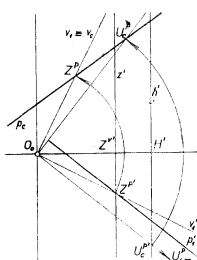
Věta 6.4. *Dürerova soustava je dána středem O_0 a dvěma páry přiřazených bodů: $A_1, A_c; B_1, B_c$.*



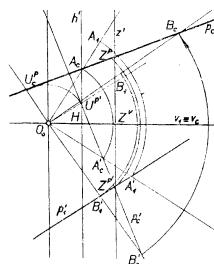
Obr. 80

Důkaz. Necht je dán střed O_0 a uvedené body (obr. 82). Přímka $A_c B_c \equiv p_c$ je perspektiva přímky $p \equiv AB$, $p_1 \equiv A_1 B_1$ je její půdorys. Bod s oběma incidentní je stopník Z^p přímky p , s nímž je incidentní základnice z , jejíž poloha je známa. Úběžník U_c^p přímky p , s nímž je incidentní horizont h , je dán vztahy:

$$O_0 U_c^p \parallel p_1, \quad U_c^p \in p_c; \text{ cbd.}$$



Obr. 81



Obr. 82

V obr. 82 jsou sestrojeny průměty i v otočení a pomocí nich jsou určeny Z^p a U_c^p . Jestliže je přímka p dána stopníkem Z^p a úběžníkem U_c^p , jsou tím dány dva páry přiřazených bodů, $Z^p \equiv Z_c^p U_c^p \rightarrow U_c^p$.

Konstrukce pomocí perspektivního dvojdílného pravítka opatřeného měřítky (obr. 81).

1. Otočíme pravítkem, aby hrana ramene $v_1 \equiv v_c$ byla incidentní s perspektivou Z^p a vedeme podél hrany ramene v_1 rayon. Přečteme kótu perspektivy Z^p a vytkneme tutéž kótu na pravítku v_1 a naznačíme na papíře rysu bod, stopník Z^p .

2. Totéž učiníme pro úběžník U_c^p a označíme bod, úběžník U_c^p .

3. Sestrojíme svislou přímku, základnici z' incidentní se stopníkem Z^p a horizont h' incidentní s úběžníkem U_c^p .

4. Pomocí některého ramene pravítka sestrojíme přímku $O_0 U_c^p$ určující směr otočeného půdorysu p_1 , který je incidentní se stopníkem Z^p . Je tedy určen takto: $p_1 \in Z^p$, $p_1 \parallel O_0 U_c^p$.

b) Je sestrojít otočený půdorys p_1 přímky p , je-li dána její perspektiva p_c dvěma body A_c, B_c .

Jak je známo ze základů perspektivního promítání, nejsou svými průměty uvedené body určeny. Bude tomu tak teprve tehdy, budou-li dány jejich nositelky. Musí být tedy dána Dürerova soustava tak, jak je tomu v obr. 83. Je dána opět v otočené poloze (O_0, z', h').

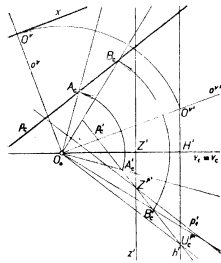
Perspektiva $p_c \equiv A'_c B'_c$ určuje na základnici z' stopník Z^p přímky p , s kterým

je incidentní její půdorys p'_1 , na horizontu h' určuje její úběžník U'_c . Pro otočení půdorys platí, jak bylo dříve uvedeno, $p'_1 \parallel O_0 U'_c$.

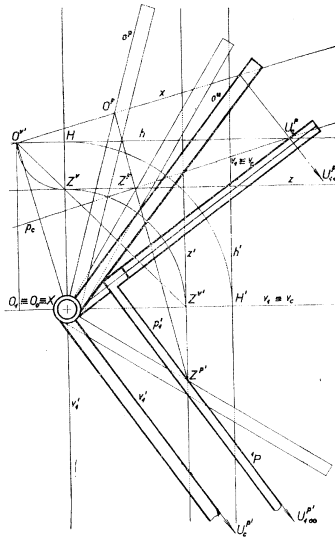
Konstrukce. Postavíme perspektivní pravítko jako při řešení úlohy a) a určíme obě otočené perspektivy A'_c, B'_c udávající otočenou perspektivu $p'_c \equiv A'_c B'_c$. Ta vytíná na základnici z' stopník Z'' , na horizontu h' úběžník U''_c .

Položíme hranu některého pravítka úběžníkem U''_c a sestrojíme přímku $O_0 U''_c$. Rovnoběžka stopníkem Z'' je hledaný otočený půdorys p'_1 přímkou p .

Řešení obou úloh uvedených vyžaduje sestrojení rovnoběžky s danou přímkou $O_0 U''_c$, incidentní s daným bodem Z'' . I tuto část úkolu



Obr. 83



Obr. 84

však lze mechanizovat připojením pomocného pravítka 1P posuvného po rameni $v_1 \equiv v_c$ (obr. 84).

V tomto obraze je naznačeno sestrojení otočeného půdorysu $p'_1 \parallel O_0 U''_c$. Přístroj postavíme tak, aby hrana pravítka v'_1 byla incidentní s úběžníkem U''_c , posuneme pravítkem 1P , až se jeho hrana stane incidentní se stopníkem Z'' , a narysujeme podél této hrany otočený půdorys p'_1 .

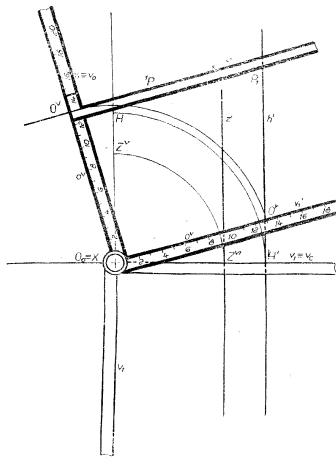
V obr. 85 je naznačeno sestrojení samodružné přímky x pomocí posuvného pravítka 1P při otočení $\gamma = 90^\circ$.

I při konstrukci perspektivy $p'_c(a_c)$ přímkou $p(a)$ uijeme tohoto dvojdielného perspektivního pravítka s posuvným pravítkem 1P (obr. 84). Postavíme přístroj tak, aby

hrana pravítka 1P splynula s otočeným půdorysem $p'_1(a'_1)$. Hrana pravítka v'_1 udává na horizontu h' otočený úběžník U_c^p přímky p . Druhé pravítko $v_1 \equiv v_c$ určuje úběžník U_c^p podle vztahu $O_0U_c^{p'} = O_0U_c^p$.

Úloha 3. Je sestrojiti perspektivu úsečky AB incidentní se základní rovinou q .

Při řešení této úlohy je třeba nejprve sestrojiti perspektivu A_cB_c nositelky této úsečky, přímky AB , podle řešení úlohy 1 (obr. 78). Perspektivu A_cB_c úsečky AB



Obr. 85

sestrojíme pomocí prostého dvojdielného perspektivního pravítka. Postavíme pravítko tak, aby hrana ramene v'_1 byla incidentní s půdorysem A'_1 , resp. B'_1 krajních bodů půdorysu úsečky a vyznačíme na hraně druhého ramene jejich perspektivu A_c , resp. B_c .

V obr. 78 je sestrojen střed S úsečky AB a ekvidistantní body $B, I, 2, 3, \dots$. Přímky označující vzájemnou polohu pravítek při konstrukci jsou opatřeny obloučky se středem O_0 .

Úloha 4. Je sestrojiti skutečnou velikost úsečky AB incidentní se základní rovinou q určené perspektivním průmětem A_cB_c (obr. 78, 86).

Nositelka úsečky, přímka AB , je určena podle úlohy 2 různým způsobem. Sestrojíme-li otočený půdorys $A'_1B'_1$ této nositelky, určíme skutečnou velikost $A'_1B'_1$ úsečky AB

dvojnásobným nastavením pravítka. Přitom je hrana ramene $v_1 \equiv v_c$ incidentní s perspektivou A_c , resp. B_c , hrana ramene v'_1 udává na p'_1 krajní body A'_1 , resp. B'_1 skutečné velikosti úsečky AB .

Je třeba připomenout, že oba krajní body perspektivy A_cB_c úsečky AB by mohly být případně oddělovány úběžníkem U_c^p . Jelikož je úběžník U_c^p perspektiva nevlastního bodu U_∞^p , je třeba udat perspektivy A_c, B_c obou bodů A, B na téže polopřímce určené na přímce p_c jejím úběžníkem U_c^p .

V obr. 86 je sestrojen otočený půdorys q'_1 přímky q a její úsečky SQ , kde S je střed úsečky AB a $p_c \perp q_c$.

Úloha 5. Je dán obraz Dürerovy soustavy (O_0, ε', h') v otočení. Její základní rovina obsahuje přímku a danou půdorysem a'_1 a bod $A'_1 \in a'_1$. Je nanést v perspektivě na polopřímku $B1$ počínajíc jejím krajním bodem B úsečku dané velikosti (obr. 78).

Můžeme případně žádat konstrukci ekvidistantních bodů $B, I, 2, 3, \dots$ na přímce a . Tato úloha je v podstatě úloha 3. Je proveditelná prostým dvojdílným perspektivním pravítkem jednoduše, pouhým otáčením přístroje. Řešení pozůstává ze tří částí.

- Sestrojení perspektivy $A_c B_c$ přímky AB podle úlohy 1.
- Nanesení dané úsečky AB na polopřímku AZ^a , případně určení ekvidistantních bodů $B, I, 2, 3, \dots$ na půdorysu a_1 přímky a počínajíc bodem B .
- Určení perspektiv $B_c, I_c, 2_c, 3_c, \dots$ těchto bodů. Provedeme to tím, že otáčíme přístrojem, až se hrana ramene v_1 stane incidentní po řadě s body $B, I, 2, 3, \dots$ a určíme v průsečících hrany ramene $v_1 \equiv v_c$ s perspektivou a_c přímky a perspektivy hledaných bodů $B_c, I_c, 2_c, 3_c, \dots$

Úloha 6. Podobně řešíme úlohu 6, v níž máme rozdělit úsečku AB incidentní se základní rovinou q danou perspektivním průmětem $A_c B_c$ na n stejných dílů.

V obraze soustavy (O_0, z, h) sestrojíme podle úlohy 2 otočený půdorys $A_1' B_1'$ přímky AB a rozdělíme $A_1' B_1'$ na n stejných dílů. Jako v úloze 5 sestrojíme perspektivy jednotlivých dělicích bodů.

V obr. 78 je sestrojena perspektiva středu S úsečky AB .

Úloha 7. Vztyčit nebo spustit z daného bodu kolmici k dané přímce, jsou-li obě incidentní se základní rovinou.

Řešení úlohy pozůstává z dvojí aplikace úlohy 1 případně i úlohy 2.

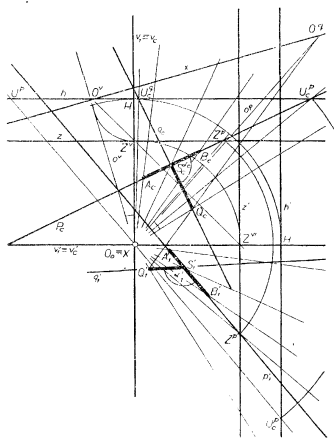
Úloha 8. Určit skutečnou velikost úhlu různoběžek p, q incidentních se základní rovinou q a daných perspektivami p_c, q_c .

Řešení úlohy pozůstává z dvojí aplikace řešení úlohy 2 (obr. 86).

Úloha 9. Sestrojit perspektivu úsečky dané velikostí kolmé k základní rovině q v daném jejím bodě.

Řešení již bylo popsáno na str. 108. Bylo provedeno pomocí dvojdílného perspektivního pravítka a dalšími způsoby, které byly uvedeny dříve u různých druhů perspektivních přístrojů.

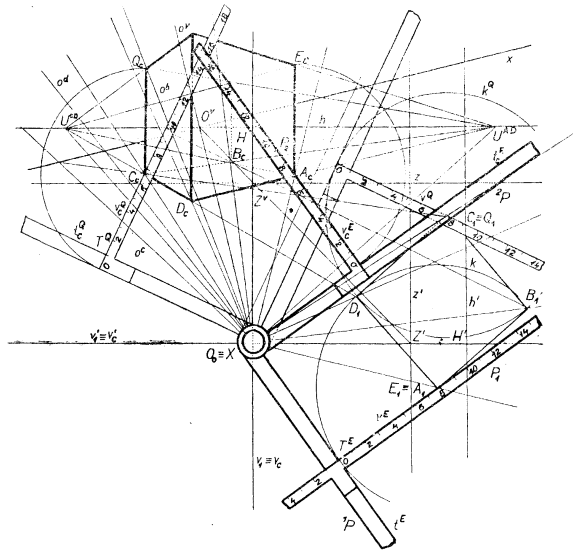
Nicholsonovo pravítko není dost výhodné pro konstrukci perspektiv kolmic



Obr. 86

k základní rovině q . Při konstrukci je nutno střídát různé nástroje, např. kružítka s trojúhelníkovými pravítky a s přístrojem samým, a tím se stává konstrukce zdlouhavou a namáhavou.

Je možno navrhnout užití pomocných pravítek P_1, P_2 posuvných po ramenech ${}^1P, {}^2P$ dvojdílného pravítka a opatřených měřítky s nulovým bodem na hranách ramen (obr. 87). První pravítko P_1 slouží k takovému postavení přístroje, aby hrana pravítka



Obr. 87

${}^1P \equiv v_1'$ byla vzdálena od otočeného půdorysu uvažovaného bodu incidentního se základní rovinou q o velikost dané kolmice vztyčené v tomto bodě k základní rovině. Přitom vzdálenost perspektivy uvažovaného bodu od druhého ramene ${}^2P \equiv v_1 \equiv v_c$ pravoúhlého pravítka udává velikost perspektivy této výšky, která se měří na pravítku druhém P_2 .

Konstrukce velikosti perspektivy kolmice AE vztyčené v bodě A k základní rovině se provede takto:

1. Právítko dobře dostředíme a zajistíme, aby vzájemná poloha ramen byla pevná. Otočíme přístrojem a posuneme pravítkem P_1 tak, aby jeho kóta shodná s velikostí výšky bodu E na hraně vztyčené v bodě A splynula s půdorysem A_1 bodu A . Tím přejde rameno 1P do polohy l^E , rameno 2P do polohy l_c^E a posuvné pravítko P_1 do polohy v^E .

2. Posuneme pravítkem P_2 tak, aby se jeho hrana stala incidentní s perspektivou A_c bodu A . Tím přejde pravítko P_2 do polohy v_c^E a kóta bodu A_c určuje velikost perspektivy úsečky AE na kolmici vztyčené v bodě A k základní rovině q .

V obr. 87 je velikost bočné hrany zobrazovaného kvádrů $AE = 7,7$, velikost její perspektivy $A_cE_c = 7,0$. Perspektivní pravítko je v tomto obraze umístěno též v poloze určující velikost perspektivy bočné hrany CQ kolmé k základní rovině v bodě C . Velikost bočné hrany je tatáž, velikost její perspektivy C_cQ_c je 6,3.

Z těchto konstrukcí velikosti perspektiv bočných hran objektu je vidět, že na jednom z pravítek čteme kóty uvnitř pravého úhlu obou ramen dvojdílného pravítka, na druhém pak vně tohoto úhlu nebo obráceně. Proto si nemohou pravítka navzájem překážet. Pro případ potřeby odčítání kót pravítek P_1, P_2 na různých stranách ramen přístroje je možno zhotovit obě pravítka jako pravítka překládná.

7. Celuloidový perspektograf tvaru polokruhu

S perspektivním pravítkem, o němž bylo pojednáno v § 2, souvisí perspektograf znázorněný v obr. 88, konstruovaný při aplikaci 1Q -promítání v Dürerově soustavě dané obrazem (O_0, z, h) . Má některé výhody, např. tu, že jím lze otáčet obraze incidentní se základní rovinou q , perspektivy kolmic k základní rovině je možno rýsovat jednoduše atd.

Pravítko je celuloidová deska tvaru polokruhu vyztužená ve středu $O_0 \equiv X$ a opatřená úzkým výřezem s podél přímky $v_1 \equiv v_c$, která dělí desku na dva čtvrtkruhy, O_0GF, O_0EG . Obě části jsou opatřeny osnovou přímkou l ve směru hrany O_0F . Číslování přímek osnovy je udáno na hraně $v_1 \equiv v_c$. Část O_0EG je opatřena ortogonální osnovou přímkou h , jejichž číslování je udáno na hraně O_0E .

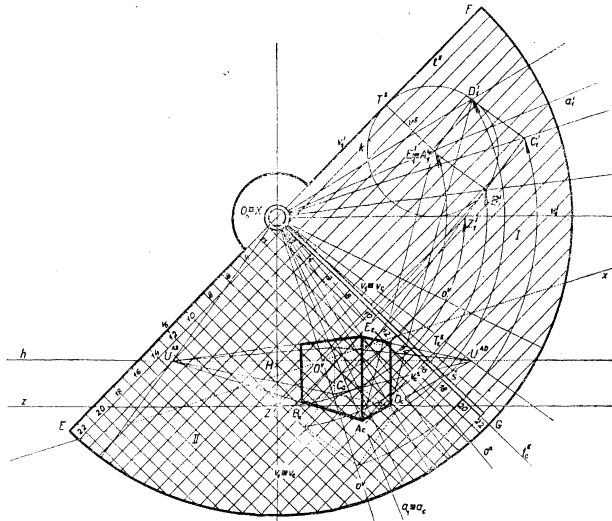
V obr. 88 je sestrojena perspektiva krychle s podstavou $ABCD$ v základní rovině q . Konstrukci rozdělíme na pět částí:

1. Provedeme dostředění přístroje.
2. Určíme přímku perspektivity o'' na pravítku a samodružnou přímku x na rýsovacím papíru.
3. Sestrojíme otočený půdorys $A_1B_1C_1D_1$ podstavy $ABCD$.
4. Sestrojíme její perspektivu $A_cB_cC_cD_c$.
5. Určíme perspektivy bočných hran kolmých k základní rovině q .

Provedení.

1. Jako dříve.
2. Přímku perspektivity o'' a samodružnou přímku x sestrojíme takto: Určíme na papíře rysy střed perspektivity O'' , $HO'' = HZ'' = v$. Jelikož je v dané Dürerově

soustavě aplikováno ${}^1\Omega$ -promítání, náleží střed perspektivity O^o příslušný hlavní vertikále podle věty 4,11 vnitřku úhlu $\sphericalangle v_1' O_0 v_c$. Proto nanese výšku středu zobrazení $v = HZ'$ od hlavního bodu H v kladném smyslu horizontu h . Otočíme pravítkem tak, aby jeho hrana $v_1 \equiv v_c$ splynula s hlavní vertikálou O_0H téhož pojmenování a vyznačíme na pravítku přímkou perspektivity $o^o \equiv O_0O^o$. Abychom sestrojili samodružnou přímkou x na papíře rysu, otočíme přístrojem tak, aby jeho hrana



Obr. 88

$v_1 \equiv v_c$ byla incidentní se středem perspektivity O^o . Vytkneme přímkou soustavy I incidentní se středem perspektivity O^o a vyznačíme její body na kruhové hraně pravítka vlevo i vpravo. Odsuneme pravítko a spojíme oba body samodružnou přímkou x .

V případě, že je i čtvrtkruh O_0GF opatřen osnovou II , není třeba nanášet výšku středu zobrazení na horizont, $v = HO^o$. Pomocí měřítka na hranách v_1' , $v_1 = v_c$ je možno vyznačit hned na pravítku střed perspektivity O^o a taktéž přímkou perspektivity o^o .

3. Otočený půdorys $A'_1B'_1C'_1D'_1$ můžeme sestrojít buď z půdorysu $A_1B_1C_1D_1$ nebo přímo v otočené poloze s ohledem na otočenou základnici z' a horizont h' , pro které platí: $z' \parallel h' \perp z \parallel h$, $O_0Z'' = O_0Z^v$, $O_0H' = O_0H$, jak tomu bylo v řadě dříve uvedených rysů.

V prvním případě otočíme pravítkem tak, aby se hrana v_0 stala incidentní s půdorysem A_1 bodu A a čteme jeho kótu na měřítku této hrany. Narýsujeme přímkou podél hrany $v_1 \equiv v_c$ v štěrbině f a vyznačíme na ní bod A'_1 téhož čtení na hraně $v_1 \equiv v_c$. To učiníme se všemi vrcholy půdorysu $A_1B_1C_1D_1$.

4. Sestrojíme známým způsobem perspektivy $A_c, B_c, C_c, D_c \dots$ jednotlivých bodů podstavy, a to u každého bodu dvojnásobným nastavením přístroje, vedením dvou rayonů a sestrojením přímkou dané dvěma body.

5. Perspektivu výšky $AE \perp \varrho$ sestrojíme, jak je známo z předešlých úvah, takto: Otočíme pravítkem tak, aby bod A'_1 byl incidentní s přímkou osnovy I o kóte rovné skutečné velikosti úsečky AE . Kóta přímkou osnovy II incidentní s perspektivou A_c bodu A řeší úkol, tj. udává velikost perspektivy hrany AE .

V obr. 88 je přístroj naznačen v poloze určující právě perspektivu A_cE_c kolmice $AE = v^k$ k základní rovině ϱ , $AE = 5$, $A_cE_c = 6,4$.

IV. POZNÁMKY K MECHANICKÝM KONSTRUKCÍM ROVNOBĚŽNÝCH PROJEKCIÍ

1. Pravoúhlá afinní pravítka

Z deskriptivní geometrie je známo, že zobrazení základní roviny ϱ do perspektivní průmětny metodou středového promítání není bez výjimek, jsou-li obě roviny eukleidovské. Tyto výjimky je možno odstranit rozšířením obou rovin i celého prostoru na roviny, resp. prostor projektivní (rozšířený eukleidovský prostor) zavedením nevlastních prvků, rovnocenných s prvky vlastními.

Po tomto opatření je možno uvažovat Dürerovu soustavu perspektivního promítání, je-li

- a) střed O_∞ bod nevlastní,
- b) základnice z_∞ přímka nevlastní.

Oba případy byly uvažovány v článku [7]. Bylo tam pojednáno

- a) o rovnoběžném promítání,
- b) o homotetii

a byly uvedeny některé mechanické pomůcky navržené na základě rozšíření affinity a homotetie. Bylo uvedeno celkem sedm případů rovnoběžného promítání v Dürerově soustavě. V čtyřech případech zobrazení degeneruje, v ostatních třech případech je regulární a má význam v technické praxi. Tyto případy nastanou, je-li směr promítání, kolmý k základnici, rovnoběžný s některou rovinou souměrnosti ω , kolmý k základ-

nici nikoli rovnoběžný s rovinou ω a konečně nemá-li žádnou z uvedených šesti poloh.

Aby vynikla souvislost rovnoběžných projekcí s projekcí perspektivní, budeme i v Dürerově soustavě rovnoběžného promítání mluvit o perspektivě A_c bodu A apod.

I v případě Dürerovy soustavy rovnoběžného promítání můžeme zavést pojmy známé z perspektivního promítání. Je to předně pojem Ω -promítání, kosohlého vzhledem k základní rovině ϱ a perspektivní průmětně π a ortogonálního k jejich rovině souměrnosti a nahrazujícího sklopení základní roviny kolem základnice do průmětny π . Dá se dokázat, že platí *Stevinova věta*, podle které je mezi Ω -průmětem základní roviny ϱ do perspektivní průmětny a perspektivou základní roviny perspektivně kolineární vztah o nevlastním středu $O_{0\infty}$ (Ω -průmět středu O_∞ do perspektivní průmětny π). Je to známý vztah perspektivně afinní. Lze ukázat, že tento vztah je ekvivalentní Dürerově soustavě rovnoběžného promítání.

Lze dále ukázat, že je možno zavést další pojmy, jako je pojem *rozštěpení* obrazu Dürerovy soustavy (perspektivní afinity s osou v základnici z) otočením některého z rovinných poli ϱ_1, ϱ_c kolem středu $O_{0\infty}$. Toto otočení přechází v uvažované Dürerově soustavě v posuvnosti libovolné velikosti podél základnice z a je určeno rozštěpením vyčtené slabě samodružné přímky $a_1 \equiv a_c$ dané perspektivní afinitou. Při tomto rozštěpení platí základní věta obdobná větě 2,3 v pojednání [7] o perspektivnosti bodových řad na přímkách a_c, a'_1 (resp. a_1, a'_c). Mluví se v ní též o *středu jejich perspektivity* O^s a o *přímce perspektivity* o^s přiřazených slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$, a o *samodružné přímce* splývající se základnicí z . Dále je uveden pojem *invariantní trojice přímek* a_c, a'_1, o^s , atd.

Jako první je v pojednání [7] uvažována Dürerova soustava, v níž je směr promítání kolmý k základnici z a rovnoběžný s rovinou souměrnosti ${}^1\omega, {}^2\omega$. Je ukázáno, že její obraz je identita nebo ortogonální osová souměrnost, je-li aplikováno ${}^1\Omega$ -promítání, resp. ${}^2\Omega$ -promítání. Je sestrojena perspektiva $A_c B_c C_c \dots$ obrazce $ABC \dots$ incidentního se základní rovinou ϱ , tj. obraz $A_c B_c C_c \dots$ souměrně položeného k obrazu $A_1 B_1 C_1 \dots$ podle základnice z . Na základě této konstrukce, která je speciálním případem Fresnayovy konstrukce perspektiv, je navržen jednoduchý *symetrograf*. Jeho konstrukce je patrná z obr. 9 článku [7].

Při konstrukci perspektivy $A_c B_c C_c \dots$ obrazce $ABC \dots$ incidentního se základní rovinou ϱ daného jeho ${}^1\Omega$ -průmětem $A_1 B_1 C_1 \dots$ sestrojíme perspektivy jeho vrcholů. Je-li tedy sestrojít např. perspektivu C_c , bodu C , počínáme si takto: 1. Posuneme ${}^1\Omega$ -průmět (půdorys) $A_1 B_1 C_1 \dots$ obrazce o daný vektor \vec{p} do polohy $A'_1 B'_1 C'_1 \dots$

2. Posuneme pravítkem po základnici z tak, aby hrana ${}^1P'(c'_1)$ se stala incidentní s bodem C'_1 a narýsujeme podél hrany ${}^1P'(c_1 \equiv c_c)$ přímku a označíme střed perspektivity $O^s \equiv P' \cdot z$.

3. Odsuneme přístroj a narýsujeme přímku $C'_1 O^s$, která určuje na $c_1 \equiv c_c$ hledanou perspektivu $C_c \equiv (c_1 \equiv c_c) \cdot C'_1 O^s$.

V případě, že jsou dolní části pravítek opatřeny měřítky, jak je nakresleno v obr. 9

[7], není třeba posunovat obrazec $A_1B_1C_1 \dots$ do polohy $A'_1B'_1C'_1 \dots$. Postup při rýsování perspektivy C_c bodu C je tento:

1. Postavíme přístroj tak, aby jeho hrana 1P byla incidentní s půdorysem C_1 .
2. Vedeme rayon podél hrany ${}^1P \equiv c_c$; přečteme kótu bodu C_1 a označíme na hraně pravítka 1P bod C'_1 téže kóty (v obr. 9 [7] je to kóta 4,9) a označíme na základnici $z \equiv x$ střed perspektivity $O^c \equiv o^c \cdot z$.

3. Odsuneme pravítko a narysujeme přímkou C'_1O^c , která určuje na rayonu c_c perspektivu C_c bodu C .

Platí $M_1C_1 = M_1C_c$.

Jestliže je aplikováno ${}^2\Omega$ -promítání při téže poloze středu O_ω , pak jsou obě rovinné soustavy ϱ_1, ϱ_c totožné. Střed perspektivity O^a příslušný slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ je nevlastní bod základnice, příslušná přímka perspektivity o^a je nevlastní přímka roviny identity, samodružná přímka x přechází v nevlastní bod základnice z .

Jako šestá je v pojednání [7] uvažována Dürerova soustava, v níž je směr promítání kolmý k základnici, nikoli však rovnoběžný s některou rovinou souměrnosti ω . Její obraz je ortogonální afinita o ose v základnici z charakteristiky kladné nebo záporné podle aplikované Ω -projekce.

Na základě vlastností této ortogonální afinity a pomocí dříve zavedených pojmů můžeme sestrojit perspektivu $A_cB_cC_c \dots$ obrazce $ABC \dots$ incidentního se základní rovinou ϱ , tj. můžeme sestrojit obraz ortogonálně afinní k jeho průmětu $A_1B_1C_1 \dots$ do perspektivní průměty π . Konstrukce je v článku [7] provedena (obr. 12).

V téže práci je uvedeno zmechanisování konstrukce a je navrženo jednoduché afinní pravítko z lepenky nebo celuloidu, sestrojené pro obvyklý směr rovnoběžného promítání, kdy je střed O_ω incidentní s kvadrantem ohraničeným kladnými polovinami rovin π, ϱ při aplikaci ${}^1\Omega$ -promítání. Při rýsování perspektivy $A_cB_cC_c \dots$ obrazce $ABC \dots \in \varrho$ si počínáme takto:

1. Vedeme pomocí příloženého pravítka P rovnoběžky $A_1A'_1, B_1B'_1, \dots$ se základnicí z incidentní s vrcholy půdorysu $A_1B_1C_1 \dots$

2. Postavíme afinní pravítko opěrnou částí $GFLK$ na pevně přiložené nebo jiné pravítko P umístěné pod půdorysem, jak je ukázáno v obr. 12 [7], a posuneme jím, aby se jeho hrana $a_1 \equiv a_c$ stala incidentní s půdorysem A_1 bodu A a vedeme rayon podél této hrany.

3. Vyznačíme dva body, průsečík A'_1 hrany a'_1 s rovnoběžkou $A_1A'_1 \parallel z$ a bod P^a na horní hraně pravítka a na přímce perspektivity o^a . Proto je pravítko opatřeno na své horní části výběžkem.

4. Nato posuneme pravítkem, aby jeho hrana $a_1 \equiv a_c$ byla incidentní s bodem P^a a vedeme rayon protínající samodružnou přímkou $x = z$ ve středu perspektivity O^a perspektivních řad a_c, a'_1 .

5. Odsuneme pravítko a sestrojíme přímkou A'_1O^a , která protíná rayon a_c v hledané perspektivě A_c bodu A .

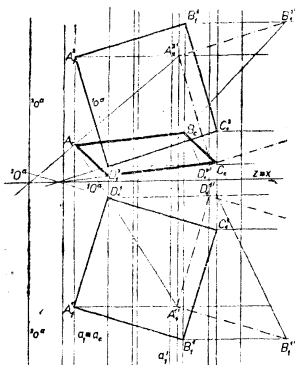
Perspektivy ostatních bodů získáme obdobně. V obr. 12 [7] je pravítko v poloze určující perspektivu A_c bodu A a perspektivu C_c bodu C .

Z konstrukce je patrné, že je perspektiva bodu určena bez posouvání půdorysu $A_1B_1C_1 \dots$ rýsováním tří rayonů, tři označení bodů a sestrojením přímky určené dvěma body.

Popsaný tvar pravítka je možný, je-li přímka perspektivity incidentní s rovinným pásem ohraničeným přímkami $a_1 \equiv a_c, a'_1$. V případě, že je vně pásu, je třeba konstrukci přístroje pozměnit (obr. 13[7]). O poloze přímky perspektivity platí věta obdobná větě 4.11 předešlé kapitoly.

Věta 1,1. *Nechť je v Dürerově soustavě 6 střed zobrazení O_∞ v obvyklé poloze. Aplikujeme-li na základní rovinu mimo perspektivní promítání i ${}^1\Omega$ -promítání, náleží přímka perspektivity ${}^1o^a$ rovinnému pásu, jehož hranice jsou přímky $a_1 \equiv a_c, a'_1$.*

Aplikujeme-li ${}^2\Omega$ -promítání, leží přímka perspektivity ${}^2o^a$ mimo tento pás, jak ukazuje obr. 89.



Obr. 89

Důkaz. Správnost výroku vyplývá z věty 4,11 předešlé kapitoly a z jejího důkazu. Věta 1,1 je jejím speciálním případem pro nevlastní střed perspektivního promítání O_∞ . Je však možno provést důkaz správnosti samostatně. V obraze 89 jsou označeny ${}^1\Omega$ -průměty bodů obrazce incidentního se základní rovinou A_1^1, B_1^1, \dots . Po rozštěpení afinity jsou označeny $A_1^{1'}, B_1^{1'}, \dots$. Středem a přímkou perspektivity jsou označeny ${}^1O^a, {}^1O^b, \dots$, resp. ${}^1o^a, {}^1o^b, \dots$. ${}^2\Omega$ -průměty těchže bodů jsou A_1^2, B_1^2, \dots po rozštěpení A_1^2, B_1^2, \dots , středem a přímkou perspektivity pak ${}^2O^a, {}^2O^b, \dots$, resp. ${}^2o^a, {}^2o^b, \dots$.

Obr. 89 ukazuje správnost uvedené věty 1,1. Konstrukci perspektiv popsaným

prvákem je možno zkrátit o konstrukci rovnoběžek A_1A_1', B_1B_1', \dots se základnicí z, opatříme-li hrany $a_1 \equiv a_c, a'_1$ pravítka měřítka se stoupajícími kótami od hrany GF (obr. 13 [7]).

Celuloidové nebo lepenkové pravouhlé afinní pravítko pro aplikaci ${}^2\Omega$ -promítání

Jak bylo uvedeno, náleží střed perspektivity O^a řad a_c, a'_1 a přímka perspektivity o^a při aplikaci ${}^2\Omega$ -promítání vnějšku pásu ohraničeného dvojicí $a_1 \equiv a_c, a'_1$. Proto bude hlavní část *EJRG* pravítka konstruovaného pro tento případ širší než u pravítka předešlého.

Pravítko je znázorněno v obr. 13 [7]. Liší se od předešlého tvaru jednak polohou přímký perspektivity o^a , jednak tím, že je opatřena výřezem podél přímký $a_1 \equiv a_c$ pro rýsování rayonů podél této přímký. Jestliže tuto hranu opatříme měřítkem, a tomu tak v obr. 13 je, odpadne rýsování posunutého půdorysu $A'_1 B'_1 \dots$. Měřítka má nulový bod na prodloužené hraně LK .

Postup při rýsování perspektivy je obdobný jako u přístroje předešlého. Je-li sestrojiti např. perspektivu C_c bodu C , postupujeme takto:

1. Předpokládáme, že konstrukce pravítka odpovídá kvocientu afinity. Posuneme pravítkem po příložníku P , až hrana $a_1 \equiv a_c$ se stane incidentní s půdorysem C_1 a nabude polohy $c_1 \equiv c_c$ a narýsujeme přímký podél této hrany, podél hrany o^a zaujímající polohu o_c a podél hrany a'_1 , která je v poloze c'_1 .

2. Čteme kótu 13,1 bodu C_1 . Posuneme pravítkem, až $c_1 \equiv c_c$ splyne s c'_1 a naznačíme bod C'_1 téže kóty na ryse.

3. Při této poloze pravítka vytkneme na hraně o^a střed perspektivity $O^c \equiv o^c \cdot x \equiv z$.

4. Odsuneme pravítko a narýsujeme přímký $C'_1 O^c$, která vytíná na $c_1 \equiv c_c$ perspektivu C_c bodu C , $C_c \equiv C'_1 O^c \cdot c_c$.

V obr. 13 [7] je přístroj v poloze určující perspektivu A_c a C_c bodu A, C . Je vidět, že ji určíme dvěma nastaveními přístroje, vedením tří rayonů, z nichž jeden můžeme nahradit bodem O^c na základnici $z \equiv x$, dvou čtení a sestrojení přímký dané dvěma body. – Jedno přemístění pravítka je možno eliminovat, jestliže hranu a'_1 opatříme měřítkem shodným s měřítkem na hraně $a_1 \equiv a_c$ s nulovým bodem na přímce LK . Polohu bodu C'_1 můžeme číst při první poloze pravítka (kóta 13,1).

Měřítka na hraně a'_1 je možno nahradit osnovou přímek rovnoběžných se základnicí z vedených jednotlivými body měřítka $a_1 \equiv a_c$.

Opěrná část pravítka však může být někdy na překážku umístění měřítka na hraně a'_1 . Jímá nevýhoda celuloidového, zvláště lepenkového pravítka o pevných hranách $a_1 \equiv a_c$, a'_1 , o^a je v tom, že je upotřebitelné pro afinitu určitého kvocientu $q = A_1 M_1 : A_c M_1$. Při upotřebení pro afinitu různých kvocientů je třeba měnit polohu přímký perspektivity o^a , což se může dít vyznačením na ploše pravítka, zvláště celuloidového, a úpravou postupu při rýsování perspektivy.

Některé tyto nedostatky je možno odstranit pravítkem tyčovým s měřítky na pevné tyči $a_1 \equiv a_c$ a na posuvné tyči a'_1 .

Pravouhlé afinní pravítko tyčové

Pravítko v obr. 14 [7] je konstruováno pro aplikaci ${}^1\Omega$ -promítání, pravítko v obr. 90 pak pro aplikaci ${}^2\Omega$ -promítání.

Části prvního pravítka jsou:

1. Pravouhlé pravítko o částech ${}^1P(a_1 \equiv a_c)$, $P'(z \equiv x)$ tvaru tyče pevně spolu spojených.

2. Po tyči P' se posouvá pravítko ${}^2P(a'_1)$, které je možno upevnit v každé jeho poloze.

3. Po tyči P' se též posouvá index O'' s výřezem pro označení bodu.

Dolní část (resp. horní část) pravítek ${}^1P, {}^2P$ je opatřena měřítky s nulovými body na hraně tyče P' .

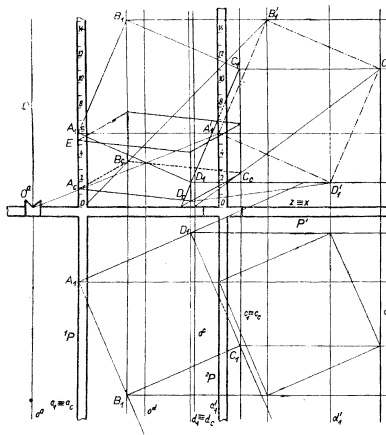
Před rýsováním perspektivy základní roviny ϱ si uvědomíme, že index O'' , zastupující střed perspektivy dvojice a_c, a'_1 , leží při aplikaci ${}^1\Omega$ -promítání uvnitř pásu určeného oběma tyčemi a_c, a'_1 a půdorys $A_1 B_1 C_1 \dots$ obrazce incidentního se zápornou

základní rovinou ϱ leží v záporné části perspektivní průmětny π . Při aplikaci ${}^2\Omega$ -promítání je tomu obráceně. Zvolíme velikost posuvu a upevníme v příslušné poloze tyč 2P . Podle kvocientu afinity upevníme v příslušné poloze na tyči P' index O'' .

Při rýsování perspektivy např. bodu A si počínáme takto:

1. Posuneme pravítkem, až se jeho hrana $a_1 \equiv a_c$ stane incidentní s půdorysem A_1 a vedeme rayon podle této hrany.

2. Odečteme kótu 6 bodu A_1 na hraně tyče $a_1 \equiv a_c$, tutéž kótu určíme na hraně tyče a'_1 a označíme bod A'_1 tužkou na papíře rysu.



Obr. 90

3. Označíme v zářezu indexu O'' bod téhož jména.

4. Odsuneme pravítko a narýsujeme přímku $A'_1 O''$, která určuje na rayonu a_c hledanou perspektivu A_c bodu A .

Při tomto tvaru pravítka je perspektiva A_c sestrojena pomocí jednoho nastavení přístroje a narýsování rayonu, pomocí dvou čtení, dvou označení bodu a sestrojení přímky určené dvěma body (obr. 90).

V případě vnější přímky perspektivity o'' , tj. při aplikaci ${}^2\Omega$ -promítání, je nutno prodloužit pravítko $z \equiv x$ a index O'' umístit vně pásu daného přímkami a_c, a'_1 , jak ukazuje obr. 90. V tomto obraze je přístroj nakreslen v poloze určující perspektivu A_c bodu A a naznačeno je sestrojení perspektivy C_c bodu C .

Je-li úloha sestrojít rovnoběžnou projekci hranolu s podstavou v základní rovině Dürerovy soustavy 6, je třeba připomenout další větu.

Věta 1.2. *Kolmice k základní rovině q uvažované Dürerovy soustavy se zobrazuje ve skutečné velikosti.*

Důkaz správnosti věty je znám ze základů deskriptivní geometrie, kde se ukazuje, že úsečka rovnoběžná s průmětnou se zobrazuje v rovnoběžném promítání ve skutečné velikosti.

Správnost věty vyplývá též z věty 4.4 kapitoly I, vztahující se k témuž úkolu v perspektivě o vlastním středu O .

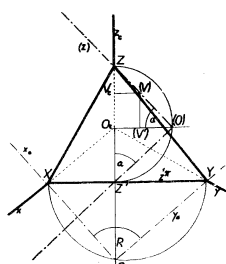
Máme-li určit velikost perspektivy v_c kolmice v vztýčené např. v bodu A základní roviny, posuneme pravítko po příložníku tak, aby byl bod A'_1 ve vzdálenosti v od hrany pravítka $^2P(a'_1)$. Pak vzdálenost perspektivy A_c bodu A je od hrany pravítka $^1P(a_1 \equiv a_c)$ rovna velikosti perspektivy v_c výšky v . Ale při posunutí pravítka se obě vzdálenosti stále sobě rovnají:

$$A_c \div (a_1 \equiv a_c) = A'_1 \div a'_1.$$

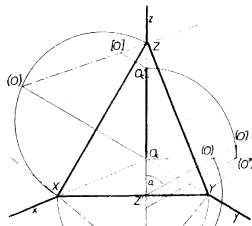
Tím je též správnost věty potvrzena.

2. Užití pravoúhlé perspektivní afinity v ortogonální axonometrii a v Mongeově promítání

Je třeba doplnit poznámku o určení obrazu velikosti výšek vztýčených k základní rovině v jejich bodech. Jde tu o ortogonální axonometrické a Mongeovo zobrazení, o kolmice k rovině souřadnicových os xy , resp. kolmice k obecné rovině v Mongeově promítání. Tehdy ovšem není kolmice rovnoběžná s průmětnou.



Obr. 91



Obr. 92

Nechť je dána pravoúhlá afinita osou o a dvojicí přiřazených bodů $A_1 \rightarrow A_2$. Tuto afinitu můžeme interpretovat různými způsoby. Z nich uvedeme mimo interpretaci v Dürerově soustavě 6 dvě další interpretace týkající se základů deskriptivní geometrie.

a) Daná afinita představuje vztah mezi ortogonálně axonometrickým obrazem souřadnicové roviny, např. roviny os x, y , a otočenou touto souřadnicovou rovinou kolem její axonometrické stopy do axonometrické průmětny. V obr. 91 a v obr. 92 je tento vztah ortogonální afinity dán stopou $z^{1\pi} \equiv XY$ jako osou a dvojicí bodů $O_0 \rightarrow O_c$, kde O_c je axonometrický obraz vrcholu trojhranu souřadnicových os a O_0 je tento vrchol otočený kolem $z^{1\pi}$ do axonometrické průmětny.

b) Daná afinita je vztah mezi prvním průmětem roviny ϱ podle Mongea a otočenou rovinou ϱ kolem její první stopy p_1^{ϱ} do 1. průmětny. V obr. 94 je tento vztah dán první stopou p_1^{ϱ} roviny ϱ jako osou afinity a dvojicí přiřazených bodů $A_0 \rightarrow A_1$ známého významu.

Dá se snadno ukázat, že obě uvedené interpretace jsou v podstatě jedna a táž, jde v obou případech o ortogonální průmět roviny ϱ do roviny π s ní různoběžné, nikoli kolmé. Obě interpretace se od sebe liší po grafické stránce jen různým způsobem označení.

Uvažujme případ a). Je-li afinita dána osou o a dvojicí afinních bodů $A_1 \rightarrow A_2$ (obr. 93), jak se zpravidla označuje, můžeme pozměnit označení s ohledem na axonometrii. Osa necht' je $z^{1\pi} \equiv XY$ a dvojice přiřazených bodů $O_0 \rightarrow O_c$. Můžeme vyslovit větu.

Věta 2,1. *Ortogonalní afinitou ($z^{1\pi} \equiv XY, O_0 \rightarrow O_c$) je určena nekonečně mnohoznačně axonometrie, v které je osa $z^{1\pi}$ axonometrická stopa souřadnicové roviny xy , bod O_c je axonometrický průmět vrcholu trojhranu os $O(x, y, z)$ a bod O_0 je otočený vrchol trojhranu kolem stopy $z^{1\pi} \equiv XY$ do axonometrické průmětny π .*

Důkaz správnosti věty vyplývá ze základních vlastností axonometrie. Průmět souřadnicové osy z je dán afinní přímkou $O_0O_c \equiv z_c$. Obě zbývající souřadnicové osy x, y jsou incidentní se souřadnicovou rovinou ${}^1\pi \equiv (O, z^{1\pi})$ a jsou k sobě kolmé. Jejich vzájemná poloha je určena jednou z nich, např. osou $x \equiv OX$, při čemž X je její stopník, vrchol axonometrického trojúhelníka a tedy $X \in z^{1\pi}$. Souřadnicová osa y je tím jednoznačně určena. V otočení je $O_0X \equiv x_0, y_0 \equiv O_0Y \perp O_0X, Y \equiv y_0 \cdot z^{1\pi}$. Tím je dán osový trojhran $O(x, y, z)$ a tím axonometrie, cbd.

Pokud se týká jen vztahu souřadnicové roviny ${}^1\pi \equiv O_z^{1\pi}$ a axonometrické průmětny, můžeme vyslovit další větu.

Věta 2,2. *Ortogonalní afinitou v předešlé větě je dána odchylka α souřadnicové roviny ${}^1\pi$ od axonometrické průmětny. Poloha vrcholu trojhranu souřadnicových os je dána dvojnásobně. Koeficient dané afinity daný vzdálenostmi přiřazených bodů od osy $z^{1\pi}$ a odchylka α jsou vázány vztahem:*

$$\cos \alpha = \frac{Z'O_c}{Z'O_0}$$

Důkaz (obr. 91).

Položme průmětem osy $z \equiv O_0O_c$ její promítací rovinu σ . Jelikož jde o ortogonální promítání, tvoří body této roviny, a to vrchol \hat{O} souřadnicového trojhranu, jeho axonometrický průmět O_c a průsečík $Z' \equiv \sigma \cdot z^{1\pi}$ pravoúhlý trojúhelník OO_cZ' .

Jeho odvěsna OO_c je vzdálenost vrcholu souřadnicového trojhranu od axonometrické průmětny, přepona OZ' je rovna vzdálenosti vrcholu O od základnice z'^n , a tedy platí:

$$O \perp z'^n = OZ' = O_0Z'.$$

Druhá jeho odvěsna O_cZ' je axonometrický průmět této vzdálenosti OZ' . Pravý úhel trojúhelníka je při vrcholu O_c .

V obr. 92 je sklopena rovina σ i s uvedeným trojúhelníkem kolem odvěsny O_cZ' do axonometrické průmětny π : $O_c(O) \perp O_cZ'$, $Z'(O) = Z'O_0$.

Podle definice odchylky dvou rovin je jeho úhel $\sphericalangle O_cZ'(O) = \sphericalangle O_cZ'O$ odchylka souřadnicové roviny ${}^1\pi$ od axonometrické průmětny ve skutečné velikosti.

Je patrné, že axonometrická průmětna určuje v prostoru dva poloprostory. Střed axonometrického trojhranu může být incidentní s kterýmkoli z nich, cbd.

Z této věty vyplývá, že rozhodneme-li se pro polohu vrcholu osového trojhranu v jednom z obou poloprosorů, je uvedenou ortogonální afinitou určena poloha souřadnicové roviny ${}^1\pi$ vzhledem k axonometrické průmětně incidentní s nákresem jednoznačně. Proto je dána touto afinitou i kolmice k souřadnicové rovině ${}^1\pi$ v kterémkoli jejím bodě. Můžeme vyslovit další větu.

Věta 2.3. *Ortogonální afinitou uvedenou v předšlých větách je určena kolmice k souřadnicové rovině ${}^1\pi$ v kterémkoli jejím bodě i průmět úsečky dané velikosti incidentní s touto kolmicí.*

Důkaz. Z definice kolmosti přímky k rovině a ze základních vlastností ortogonálního promítání vyplývá, že průmět kolmice k k rovině ${}^1\pi$ je kolmý k stopě z'^n , ose dané afinity. Dále je známo, že stejně velké úseky na kolmicích k souřadnicové rovině ${}^1\pi$ se zobrazují jako stejné. Proto můžeme uvažovat jednu z kolmic k rovině ${}^1\pi$, např. souřadnicovou osu z .

Položme touto osou rovinu σ zavedenou ve větě 2,2 (obr. 91) a sklopme ji i s osou z a jmenovaným trojúhelníkem $\triangle OO_cZ'$ do axonometrické průmětny. Podle věty o kolmosti přímky k rovině je sklopená osa z , přímka (z) , kolmá k přímce $(O)Z'$ a protíná axonometrickou průmětnu v bodě $Z \equiv (z) \cdot z_c$. Trojúhelník $\triangle(O)ZZ'$ je pravoúhlý a platí, jak je známo z elementární geometrie:

$$\begin{aligned} \triangle ZO_c(O) &\sim \triangle(O)O_cZ' \sim \triangle Z(O)Z', \\ \sphericalangle O_c(O)Z &= \sphericalangle O_cZ'(O) = \alpha. \end{aligned}$$

Jestliže je tedy dána na souřadnicové ose z úsečka $OV = (O)(V)$, pak je její průmět $O_cV_c = (V')(V)$ a platí pro něj:

$$O_cV_c = (V')(V) = (O)(V) \cdot \sin \alpha = OV \cdot \sin \alpha, \text{ cbd.}$$

Z toho vyplývá řešení následující úlohy související s naším tématem.

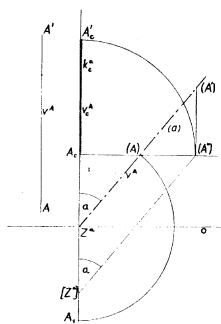
Úloha 2.1. *Nechť je dána ortogonální afinita osou o a dvojicí bodů $A_1 \rightarrow A_c$. Je*

nanést na kolmici k^A vztyčené k rovině $^1\pi$, určené afinitou podle předešlé věty, v jejím bodu A úsečku dané velikosti $v^A = AA'$.

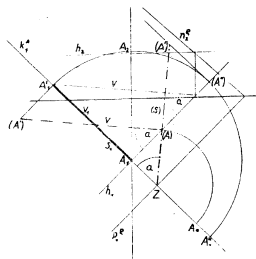
Řešení (obr. 93) s ohledem na předešlé úvahy a označení je:

1. Otočíme trojúhelník $\triangle AA_cZ^a$ kolem A_cZ^a do nákresny: $A_c(A) \perp A_cZ^a$, $Z^a(A) = Z^aA_1$, $(a) \equiv Z^a(A)$.
2. Nanese danou úsečku v^A na přímkou (a) , $Z^a(A') = v^A$.
3. Sestrojíme přímkou $(A')(A'') \parallel A_1A_c$ určující na přímce $A_c(A)$ bod (A'') .
4. $A_c(A'')$ je velikost průmětu úseku kolmice vztyčené v bodu A k rovině $^1\pi$, určené danou afinitou. Stačí ji přenést na k_c^A ,

$$A_cA'_c = A_c(A'').$$



Obr. 93



Obr. 94

Důkaz správnosti konstrukce:

Podle poslední věty je průmět úsečky OV dané velikosti incidentní se souřadnicovou osou z kolmou k rovině $^1\pi$ a též průmět úsečky dané velikosti na každé kolmici k této rovině dán vztahem:

$$O_cV_c = A_cA'_c = v^A \cdot \sin \alpha = AA' \cdot \sin \alpha.$$

V části řešení 1) je sestrojen úhel α . V části řešení 2) a 3) je sestrojen trojúhelník $\triangle [Z^a](A'')A_c$ podobný trojúhelníku $\triangle Z^a(A)A_c$, v němž platí:

$$A_c(A'') = [Z^a](A'') \cdot \sin \alpha = Z^a(A'') \cdot \sin \alpha = AA' \cdot \sin \alpha = A_cA'_c \text{ cbd.}$$

V obr. 92 je nanášena úsečka dané velikosti v na souřadnicovou osu z tímto způsobem i obvyklým způsobem užívaným v axonometrii, tj. pomocí sklopení souřadnicové osy z kolem jejího axonometrického průmětu do axonometrické průmětny.

V rýse 94 je tímto způsobem sestrojen půdorys úsečky dané velikosti v incidentní

s kolmicí k^A vztyčenou k rovině q v jejím bodě A . Jako kontrola správnosti konstrukce je nanesena úsečka dané velikosti na uvedenou kolmicí obvyklým způsobem.

Konstrukce:

1. $A_1(A) \perp k^A$, $A_1(A) = z^A = AA_1$, $ZA_0 = Z(A)$,
2. $Z(A') = v$, $(A')(A') \perp A_1(A)$,
3. $A_1A'_1 = A_1(A') = v_1$ je půdorys výšky v .

Řešení úlohy v axonometrii i v Mongeově promítání jsou zřejmě shodná. Při probíraných mechanických konstrukcích je uvedený způsob sestrojení průmětu výšky $v = AA'$ výhodnější, neboť souvisí s perspektivní afinitou, kterou se právě zabýváme. Jí se rozšíří konstrukce axonometrického průmětu obrazce incidentního se souřadnicovou rovinou na konstrukci axonometrického průmětu prostorového objektu.

3. Kosohlé promítání

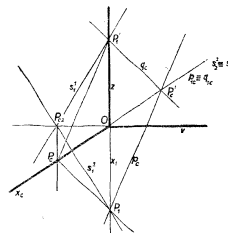
Nechť je dána Dürerova soustava 7 s nevlastním středem promítání, který je dán promítací přímkou bodu A nikoli kolmou k základnici z . Je to kosohlé promítání základní roviny q do perspektivní průmětny π znázorněné v obr. 15 [7]. Jeho základní vlastnosti jsou známy.

V mechanických konstrukcích kosohlého obrazů objektů je důležitá Mongeova projekce přidružená k danému kosohlému promítání a její souvislost s Ω -projekcí zavedenou v tomto článku.

O Mongeových průmětech směru perspektivního promítání s (s_1 , resp. s_2) a o perspektivním průmětu směru Ω -promítání (p , resp. q) platí tyto věty vztahující se k obr. 16, 17, 18 [7]:

a) **Věta 3.1** (obr. 16 [7]). s_1^2, s_2^2 jsou Mongeovy pravouhlé průměty směru perspektivního promítání s při ztotožnění kladné základní roviny $+q$ se zápornou perspektivní průmětnou $-\pi$ (při aplikaci ${}^2\Omega$ -promítání).

Důkaz. Vytkněme v kladné polorovině $+q$ základní roviny q bod P incidentní s kladnou polopřímkou $+x$ osy x a sestrojme Mongeovy průměty perspektivně promítací přímky s s ním incidentní. Podrobíme-li bod P ${}^2\Omega$ -promítání, obdržíme bod P_1^2 . Perspektivně promítací přímka s bodu P je určena tímto bodem P a jeho perspektivou P_c^2 . Mongeovy průměty bodu P a jeho perspektivy P_c^2 jsou P_1^2, P_2^2 , resp. $P_{c1}^2 \equiv P_{c2}^2$, P_{c1}^2 je incidentní s osou y . V obr. 95 jsou naznačeny Mongeovy a perspektivní průměty uvedených směrů promítání v jednom obrázku.



Obr. 95

Oba Mongeovy průměty perspektivně promítací přímkou s jsou:

$$s_1^2 \equiv P_1^2 P_{c1}^2, \quad s_2^2 \equiv P_2^2 P_{c2}^2 \equiv x_c, \quad \text{cbd.}$$

b) **Věta 3,2** (obr. 16 [7]). $s_1^1, s_2^1 \equiv s_2^2$ jsou Mongeovy průměty směru perspektivního promítání s při ztotožnění kladné poloroviny $+q$ základní roviny q s kladnou polorovinou $+\pi$ perspektivní průmětny π , tj. při aplikaci ${}^1\Omega$ -promítání na základní rovinu.

Důkaz. Podrobme zvolený bod P ${}^1\Omega$ -promítání. Obdržíme jeho průmět P_1^1 , pro který platí: $P_1^1 O = P_1^2 O$. Jeho nárys P_2^1 i Mongeovy průměty bodu P_c jsou tytéž jako v případě a). Proto je

$$s_1^1 = P_1^1 P_{c1}^1, \quad s_2^1 \equiv s_2^2 \equiv P_2^1 P_{c2}^1, \quad \text{cbd.}$$

c) **Věta 3,3** (obr. 17 [7]). p_c, p_{1c} jsou perspektivní průmět a perspektivní průmět půdorysu (perspektivní půdorys) směru ${}^1\Omega$ -promítání.

Důkaz. Vytkněme bod A incidentní se zápornou polorovinou $-q$ základní roviny q a s ním incidentní promítací přímkou $p \equiv AB$, kde B je incidentní se zápornou polorovinou $-\pi$ perspektivní průmětny π . Platí: $A_1 A_2 = B_1 B_2$. Mongeovy průměty těchto bodů A, B jsou v poloze udané v obr. 17 [7]. Perspektiva bodu A je $A_c(A_2 A_c \parallel x_c, A_1 A_c \parallel P_1 P_c)$, perspektivní půdorys bodu A je $A_{1c} \equiv A_c$. Perspektiva bodu B je $B_c \equiv B_2$, perspektivní jeho půdorys $B_{1c} \equiv B_1$. Perspektiva promítací přímkou $p \equiv AB$ a její perspektivní půdorys jsou $p_c \equiv A_c B_c, p_{1c} \equiv A_{1c} B_{1c} \parallel x_c$, cbd.

d) **Věta 3,4** (obr. 18 [7]). q_c, q_{1c} jsou perspektivní průmět a perspektivní půdorys směru ${}^2\Omega$ -promítání.

Důkaz. Volme bod E incidentní se zápornou polorovinou $-q$ základní roviny q a sestrojme s ním incidentní ${}^2\Omega$ -promítací přímkou $q \equiv EF$, kde F je incidentní s kladnou polorovinou $+\pi$ perspektivní průmětny π . Mongeovy průměty obou bodů E, F jsou v poloze uvedené v obr. (18 [7]). Platí: $E_1 \equiv F_2, E_2 \equiv F_1$. Perspektiva bodu E je $E_c(E_2 E_c \parallel x_c, E_1 E_c \parallel P_1 P_c)$, perspektivní půdorys bodu E je $E_{1c} \equiv E_c$. Perspektiva bodu F je $F_c \equiv F_2$, perspektivní půdorys $F_{1c} \equiv F_1$. Perspektiva promítací přímkou q a její perspektivní půdorys jsou

$$q_c \equiv E_c F_c, \quad q_{1c} \equiv E_{1c} F_{1c} \parallel x_c, \quad \text{cbd.}$$

Všechny uvedené projekce jsou znázorněny v obr. 95. Všechny je možno užít při konstrukci perspektivy objektu incidentního se základní rovinou q . Tak např. konstrukci perspektivy obrazce $ABCD$ incidentního s kladnou polorovinou $+q$ základní roviny q při aplikaci ${}^2\Omega$ -promítání je možno provést několika způsoby.

a) Pomocí hloubkových přímkou $A_1 A_2, B_1 B_2, \dots$ incidentních s jednotlivými vrcholy A, B, \dots obrazce. Jelikož se při uvedeném promítání rovnoběžnost a dělicí poměr zachovávají, jsou jejich perspektivy rovnoběžné s x_c a jsou zkráceny v daném poměru $q = OP_1 / OP_c(A_2 A_c \parallel x_c, A_1 A_c \parallel P_1 P_c)$ (obr. 96).

b) Pomocí Mongeových průmětů perspektivně promítací přímkou s incidentních s jednotlivými vrcholy A, B, \dots při aplikaci ${}^2\Omega$ -promítání (obr. 16, 17, 18, [7], 95, 96).

Tímto způsobem je sestrojena perspektiva C_c bodu C . Mongeovými průměty C_1, C_2 jsou vedeny průměty promítací přímky s^1 : $s_1^1 \parallel s_1^2, s_1^1 \in C_1, s_2^1 \parallel s_2^2, s_2^1 \in C_2 \in y$ a je sestrojen její druhý stopník, který je hledanou perspektivou C_c .

c) Při aplikaci ${}^1\Omega$ -promítání si počínáme podobně. Ujijeme-li hloubkových přímek, sestrojíme ${}^1\Omega$ -průmět $A_1'B_1'C_1'D_1'$ obrazce $ABCD$ do perspektivní průmětny π , který je souměrně položen k jeho ${}^2\Omega$ -průmětu do π podle základnice z (obr. 96). Hloubková přímka bodem A_1' je $A_1'A_2$, její perspektiva $A_2A_c \parallel x_c$. Zkrácení její je dáno přímkou $P_1'P_c$. Perspektiva A_c bodu A je tedy

$$A_c \equiv A_2A_c \cdot A_1'A_c,$$

kde

$$A_1'A_c \parallel P_1'P_c.$$

d) Pomocí Mongeových průmětů s_1^1, s_2^1 směru perspektivního promítání s při aplikaci ${}^1\Omega$ -promítání. Tak je sestrojena perspektiva A_c bodu A . Vedeme bodem A perspektivně promítací přímku $s^A, s_1^A \in A_1', s_1^A \parallel s_1^1, s_2^A \in A_2, s_2^A \parallel s_2^1$ a sestrojíme nárysný stopník této promítací přímky s^A , což je perspektiva A_c bodu A .

Podobně můžeme použít perspektiv promítacích přímek p, q ${}^1\Omega$ -i ${}^2\Omega$ -promítání.

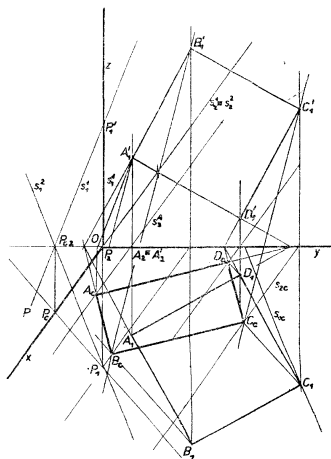
Je známo, že Ω -průmět objektu základní roviny q a jeho perspektivní průmět jsou vázány klinogonálně afinním vztahem, který je podle Stevinovy věty ekvivalentní s Dürerovou soustavou 7 (věta 2,8 [7]).

I zde můžeme vyslovit větu o rozštěpení klinogonální afinity (věta 2,11 [7]) a můžeme zavést ostatní známé pojmy související s tímto rozštěpením.

Na základě toho je možno doplňovat rovinnou soustavu bodů A_c, B_c, C_c, \dots klinogonálně afinní k rovinné soustavě bodů A_1, B_1, C_1, \dots

Úloha 3.1. *Nechť je klinogonální afinita dána osou z a dvojicí přiřazených bodů $A_1 \rightarrow A_c$. Nechť jsou dány body B_1, C_1, \dots soustavy. Je sestrojiti přiřazené body B_c, C_c, \dots soustavy q_c .*

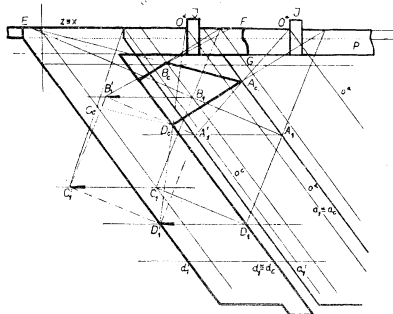
Sestrojení (obr. 97). a) Body B_c, C_c, \dots jsou incidentní s přímkami $B_1B_c \parallel C_1C_c \parallel \dots \parallel A_1A_c$.



Obr. 96

- b) Sestrojíme body A'_1, B'_1, C'_1, \dots tak, aby platilo: $A_1A'_1 \parallel B_1B'_1 \parallel C_1C'_1 \parallel \dots \parallel z$,
 $A_1A'_1 = B_1B'_1 = C_1C'_1 = \dots = p$.
- c) Sestrojíme střed perspektivity $O^a \equiv z \cdot A_cA'_1$ určující s body ${}^1K, {}^2K$ konstantní trojici.
- d) Sestrojíme body O^b, O^c, \dots na základě zachování této trojice.
- e) Pak přímky B'_1O^b, C'_1O^c, \dots určují hledané afinní body B_c, C_c, \dots , čímž je konstrukce provedena.

Důkaz správnosti konstrukce je snadný. V obr. 97 je sestrojena kosoúhlá projekce obdélníka $ABCD$ při aplikaci obou Ω -projekcí.



Obr. 97

4. Mechanické pomůcky k rýsování kosoúhlých projekcí. Celuloidové nebo lepenkové afinní pravítko (kosoúhlý afinograf)

Konstrukci doplňování klinogonálních afinních soustav lze snadno provádět pomocí jednoduchého mechanismu, celuloidového nebo lepenkového kosoúhlého afinního pravítka znázorněného v obr. 20 [7]. Je podobné pravouhlému afinnímu pravítku nakreslenému v obr. 12 [7]. Obsahuje též pravítko vlastní $EFIK$ a pravítko opěrné $EFGH$. Obě jsou spojena v celek. Hrana $a_1 \equiv a_c$ ($d_1 \equiv d_c$) vlastního pravítka zastupuje slabě samodružnou přímku afinity téhož označení, druhá hrana zastupuje posunutou přímku $a'_1(d'_1)$ po rozštěpení perspektivní afinity posuvem \bar{p} .

Na hlavní části pravítka je naznačena přímka perspektivity $o^a \parallel a_1 \equiv a_c$ incidentní se středem perspektivních bodových řad a_c, a'_1 . Tento bod je určen pomocí jednoho páru afinních bodů A_1, A_c . Samodružná přímka je $x \equiv z$.

Při rýsování perspektivy opěrné pravítko jeho hranou EF o pevné pravítko P rovnoběžně se základnicí z a posouváme afinním pravítkem po tomto pravítku P .

V obr. 20 [7] je nakresleno afinní pravítko pro případ, kdy jsou afinní obrazce incidentní s různými polorovinami perspektivní průmětny určenými základnicí z jako osou afinity. Půdorys je v záporné části $-\pi$ perspektivní průmětny, perspektiva A, B, \dots v kladné její části. To je možné jen tak, že je obrazec incidentní se zápornou polorovinou $-\varrho$ základní roviny a je v Dürerově soustavě aplikováno ${}^1\Omega$ -promítání.

V tomto případě kosoúhlé afinity platí věty 4,11 předešlé kapitoly a 1,1 o poloze středu perspektivity O^a náležícího slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$, vzhledem k pásu roviny π ohraničeného oběma přímkami $a_1 \equiv a_c$ a a'_1 po rozštěpení afinity. V obr. 20 [7], kde bylo aplikováno ${}^1\Omega$ -promítání, náleží oba prvky vnitřku tohoto pásu.

V obr. 97 je nakresleno kosoúhlé afinní pravítko při obvyklém zadání kosoúhlého promítání. Zde jsou oba obrazce, půdorys a perspektiva, v téže polorovině určené základnicí z , v záporné polorovině průmětny π . To je jen tak možné, že je obrazec incidentní s kladnou částí základní roviny ϱ a je aplikováno ${}^2\Omega$ -promítání. Střed perspektivity O^a příslušný slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ a přímka perspektivity o^a náleží vnějšku pásu ohraničeného oběma přímkami $a_1 \equiv a_c$, a'_1 . V tomto případě pojíždí přístroj svou opěrnou hranou po pravítku zastupujícím základnicí z a s ní splývající samodružnou přímkou x . Proto není potřeba přímky perspektivity, postačí toliko index posuvný s přístrojem po pravítku P , zastupující střed perspektivity O^a . Přístroj je nakreslen v poloze určující perspektivu A_c, D_c bodů A, D .

Postup při kreslení perspektivy je zřejmý. Zjednodušení se dosáhne, opatříme-li hrany pravítka měřítky, jak tomu bylo u pravouhlého afinografu.

Tyčový (pravítkový) kosoúhlý afinograf

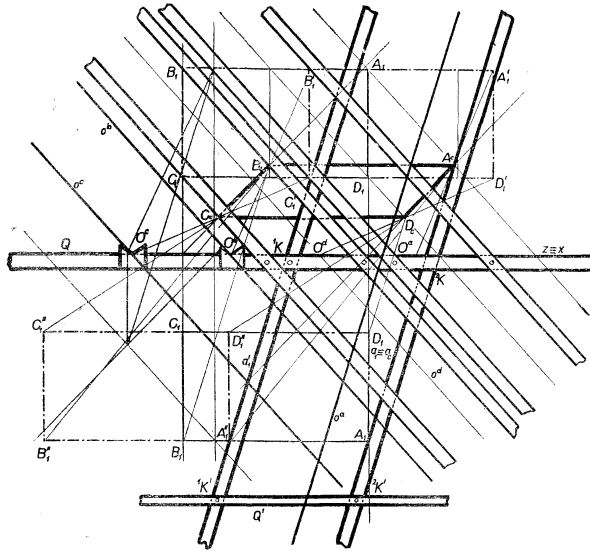
Některé výhody má tyčový kosoúhlý afinograf, jehož schéma je v obr. 21 [7] a v obr. 98, obdobný pravouhlému tyčovému afinografu nakreslenému na obr. 90. Přístroj má tyto části:

1. Pevné pravítko P položené na rýsovací desce. Jeho hrana splývá se základnicí $z \equiv x$, takže je stále uprostřed rysu, ať jsou oba obrazce v kterékoli vzájemné poloze.
2. Opěrné pravítko afinografu Q spočívá na pravítku P a při rýsování perspektivy se po něm posouvá. Pravítko nese čepy k namontování dalších částí.
3. Přímkami $a_1 \equiv a_c$, a'_1 zastupují pravítka stejně označená v obr. 98. Přímkou perspektivity o^a zastupuje index O^a posuvný po opěrném pravítku Q . Obě pravítka $a_1 \equiv a_c$, a'_1 jsou posuvná po opěrném pravítku Q a otáčivá v čepích ${}^1K, {}^2K$. Tím lze přístroj seřadit pro libovolný úhel hran $a_1 \equiv a_c$, a'_1 vzhledem k základnici z i pro libovolný posuv \bar{p} . Lze ho též užít jako afinografu pravouhlého.

Při práci je jasný rozhled po celé konstrukci, čemuž při užití lepenkového pravítka nebylo. Pružení pravítek je možno zmírnit např. namontováním přičky Q' apod.

Použití tohoto tvaru kosoúhlého afinografu je zřejmé. V obr. 21 [7] i v obr. 98 je přístroj nakreslen v poloze určující perspektivu A_c bodu A při poloze obrazce v záporné části základní roviny $-\varrho$ a při aplikaci ${}^1\Omega$ -promítání. Střed perspektivity O^a

a příslušná přímka perspektivity o^a náleží vnitřku pásu ohraničeného přímkami $a_1 \equiv a_c, a'_1$. V obr. 98 je též přístroj nakreslen při aplikaci ${}^2\Omega$ -promítání. V tomto případě je ve dvou polohách, a to v poloze určující perspektivu B_c bodu B a perspektivu C_c bodu C .



Obr. 98

5. Užití pravoúhlých afinografů k rýsování kosoúhlých projekcí

Při konstrukci kosoúhlých projekcí je možno užít i pravoúhlých afinních pravítek, jak bylo ukázáno v [7]. Platí důležitá věta o rozštěpení perspektivní afinity posunutím směrem kolmým k slabě samodružné přímce (věta 2,11 [7]), případně i jiným směrem. Při tomto rozštěpení kosoúhlé afinity platí obdobné vztahy jako dříve. Středry perspektivity O^a, \dots náležící jednotlivým slabě samodružným přímkám $a_1 \equiv a_c, \dots$ nejsou však incidentní se základnicí z . Jejich množina tvoří přímku rovnoběžnou se základnicí. Postup při doplňování kosoúhlých afinních soustav je obdobný doplňování soustav při rozštěpení obvyklým posunutím.

Pravítkový (tyčový) pravoúhlý afinograf k rýsování kosoúhlých projekcí

Části tohoto přístroje, znázorněného v obr. 99, jsou: Opěrné pravítko Q , kterým se přístroj posouvá po pevné podložce, např. po příloženém kosoúhlém pravítku P , položeném ve směru kolmém k slabě samodružným přímkám $a_1 \equiv a_c$ dané afinity.

S opěrným pravítkem je pevně spojeno kolmé pravítko A , jehož hrana $a_1 \equiv a_c$ zastupuje samodružnou přímku téhož označení. Po něm se posouvá pravítko M^a kolmé k pravítku A . Pravítko M^a je možno upevnit šroubem S^a nebo jiným zařízením k pravítku A v každé jeho poloze. Na pravítku M^a je nasazen index O^{a0} , posunovatelný po M^a a označující střed perspektivity téhož označení.

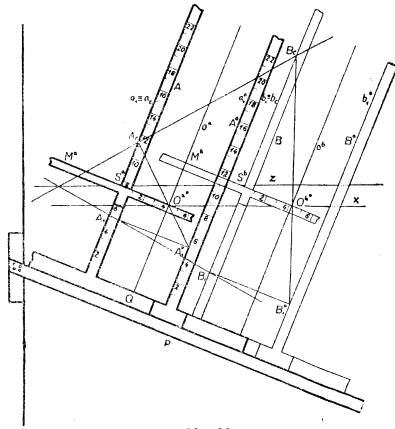
Posunutou soustavu a_1^0 představuje hrana téhož jména pravítka A_0 , které je posunovatelné po pravítku Q a upevnitelné ve vzdálenosti velikosti posunutí \bar{p} od pravítka A .

Pravítka A , A_0 i M^a jsou opatřena měřítky, jak je vidět v obr. 99.

Postup při sestavení perspektivy B_c bodu B

Je-li kosoúhlá afinita dána osou z a párem přiřazených bodů $A_1 \rightarrow A_c$, sestojíme bod B_c přiřazený danému bodu B_1 takto:

- Seřídíme pravítko podle velikosti posunutí \bar{p} .
- Opětme je o pevné kosoúhlé příložené pravítko P , posuneme jím tak, aby hrana $a_1 \equiv a_c$ pravítka A byla incidentní s bodem A_1 a vyznačíme na pravítku M^a , které posuneme do bodu $S^a \equiv z \cdot (a_1 \equiv a_c)$, bod O^{a0} indexem téhož jména, $O^{a0} \equiv A_1^0 A_c \cdot M^a$.
- Posuneme afinografem, aby pravítko A a jeho hrana $a_1 \equiv a_c$ nabyly polohy B , $b_1 \equiv b_c \in B_1$ a vedeme rayon podél hrany $b_1 \equiv b_c$. Pravítko A^0 nabude polohy B^0 .
- Přečteme na pravítku B kótu bodu B_1 (v obr. 99 je to kóta 3,7) a vyznačíme bod B_1^0 na rysce udaný touže kótou na hraně b_1^0 pravítka B^0 .
- Posuneme pravítkem M^a po pravítku B až se jeho hrana stane incidentní s bodem $S^b \equiv z \cdot (b_1 \equiv b_c)$, Zároveň vyznačíme na rysce bod O^{b0} udaný indexem na pravítku M^b .



Obr. 99

f) Odsuneme přístroj a narýsujeme přímkou $B_1^0 O^0$, která vytíná na rayonu $b_1 \equiv b_c$ perspektivu B_c bodu B .

Podle Ω -projekce aplikované v Dürerově soustavě náleží střed perspektivy O^0 rameni pravítka M^a , jak je uvedeno v obr. 99, nebo rameni opačnému. V tomto obraze je aplikováno $^1\Omega$ -promítání při poloze obrazce v záporné základní rovině $-\varrho$, takže střed perspektivy O^0 náleží vnitřku pásu, ohraničeného přímkami $a_1 \equiv a_c, a_1^1$. Je-li dána samodružná přímka x , není třeba indexu O^0 .

Na obr. 22 [7] je znázorněno celuloidové nebo lepenkové pravoúhlé afinní pravítko pro doplňování kosoúhlé afinity. Je v poloze určující perspektivu A_c, B_c bodů A, B . Je jím posunováno po kosoúhlém příložném pravítku P , jehož hrana je kolmá k slabě samodružným přímkám $a_1 \equiv a_c, \dots$. Postup při konstrukci perspektivy objektu v základní rovině je též jako při užití tyčového pravítka.

Pro úplnost je třeba ještě připomenout možnost konstrukce afinografu pro případ afinity koeficientu $q = -1$, tj. kosoúhlé souměrnosti, kosoúhlého symetrografu.

Kosoúhlý symetrograf

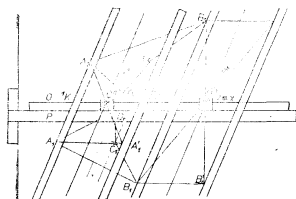
Tato mechanická pomůcka může být tvaru celuloidového kosoúhlého perspektivního pravítka nakresleného v obr. 20 [7]. Přímka perspektivy o^a je však symetráloou pásu ohraničeného oběma rovnoběžnými hranami $a_1 \equiv a_c, a_1^1$. Pracuje se s ním stejně jako s pravítkem v obr. 20 [7].

Druhý tvar je symetrograf tvaru zobrazeného schematicky v obr. 100. Je to vlastně pravítkový kosoúhlý afinograf zobrazený v ryse 98. Index O^a, O^b, \dots označující střed perspektivy řad $a_c, a_1^1; b_c, b_1^1; \dots$ je středem úsečky určené oběma čepy $^1K, ^2K$.

V obr. 100 je sestrojeno klinogonálně souměrný obraz $A_c B_c C_c D_c$ k danému obrazci $A_1 B_1 C_1 D_1$ podle osy souměrnosti z . Přístroj je v polohách určujících vrcholy A_c, B_c .

S přístrojem se pracuje známým způsobem.

První mechanické pomůcky k rýsování afinních obrazů byly konstruovány za jiným účelem než k sestrojení axonometrických a klinogonálních projekcí. Sloužily např. jako pravoúhlé elipsografy. To je vidět na příkladu elipsografu W. Lehnera, sestrojeném už v r. 1892 na základě ortogonální afinity mezi kružnicí a elipsou [26] a na dalších příkladech.



Obr. 100

První z přístrojů k rýsování axonometrických a klinogonálních obrazů prostorových objektů v Dürerově soustavě byly konstruovány v Sovětském svazu asi od roku 1923 [2]. Vedl k tomu jednak rostoucí zájem o deskriptivní geometrii, jak uvádí Volberg, jednak rozvoj průmyslu ve všech odvětvích, hlavně průmyslu strojního a důlního.

Z konstruktérů afinních přístrojů vynikli:

D. G. Tambovcev (1923), *J. N. Veňjaminov* (1933), *M. S. Rosental* (1940), *G. B. Valc* (1948–1952), *M. N. Judickij*, *L. S. Skupov*, *G. I. Vilesov* (1951), *N. L. Ruskevič* a další [2].

V r. 1934 byl konstruován německým inženýrem *E. Foxem* axonograf k účelům důlního kreslení. R. 1936 sestrojil *Green* a *Mauer* jednoduchý afinograf, který mechanisuje ortogonální afinitu. Podobný je přístroj konstruovaný německou firmou *Ott* atd. [27].

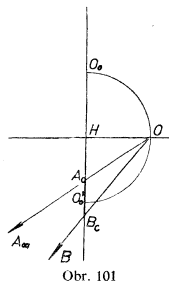
Je nutno dodat, že byly konstruovány další mechanické pomůcky k rýsování perspektivních i rovnoběžných projekcí. Že je tomu tak, potvrzuje např. řada perspektivních a afinních mechanických pomůcek popsanych v knize *G. B. Valca* a *G. L. Ušakova* [28]. V české literatuře je uveden např. K. Kuchařem (Přehled kartografie) afinograf, sloužící jako mechanická pomůcka při konstrukci afinních kopií map.

V. SOUSTAVA PERSPEKTIVNÍHO PROMÍTÁNÍ O NEVLASTNÍ ZÁKLADNICI

I. Teorie soustavy

V kapitole III byla položena otázka, týkající se nevlastních prvků Dürerovy soustavy, O_{∞} , z_{∞} , a byla uvažována soustava o nevlastním středu O_{∞} . Uvažujme nyní Dürerovu soustavu, jejíž úběžnice je přímka nevlastní z_{∞} .

Podle věty 3.1 [7] nabude základnice z uvedené polohy ve dvou případech, z nichž první, kdy je základní rovina ϱ nevlastní, nemá praktického významu (obr. 101). Druhý případ (obr. 102ab), kdy je základní rovina ϱ rovnoběžná s perspektivní průmětnou π , je prostorová homotetie obou rovin ϱ , π podle středu O [7]. Tato soustava perspektivního promítání přestává být Dürerovou soustavou ve smyslu definice 1,7 kap. I, neboť ztrácí některé vlastnosti této soustavy. To se jeví už v zobrazení vztahu obou rovin π , ϱ v perspektivní průmětně π , kdy je nutno nahradit sklopení základní roviny ϱ kolem základnice z do průmětny π posunutím této roviny v libovolném směru do průmětny π . Naproti tomu lze zavést některé pojmy, prospěšné v teorii Dürerovy soustavy perspektivního promítání, i v soustavě homotetie, např. pojem *rozštěpení* soustavy otočením kolem jejího středu O_0 , a užít důsledků, které z toho plynou. V tom se jeví úzký vztah této soustavy se soustavou Dürerovou. Vzhledem k těmto souvislostem s Dürerovou soustavou



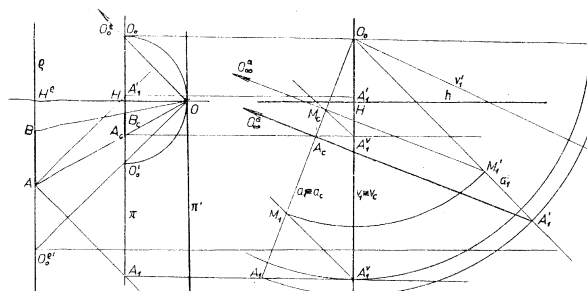
perspektivního a rovnoběžného promítání budeme mluvit o Dürerově (prostorové) soustavě homotetie.

Předně jde o zobrazení vztahu prostorové homotetie obou rovin π, ϱ v perspektivní průmětně π . Aby vynikl vztah Dürerovy soustavy perspektivního promítání a soustavy homotetie, zavedeme i v této soustavě pojem Ω -promítání základní roviny ϱ do perspektivní průmětny a budeme mluvit o perspektivním promítání, o perspektivách objektů atd.

Definice 1.1 (Ω -promítání v soustavě homotetie)

Nechť jsou od sebe různé rovnoběžné roviny π, ϱ ve svislé poloze a vlastní střed promítání O nechť není incidentní s žádnou z nich (obr. 24a [7], 102a). Položme středem O svislou rovinu ε kolmou k oběma rovinám, protínající průmětnu π v hlavní vertikále v incidentní s hlavním bodem H . Pak přímky incidentní s touto rovinou ε a mající od průmětny odchylku rovnou 45° určí směry rovnoběžného Ω -promítání základní roviny ϱ do perspektivní průmětny π .

Z názoru i z obr. 102a je zřejmé, že taková promítání jsou dvě. Nazveme je jako dříve ${}^1\Omega$ -promítání, kterým se zobrazuje podle obr. 102a bod A roviny ϱ do bodu A_1 roviny π , střed O do bodu O_0 roviny π , a ${}^2\Omega$ -promítání, kterým se zobrazuje bod A do bodu A'_1 a střed O do bodu O'_0 roviny π .



Ob.r 102

Dá se ukázat, že místo Ω -promítání právě definovaného můžeme užít i posunutí základní roviny ϱ do perspektivní průmětny π ve směru k oběma rovinám kolmém (ortogonální promítání základní roviny ϱ do průmětny π). Toto posunutí můžeme považovat za otočení základní roviny ϱ kolem nevlastní základnice z_∞ do průmětny π . Dá se dále ukázat, že důsledky obou promítání jsou tytéž.

O vztahu perspektivních průmětů A_c, B_c, \dots bodů A, B, \dots incidentních se základní rovinou ϱ a jejich Ω -projekcí A_1, B_1, \dots , resp. A'_1, B'_1, \dots do průmětny π platí

speciální věta Stevinova 3,2 [7] obdoba věť 1,17 kap. I, platná pro Dürerovu soustavu perspektivního promítání.

Podle této věty je mezi perspektivním průmětem základní roviny ϱ a jejím Ω -průmětem vztah rovinné homotetie se středem v průmětu O_0 , resp. O'_0 středu O do průmětny π . Kvocient této homotetie je $k = O_0A_1 : O_0A_c$.

Je důležitá otázka týkající se ekvivalence Dürerovy soustavy homotetie a jejího obrazu, rovinné homotetie, o níž mluví speciální Stevinova věta. Na základě uvedených vět a definic lze dokázat, že dané Dürerově soustavě homotetie náleží dvě homotetie v rovině π . Rozhodneme-li se pro některou z Ω -projekcí, je vztah obou soustav v uvedeném smyslu jednoznačný.

Obráceně však platí věta (v [7] věta 3,5).

Věta 1,1. *Homotetii $(O_0, A_1 \rightarrow A_c)$ danou středem O_0 a dvojicí bodů A_1, A_c v rovině $\varrho_1 \equiv \pi$ je dána Dürerova soustava homotetie nekonečně mnohoznačně.*

Důkaz (obr. 102). Je známo, že přímce $p \in A$ incidentní s rovinou ϱ kolmé k hlavní vertikále v přísluší dvojice přímek $p_1 \in A_1, p_c \in A_c, p_1 \parallel p_c \parallel p$, všechny kolmé k hlavní vertikále i k jejím průmětům $v_1 \equiv v_c$. Průsečíky A_1^*, A_c^* přímek p_1, p_c s hlavní vertikálou $v_1 \equiv v_c$ si též odpovídají v dané homotetii, jsou obrazy bodu $A'' \in p$ a určují se středem O_0 tutéž homotetii. Vedme hlavní vertikálou v hlavní vertikální rovinu ε , která je v obr. 102a nákrešnou, když je s nákrešnou incidentní střed O . Střed O soustavy je incidentní s přímkou $O_0O \in \varepsilon$ svírající s hlavní vertikálou v úhel 45° . Bod A'' leží na přímce $A_1^*A'' \parallel O_0O$, kde $\sphericalangle O_0A_1^*A'' = 45^\circ$. Kterákoli přímka procházející perspektivou A_c a incidentní s vertikální rovinou ε určuje na přímkách O_0O, A_1^*A'' střed O a bod A'' a tím též rovinu ϱ , pro kterou platí: $\varrho \in A''$, $\varrho \parallel \pi$, cbd.

Tato věta souvisí s obecnou Stevinovou větou 1,16 kap. I. Otáčení základní roviny ϱ kolem základnice z odpovídá zde posuv základní roviny směrem O_0O se zachováním rovnoběžnosti s perspektivní průmětnou. Otáčení středu promítání kolem horizontu odpovídá posuv středu O po přímce O_0O , promítací přímce středu zobrazení O .

Podle této obecné Stevinovy věty se mění vzájemná poloha prvků Dürerovy soustavy homotetie, zachovává se však její obraz, rovinná homotetie v rovině π . Jestliže nebudeme rozlišovat mezi prvky množiny, kterou tvoří Dürerovy soustavy homotetie přiřazené dané rovinné homotetii $(O_0, A_1 \rightarrow A_c)$ podle věty 1,1, pak náleží dané rovinné homotetii při zvoleném Ω -promítání jedna prostorová soustava homotetie. Jestliže toto opatření neučiníme, je potřeba udat např. hlavní bod zobrazení H , aby byla zaručena jednoznačnost přechodu od rovinné homotetie k prostorové soustavě homotetie.

Můžeme tedy vyslovit důležitou větu.

Věta 1,2. *Dürerova soustava homotetie a příslušná rovinná homotetie v π jsou pojmy ekvivalentní, jestliže:*

a) je zvoleno jedno z obou Ω -promítání (zpravidla $^1\Omega$ -promítání),

b) jestliže množina Dürerových soustav homotetie podle obecné Stevinovy věty je považována za jednu a tutéž Dürerovu soustavu homotetie. Jestliže požadavek b) není uznán, pak je nutno učinit jiné opatření, aby oba pojmy byly ekvivalentní.

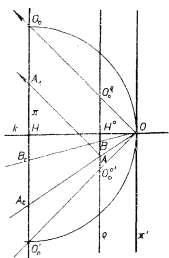
a) Jako dříve.

b) Jestliže je určen hlavní bod $H \equiv O_0$ a tím i „horizont“ soustavy.

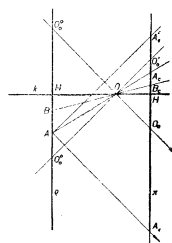
Důkaz správnosti věty je zřejmý.

Věta 1,2 platí i v případě, je-li místo definovaného Ω -promítání aplikováno v prostorové soustavě homotetie posunutí roviny ρ do roviny π ve směru kolmém k oběma, případně posunutí v jiném směru.

Elementární geometrie se zabývá obšírně prostorovou soustavou homotetie i soustavou rovinnou. Mnohých jejích vlastností v dalších úvahách užijeme a budeme proto jejich znalost předpokládat. Pro mechanické konstrukce je nutno uvážit např. kvocient soustavy a s ním souvisící zvětšení a zmenšení originálu i okolnost, kdy je obraz fyzický nebo geometrický (obr. 103, 104), pojem slabě samodružných přímek $a_1 \equiv a_c, b_1 \equiv b_c, \dots$ atd. O těchto přímkách platí věta.



Obr. 103



Obr. 104

Věta 1,3. Odpovídající si řady bodů $A_1 B_1 C_1 \dots, A_c B_c C_c \dots$ na slabě samodružných přímkách jsou podobné.

Důkaz. Obě řady mají mimo střed O_0 společný samodružný nevlastní bod $U_{1,\infty} \equiv U_{c,\infty}$. V projektivní geometrii se učí, že takové bodové řady jsou podobné, cbd.

Za účelem navržení některých mechanických konstrukcí v soustavě homotetie zavedeme pojmy, které byly uvažovány při studiu perspektivního i rovnoběžného promítání v Dürerově soustavě. Je to zvláště pojem rozštěpení soustavy otočením rovinného pole ρ_1 o velikost úhlu $\gamma \neq 0^\circ, 180^\circ$, pojem středu perspektivity O^s náležícího slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$, pojem přímky perspektivity o^s náležící téže přímce, pojem samodružné přímky x, \dots atd., jak tomu bylo u Dürerovy soustavy perspektivního promítání.

Nechť je dána homotetie $(O_0, A_1 \rightarrow A_c)$. Uvedeným otočením γ rovinné soustavy ϱ_1 kolem středu O_0 se homotetie rozštěpí, čímž se zruší perspektivnost obou souměrných polí ϱ_1, ϱ_c a obě soustavy přejdou v obecné souměrné soustavy podobné. Silně samodružný bod O_0 přejde v bod jen slabě samodružný. Každá slabě samodružná přímka $a_1 \equiv a_c$ se rozštěpí v dvojici přímek a_c, a'_1 , o níž platí základní věta.

Věta 1.4. *Bodové řady $A_c B_c C_c \dots, A'_1 B'_1 C'_1 \dots$ incidentní s přímkami a_c, a'_1 jsou perspektivní. Střed perspektivity O^a těchto řad je bod nevlastní. Samodružná přímka x příslušící rozštěpení γ je přímka nevlastní (obr. 25 [7], 105).*

Důkaz. a) Obě řady a_c, a'_1 jsou podobné a takové řady jsou projektivní. V projektivní geometrii se učí, že dvě projektivní bodové řady incidentní s dvěma od sebe různými přímkami, jejichž společný bod je samodružný, jsou perspektivní. V daném případě je tomu tak. Společný bod O_0 je samodružný, obě uvedené bodové řady jsou perspektivní, cbd.

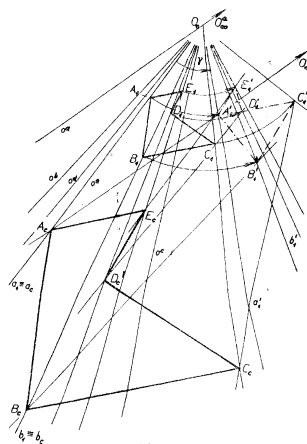
b) Obě řady a_c, a'_1 jsou podobné (věta 1.3). Jejich samodružné body jsou O_0 a jejich společný nevlastní bod $U_{1\infty} \equiv U_{c\infty}$. Otočením řady a_1 do polohy a'_1 přejde bod $U_{1\infty}$ v bod $U'_{1\infty}$. Oba si v perspektivitě obou řad a_c, a'_1 odpovídají. Střed perspektivity O^a je incidentní s nevlastní přímkou jimi určenou, cbd.

c) Stejně se dá dokázat, že střed perspektivity, náležící každé slabě samodružné přímce, je bod nevlastní. Geometrické místo těchto bodů je nevlastní přímka, samodružná přímka x , cbd.

V teorii Dürerovy soustavy perspektivního promítání bylo ukázáno, že různým otočením rovinného pole ϱ_1 přísluší různé samodružné přímky. Tím byla každému rozštěpení soustavy otočením různé velikosti přiřazena určitá samodružná přímka x . Bylo dokázáno, že množina těchto samodružných přímek je rovinný svazek 4. třídy, který se rozpadá ve svazek 2. třídy a další část. V soustavě homotetie platí věta.

Věta 1.5. *V soustavě homotetie náleží různým velikostem otočení rovinného pole ϱ_1 kolem středu O_0 tatáž samodružná nevlastní přímka x . Řídící kuželosečka soustavy homotetie je omezena na nevlastní přímku roviny homotetie.*

Důkaz. Samodružná přímka náležící rozštěpení homotetie otočením o úhel γ



Obr. 105

je podle věty 1,4 přímka nevlastní. V rovině homotetie existuje však právě jedna nevlastní přímka, což dokazuje správnost první části věty. Z toho vyplývá však i správnost druhé části věty.

I při studiu soustavy homotetie a příslušných mechanických pomůcek je prospěšné zavést pojem přímky perspektivity o^a příslušné daní slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$.

Definice 1,2 (přímky perspektivity soustavy homotetie).

Přímka určená středem homotetie O_0 a nevlastním středem perspektivity O^a , příslušícím slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$, se nazývá přímka perspektivity o^a náležící této slabě samodružné přímce (obr. 25 [7], 105).

Nechť je dána homotetie ($O_0, A_1 \rightarrow A_c$), v níž jsou $A_1A_c \equiv a_1 \equiv a_c$, $B_1B_c \equiv b_1b_c$, ... slabě samodružné přímky. Platí věta obdobná větě 1,4 [7].

Věta 1.6. *Trojice přímek $a_c, a'_1, o^a; b_c, b'_1, o^b; \dots$ jsou při též úhlu otočení shodné.*

Důkaz (obr. 26 [7]). Jelikož je $o^a \parallel A_cA'_1, o^b \parallel B_cB'_1, \dots$ stačí dokázat, že trojúhelníky $\triangle O_0A_cA'_1, \triangle O_0B_cB'_1, \dots$ jsou podobné. Vskutku je tomu tak, neboť

a) oba se shodují v úhlech při společném vrcholu O_0 ,

$$\sphericalangle A_cO_0A'_1 = \sphericalangle B_cO_0B'_1,$$

b) pro strany svírající tyto úhly platí podle definice homotetie:

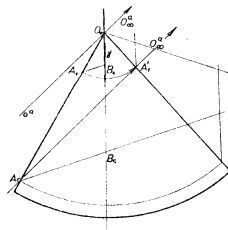
$$O_0A'_1 : O_0A_c = O_0A_1 : O_0A_c = k, \quad O_0B'_1 : O_0B_c = O_0B_1 : O_0B_c = k.$$

Označené trojúhelníky jsou tedy podle věty (*sus*) podobné, cbd.

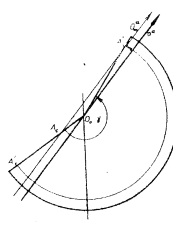
Při konstrukci mechanických pomůcek pro kreslení perspektiv uvedených v kap. I měla značnou důležitost poloha přímky perspektivity vzhledem k úhlu otočení přímky a_1 do polohy a'_1 . I v soustavě homotetie může náležet přímka perspektivity vnitřku úhlu otočení nebo jeho vnějšku. O tom platí věta.

Věta 1.7. *V soustavě homotetie o kladném kvocientu k náleží přímka perspektivity o^a příslušná slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ vnějšku úhlu otočení $\gamma = A_cO_0A'_1$, jestliže je tento úhel $\gamma < 180^\circ$. Přímka perspektivity pak náleží jeho vnitřku, je-li $\gamma > 180^\circ$.*

Důkaz (obr. 106, 107). a) V případě kladného kvocientu homotetie k a úhlu



Obr. 106



Obr. 107

otočení $\gamma < 180^\circ$ náleží úsek $A_c A'_1$ přímky určené těmito body, spojující odpovídající si body v perspektivě řad $a_c \bar{\wedge} a'_1$, vnitřku úhlu otočení $\gamma = \sphericalangle A_c O_0 A'_1$. Osa perspektivity o^σ , která je s přímkou $A_c A'_1$ rovnoběžná, náleží zřejmě vnějšímu úhlu otočení $\gamma = \sphericalangle A_c O_0 A'_1$.

b) V případě úhlu $\gamma > 180^\circ$ náleží úsek $A_c A'_1$ vnějšímu úhlu otočení γ a přímka perspektivity o^σ pak náleží jeho vnitřku, cbd.

Podobně platí další věta.

Věta 1.8. V soustavě homotetie o záporném kvocientu k náleží přímka perspektivity o^σ příslušná slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ vnitřku úhlu otočení $\gamma = \sphericalangle A_c O_0 A'_1$.

Důkaz správnosti věty je opět patrný z obr. 108, kde je $(A_1 A_c O_0) < 0$.

Nyní můžeme řešit následující úlohu.

Úloha 1.1. V homotetii soumístných rovinných soustav dané středem O_0 a dvojicí přiřazených bodů $A_1 \rightarrow A_c$ je sestavit pětiúhelník $A_1 B_1 C_1 \dots$ podobný pětiúhelníku $A B C \dots$ danému průmětem $A_1 B_1 C_1 \dots$

Řešení (obr. 105) vyplývá z předcházejících úvah.

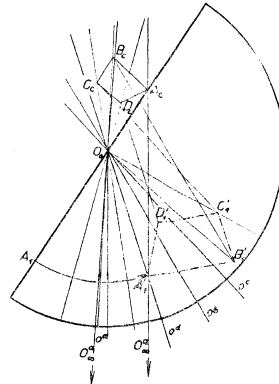
a) Sestrojíme přímky $A_1 O_0, B_1 O_0, \dots$, které jsou incidentní s body A_c, B_c, \dots přiřazenými v homotetii daným bodům A_1, B_1, \dots

b) Otočíme obrazec $A_1 B_1 C_1 \dots$ o velikost libovolného úhlu γ do polohy $A'_1 B'_1 C'_1 \dots$ a určíme směr $A_c A'_1 \equiv O_\infty^\sigma$ přímky perspektivity o^σ náležící slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$. Pro přímku perspektivity o^σ platí: $o^\sigma \in O_0, o^\sigma \parallel A_c A'_1$.

c) Otočíme přímku perspektivity o^σ kolem středu O_0 do polohy $o^b, o^c \dots$

d) Sestrojíme přímky $B'_1 B_c \parallel o^b, C'_1 C_c \parallel o^c, \dots$ a vytkneme průsečky $B_c \equiv B_1 O_0 \cdot B'_1 B_c, C_c \equiv C_1 O_0 \cdot C'_1 C_c, \dots$ které řeší úkol.

Jde zřejmě o zvětšení daného pětiúhelníka $A_1 B_1 C_1 \dots$ v poměru $k = O_0 A_1 : O_0 A_c$.



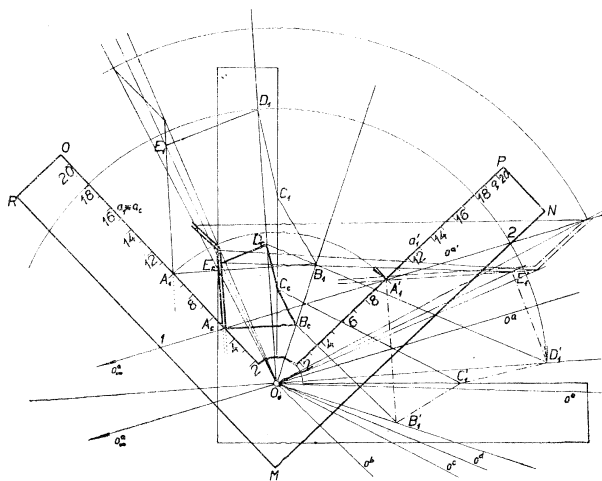
Obr. 108

2. Pantografy navržené na základě rozštěpení homotetie

Uvedených poznatků o soustavě homotetie je možno užít k mechanickému kreslení rovinných obrazců podobných obrazcům daným, tj. k zvětšování nebo zmenšování rovinných obrazců v daném měřítku. Mechanické pomůcky, kterých při konstrukcích užíváme, jsou známé *pantografy*. Těmto přístrojům byla věnována matematiky i techniky značná pozornost, neboť je technická praxe, zvláště kreslení a reprodukce map a jiné obory, vyžadovaly. Tyto mechanismy dosáhly v porovnání

s perspektivními a afinními přístroji značné rozmanitosti a dokonalosti. I zde je patrné ovlivňování teorie praxí.

Nejjednodušší z navrhovaných mechanismů je celuloidové, lepenkové nebo kovové pravítko tvaru písmene V sloužící k zvětšování a zmenšování rovinných obrazců. Je sestrojeno jako pravítko ostroúhlé $MNPOQR$ znázorněné na obr. 28 [7] nebo pravoúhlé na obr. 109. Je rýsováno podél jeho vnitřních hran $a_1 \equiv a_e, a_1'$, které



Obr. 109

zastupují slabě samodružné přímky téhož označení. Jejich průsečík je střed O_0 . Jím prochází osa kolmá k ploše pravítka, již je přístroj centrován, nebo je ve středu O_0 přimontován k nosníku posuvném po lištách rýsovky. Podle poměru zvětšení je na pravítku vyznačena přímka perspektivity o'' nebo je vyznačen její směr 12.

Postup při kreslení perspektivy je uveden v pojednání [7]. Je též při použití pravítka ostroúhlého i pravoúhlého. V obr. 109 je zmenšena část plánu v poměru 2 : 1 a přístroj je v poloze určující perspektivy A_e, C_e bodů A, C daných průmětem A_1, C_1 . Jestliže opatříme hrany pravítka měřítky s nulovým bodem ve středu O_0 , není nutno otáčet originál $A_1B_1 \dots$ o úhel rovný rozpětí pravítka.

Sestrojení bodu perspektivy $A_eB_eC_e \dots$ vyžaduje těchto operací:

- a) vhodného umístění pravítka vzhledem k originálu $A_1B_1C_1 \dots$,
- b) jednoho nastavení pravítka a narysování rayonu podél jeho hrany,
- c) dvojího čtení kót bodů A_1, A_1' a dvojího označení bodu na rýse,
- d) sestrojení přímků incidentní s daným bodem rovnoběžné s přímkou danou dvěma body.

Při konstrukci perspektivy pomocí obou pravítek jsme užívali jejich vnitřních hran. Vnějších hran uijeme u lepenkového nebo celuloidového pantografu tvaru kruhové výseče ostroúhlé nebo pravouhlé, jak ukazují obr. 29, 30 [7]. Jeho hrana O_0A_c představuje slabě samodružnou přímkou $a_1 \equiv a_c$, druhá hrana O_0A_1' pak přímkou a_1' získanou rozštěpením homotetic. Tato forma pantografu má tu výhodu, že na něm lze naryšovat ve větším rozsahu přímkou rovnoběžnou s přímkou perspektivity o'' .

Jestliže opatříme hrany pravítka měřítky s nulovým bodem ve středu O_0 , je možno nahradit otočení originálu odečítáním kót. Postup při jeho užití je uveden v článku [7].

Je třeba učinit dvě poznámky.

1. Je-li úhel otočení γ (úhel hran $a_1 \equiv a_c, a_1'$ pravítka), pak přísluší si rozměry originálu $A_1'B_1'C_1' \dots$ a perspektivy $A_cB_cC_c \dots$ svírají úhel γ . To vyplývá ze základních vlastností otočení.

Je-li udán kvocient homotetic číselně, $k = a/b$, není třeba rýsovat směr přímkou perspektivity $o'' \parallel o''$ na pravítku. Jde-li v tom případě o určení perspektivy M_c bodu M , stačí naznačit na nákrese body P, Q ($P \in a_1', O_0P = a, Q \in a_1 \equiv a_c, O_0Q = b$) měřítka na hranách $a_1', a_1 \equiv a_c$ při jejich incidenci s body M_1, M_1' a vést bodem M_1' rovnoběžku s PQ . Ta určuje na přímce O_0M_1 hledanou perspektivu M_c .

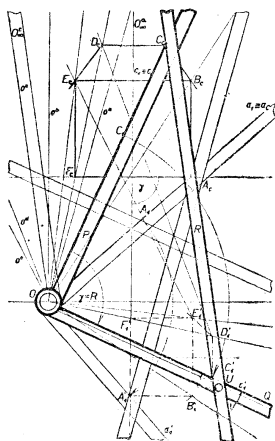
Vzhledem k vzájemné poloze otočeného originálu a perspektivy obrazce incidentního se základní rovinou q je výhodné užít při rozštěpení homotetic otočení $\gamma = 90^\circ$. V tom případě jsou odpovídající si rozměry obou obrazců k sobě kolmé, jak ukazují obr. 29, 30 [7]. Chceme-li získat hlavní rozměr výsledního obrazce v určitém směru, např. v poloze rovnoběžné s hlavní vertikálou, položíme originál tak, aby uvažovaný jeho rozměr byl vodorovný.

Jestliže má přístroj sloužit stále zvětšení nebo zmenšení v téměř poměru $k = a/b$, můžeme vypustit označení směru přímkou perspektivity o'' a rýsování rovnoběžky s o'' bodem otočeného originálu $A_1'B_1'C_1' \dots$. Učiníme to tím, že desku přístroje opatříme osnovou jemných přímků dostatečně hustých směru A_cA_1' nebo směru $PQ, P \in a_1 \equiv a_c, Q \in a_1', k = a/b = O_0P/O_0Q$. Tak např. je bod C_c určen okamžitě přímkou osnovy incidentní s bodem C_1' , je-li hrana a_1' přístroje incidentní s bodem C_1' .

Výhodná je úprava pantografu ve formě dvojpravítka s pomocným posuvným pravítkem (obr. 31) [7], [110]. Obě části dvojpravítka, P, Q , jejichž hrany představují přímkou $a_1 \equiv a_c, a_1'$ jsou spojeny kloubem, jímž mohou být k sobě upevněny v každé vzájemné poloze. Osa kloubu kolmá k rovině obou pravítek je ve tvaru jehlice, která může být zapuštěna v nákrese. Přístrojem lze pak otáčet kolem této osy. Případně může být přístroj namontován na nosník, posunovatelný po lištách rýsovací

desky a dostředěn osou kloubu ve středu homotetie tak, jak tomu bylo u pravítkového perspektografu.

Třetí pravítko R je spojeno čepem U s objímkou V , pomocí které jím lze posouvat po pravítku Q . Čepem U lze pravítko R připevnit k objímce, takže jeho hrana, představující směr přímky perspektivity $o^{a'} \equiv A_1' A_c$ příslušné slabě samodružné průmce $a_1 \equiv a_c$, zachovává při posouvání po pravítku Q stále též směr.



Obr. 110

Při zvětšování nebo zmenšování obrazců si počínáme takto: a) Dostředíme přístroj a uvedeme jeho části do potřebné vzájemné polohy. Obě pravítka P, Q upevníme šroubem O_0 , aby svírala žádaný úhel otočení γ . V obr. 110 je to úhel $\gamma = 90^\circ$, v obr. 31 [7] úhel $\gamma = 60^\circ$.

b) Pravítko R upevníme k objímce V , aby pro jeho hranu $A_1 A_1'$ platilo: $k = a/b = = O_0 A_1' / O_0 A_c$. Proto je výhodně, jsou-li hrany $a_1 \equiv a_c, a_1'$ pravítek P, Q , opatřeny měřítky a je-li možno otáčet pravítkem R kolem bodu hrany a_1' pravítka Q .

c) Položíme originál $A_1' B_1' C_1' \dots$ do vhodné polohy, abychom obdrželi zvětšený obraz na nákreseň. Žádáme-li, aby určitá strana zvětšeniny měla danou polohu, např. vodorovnou, položíme originál při úhlu otočení $\gamma = 90^\circ$ příslušnou stranou do svislé polohy (obr. 30 [7]). Při úhlu otočení $\gamma = 60^\circ$ musí svírat strana originálu s příslušnou stranou zvětšeniny úhel 60° (obr. 31 [7]).

d) Chceme-li určit vrchol C_c zvětšeniny (obr. 110), otočíme přístrojem tak, aby hrana a_1' pravítka Q byla incidentní s bodem C_1' originálu a narýsujeme rayon podél hrany $a_1 \equiv a_c$ pravítka P . (Hrany pravítek nabývají polohy $c_1 \equiv c_c, c_1'$.)

e) Při této poloze pantografu posuneme pravítko R po pravítku Q , aby jeho hrana byla incidentní s bodem C_1' a narýsujeme rayon podél této hrany. Průsečík obou rayonů je hledaný vrchol zvětšeniny $C_c \equiv (a_1 \equiv a_c) \cdot C_1' C_c$.

Nevýhoda přístroje spočívá v tom, že pravítko R nespočine těsně na nákreseň a vzniká při rýsování druhého rayonu nebezpečí odchylky. Nevýhoda je dále i v tom, že druhý rayon není rýsován celý, je přerušen v místě polohy pravítka P a bod C_c je dán jako krajní bod polopřímky, nikoli jako průsečík dvou přímek. Tento nedostatek je možno po otočení pravítka z nákresey odstranit doplněním rayonu. Nedostatek lze odstranit nebo aspoň zmírnit vhodnou úpravou přístroje po technické stránce.

3. Kopírovací mechanické pomůcky sestrojené na základě rozštěpení identity

V elementární geometrii se při definici homotetie vylučuje kvocient homotetie $k = 0$; 1. Je zřejmé, že pro $k = 0$ odpovídá každému bodu A_1 roviny homotetie jeden a týž bod, střed homotetie O_0 . Příbuznost zřejmě degeneruje. Pro $k = 1$ přejde homotetie v identitu, tj. každý bod roviny homotetie je samodružný. Tohoto případu je možno užít a upravit uvedené druhy pantografů v kopírovací mechanické pomůcky.

Nechť je dána homotetie středem O_0 a kvocientem $k = 1$, což je identita roviny homotetie (obr. 32 [7]). Tento případ homotetie nastane zřejmě tehdy, jestliže základní rovina ϱ splýne s perspektivní průmětnou π a tím Ω -průměty. A_1, B_1, \dots bodů A, B, \dots splýnou s jejich perspektivními průměty A_c, B_c, \dots .

Lze ukázat, že platí věty obdobné větám uvedeným v pojednání o homotetiích, např. věta Stevinova, věta o určenosti soustavy jejím obrazem atd. ... Lze též zavést dříve uvedené pojmy, jako rozštěpení identity, střed perspektivity O^o a přímka perspektivity o^o náležející slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$, samodružná přímka x, \dots Uvedené pojmy nebudeme zvláště zavádět definicemi a platnost vět nebudeme dokazovat, nýbrž vyjádíme od identity jako speciálního případu homotetie.

Nechť je dána identita $A_1 \equiv A_c, B_1 \equiv B_c, \dots$ roviny $\pi \equiv \varrho$. Vyjádříme ji homotetií kvocientu $k = 1$ tím, že zvolíme libovolný bod O_0 za její „střed“. Tím jsou dány slabě samodružné přímky $a_1 \equiv a_c, b_1 \equiv b_c, \dots$ – Rozštěpme tuto identitu otočením soustavy $A_1 B_1 \dots$ roviny ϱ_1 o velikost daného úhlu γ kolem „středu“ identity O_0 . Rozštěpení je dáno rozštěpením slabě samodružné přímky $a_1 \equiv a_c$ otočením a_1 do polohy a'_1 o velikost úhlu γ . Platí důležitá věta o perspektivnosti bodových řad a_c, a'_1 jako dříve. Střed perspektivity O^o obou řad je nevlastní bod přímky $A'_1 A_c$, přímka perspektivity o^o náležející slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ je $o^o \parallel A'_1 A_c$, samodružná přímka x protilehlá k středu $O_0 \equiv X$ je nevlastní přímka roviny identity.

Důležitá je vlastnost přímky perspektivity o^o náležející slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ po jejím rozštěpení.

Věta 3.1. Přímka perspektivity o^o náležející slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ je rovnoběžná s přímkou $A'_1 A_c \equiv A'_1 A_1$. Trojúhelník $O_0 A_1 A'_1$ je rovnoramenný.

Důkaz správnosti věty je na základě identity $A_1 \equiv A_c$ zřejmý. Proto je možno řešit hned následující úlohu.

Úloha 3.1. Je narysovat obrazec $A_c B_c C_c \dots$ shodný s daným obrazcem $A'_1 B'_1 C'_1 \dots$, aby např. jeho strana $A_c B_c$ zaujala danou polohu. (Pozn.: Originál $ABC \dots$ je vzhledem k předešlým úvahám označen $A'_1 B'_1 C'_1 \dots$ Stejně označení je v dalších obrazech.)

Řešení provedeme takto:

- Zvolíme střed O_0 a označíme $A_1 \equiv A_c, B_1 \equiv B_c, \dots$
- Otočíme stranu $A_1 B_1$ o daný úhel γ do polohy $A'_1 B'_1$ a sestrojíme obrazec $A'_1 B'_1 C'_1 \dots$ dříve narysovaný.
- Spojíme vrchol C'_1 se středem O_0 přímkou c'_1 a sestrojíme středem O_0 přímkou $c_1 \equiv c_c$, aby $\sphericalangle C'_1 O_0 C_c = \gamma$.

d) Vzhledem k tomu, že $\triangle C_1' O_0 C_c$ je rovnostranný, vedeme bodem C_1' přímkou $C_1' C_c$, aby $\sphericalangle O_0 C_1' C_c = 90^\circ - \gamma/2$. Bod $C_c \equiv (c_1 \equiv c_c)$. $C_1' C_c$ řeší úkol.

Na základě toho zhotovíme kopírovací přístroj tvaru pravouhlého pravítka, tvaru kruhové výseče, nebo jako pravítkový mechanismus, obdobně jak je nakresleno v obr. 109, 29 [7], 110.

První tvar kopírovacího pravítka není narýsován. V obr. 33 [7] je nakresleno kosoúhlé lepenkové nebo celuloidové kopírovací pravítko tvaru kruhové výseče, na němž je vyznačen směr přímky perspektivity body P, Q . Při kopírování obrazce $ABCD$ si počínáme takto:

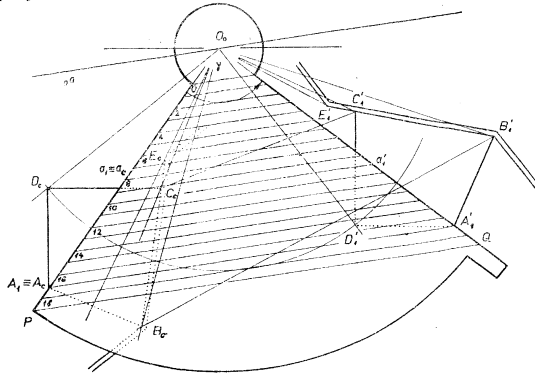
a) Zvolíme „střed identity“ O_0 a umístíme obrazec $ABCD$ vzhledem k středu O_0 do polohy $A_1' B_1' C_1' D_1'$ tak, aby byly splněny žádané podmínky. Pravítko centrujeme v bodě O_0 .

b) Při sestrojení bodu G_c kopie otočíme přístrojem, aby jeho hrana g_1' byla incidentní s bodem $G \equiv G_1'$ originálu a narýsuje podél druhé hrany $g_2 \equiv g_c$ přímku. Vyznačíme oba body P, Q na papíře rysu.

c) Odsuneme pravítko a sestrojíme přímkou $G_1' G_c \parallel PQ$. Bod $G_c \equiv (g_1 \equiv g_c)$. $G_1' G_c$ je bod kopie.

Podobně pracujeme i s ostatními tvary pravítek. Bod kopie sestrojíme jedním nastavením přístroje, vedením rayonu a sestrojením přímky rovnoběžné s přímkou danou dvěma body.

V obr. 111 je znázorněno totéž celuloidové pravítko s vyrytou soustavou přímek rovnoběžných se směrem přímky perspektivity $a^a \parallel PQ$. Pravítko je v poloze, při níž se kopíruje bod A .

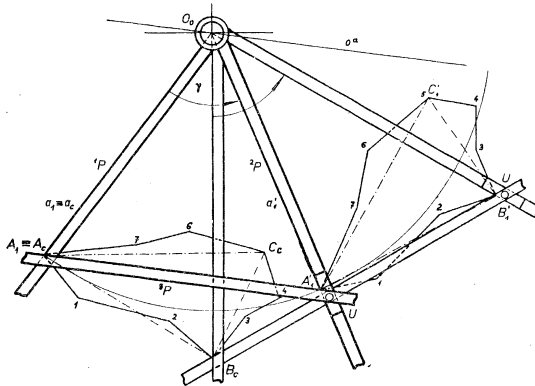


Obr. 111

Při této konstrukci pravítka odpadá jeho odsunutí po narysování přímky O_0A_c a po sestrojení rovnoběžky $A_1'A_c \parallel PQ$. Není nutno rýsovat ani přímku O_0A_c .

Při kopírování obrazce $ABC \dots$ si počínáme takto:

- Podle daných okolností umístíme originál $ABC \dots$ do patřičné polohy $A_1'B_1'C_1' \dots$
- Centrujeme pravítko a otočíme jím, až jeho hrana $O_0Q \equiv a_1'$ se stane incidentní s bodem $A \equiv A_1'$ originálu.
- Čteme kótu bodu A_1' , která v obr. 111 je 17, a vyznačíme tužkou bod A_c o kótě 17 na druhé hraně $O_0P \equiv a_1 \equiv a_c$ pravítka. Tento bod A_c řeší úkol.
Tak je v obr. 111 sestrojena kopie části terénu.



Obr. 112

Právě tak je možno určit body kopie pomocí pravítkového přístroje znázorněného na obr. 112. Přístroj obsahuje tři pravítka, 1P , 2P , 3P , z nichž první dvě zastupují přímky $O_0A_c \equiv a_1 \equiv a_c$, $O_0A_1' \equiv a_1'$, třetí zastupuje přímku $A_1'A_c \parallel PQ$. Obě první pravítka tvoří úhel otočení γ , v němž se dají upevnit šroubem O_0 . Pravítko 3P je posuvatelé pomocí objímky U po pravítku 2P a platí pro ně: $O_0A_1' = O_0A_c$ nebo: $\sphericalangle A_cA_1'O_0 = 90^\circ - \gamma/2$.

V této poloze se dá upevnit šroubem U .

Při kopírování bodu $A \equiv A_1'$ originálu si počínáme takto:

- Položíme originál obrazce do náležité polohy, centrujeme přístroj a upevníme pravítka.

- b) Otočíme přístrojem, až hrana pravítka 2P se stane incidentní s bodem $A \equiv A'$ originálu.
- c) Posuneme pravítko 3P , až se jeho hrana stane incidentní s bodem A'_1 .
- d) Vytkneme bod A_c v průsečíku hran pravítek ${}^1P, {}^3P$, který řeší úkol.

LITERATURA

- [1] *Kazimierz Bartel*: Perspektywa malarska, Warszawa 1955.
- [2] *N. F. Četveruchin*: Metody načertateľnoj geometrii i jejo prilozhenija — Sbornik statěj, Moskva 1955.
- [3] *Albrecht Dürer*: VNderweysung der messung Nürnberg 1525.
- [4] *Walther Dyck*: Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, München 1892.
- [5] Festscherift der königlichen techn. Hochschule zu Berlin, Berlin 1884.
- [6] *C. De La Fresnay*: Les Faisceaux à projeter. La construction moderne, Paris 1909.
- [7] *František Havelka*: Některé speciální případy Fresnayeovy mechanické konstrukce perspektiv, Acta universitatis Palacianae Olomucensis 1961.
- [8] *Vincenc Jarolimek*: Základové geometrie polohy v rovině i v prostoru, Praha 1908 (Česká Matice technická, 1. sv.)
- [9] *František Kadeřávek*: Perspektiva, Praha 1922.
- [10] *F. Kadeřávek, J. Klíma, J. Koumanský*: Deskriptivní geometrie, Praha 1929.
- [11] *Josef Kochman*: Technické kreslení, SNTL, Praha 1956.
- [12] *J. H. Lambert*: Freye Perspektive oder Anweisung... Zurich 1759 Anlage zur Perspektive, Zurich 1752.
- [13] *Le Colonel A. Laussedat*: Recherches sur les instruments, les méthodes et le dessin topographique, Gauthier-Villard, Paris 1898 (1. díl), 1903 (2. díl).
- [14] *Emil Müller*: Vorlesungen über darstellende Geometrie, Franz Deuticke, Leipzig u. Wien 1923.
- [15] *J. J. Pillet*: Traité de perspective linéaire, Paris 1901.
- [16] *Boh. Růžička*: Zopakujme si technické kreslení, Technický výběr sv. 24, Praha 1960.
- [17] *Artur Salner*: Prostorové zobrazování ve strojnictví, Praha 1954.
- [18] *Georg Scheffers*: Lehrbuch der darstellenden Geometrie, J. Springer, Berlin 1920.
- [19] *Alois Urban*: Deskriptivní geometrie, Praha 1955.
- [20] *Jan Vojtěch*: Projektivní geometrie, nákl. JČMF, Praha 1932.
- [21] *A. O. Volberg*: Deskriptivní geometrie, nákl. Českoslov. akademie věd, Praha 1953.
- [22] Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, roč. 31 (1922)
- [23] Journal für reine und angewandte Mathematik, roč. 95 (1883).
- [24] Sitzungsberichte, Akademie der Wissenschaften in Wien, Oddíl IIa, roč. 127 (1918), 1. sešit, str. 699. Oddíl IIa, roč. 131 (1922), 1. sešit, str. 321.
- [25] Technische Blätter, roč. 51 (1919).
- [26] Zeitschrift für Instrumentenkunde — vychází v Berlíně od r. 1881.
- [27] *W. Meyer Zur Capellen*: Mathematische Instrumente, Alademische Verlagsgesellschaft Leipzig 1941.
- [28] *G. B. Vale, G. L. Ušakov*: Mechanizmy dla čerčeniya i preobrazovanija projekcii, Charkov 1960.

Резюме

ТЕОРИЯ СИСТЕМЫ ДЮРЕР И НЕКОТОРЫХ
МЕХАНИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ ПЕРСПЕКТИВ
И ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

ФРАНТИШЕК ГАВЕЛКА

Механические конструкции перспектив обращали на себя внимание механиков, математиков, техников и других, интересующихся перспективой во время всего ее развития. Период расцвета этих конструкций начинается в восьмидесятих годах прошлого века. С тех пор было создано ряд механических пособий и приспособлений, из которых некоторые по различным причинам не получили применения, и другие, наоборот занимают внимание современных специалистов. К числу этих конструкций принадлежит конструкция перспективы Френе [6] получившая признание К. Бартель [1] и С. А. Смирновым [2]. Очерк этой теории приведен в статье [7].

Основой этой конструкции является система, состоящая из центра проектирования O , основной проекционной плоскости π , основной плоскости ρ которые удовлетворяют условиям: $O \notin \pi$, $O \notin \rho$, $\pi \perp \rho$.

Впервые эту систему исследовали Л. Батиста Альберти и особенно А. Дюрер и поэтому она носит название системы Дюрер. В настоящей работе показывается, что система Дюрер является эквивалентной перспективной коллинеацией в плоскости π между перспективной проекцией основной плоскости ρ и повернутой плоскости ρ вокруг основной прямой в проективную плоскость π . Этот поворот можно заменить определенной параллельной проекцией, которая в работе называется проекцией Ω .

Бартель и Смирнов приводят основы теории Дюрер — системы (перспективная коллинеация в плоскости π). Автор настоящей работы обозначает основные операции конструкции Френе, перевод перспективной коллинеацией (образ системы Дюрер) в общую коллинеацию, с помощью поворота двумерного поля ρ_1 вокруг центра перспективной коллинеации на произвольный угол $\gamma \neq 0^\circ, 180^\circ$ разрывом перспективной коллинеации [7]. Автор развивает теорию системы Дюрер и различает у нее три рода: а) первая система Дюрер ($d < v$), б) вторая система Дюрер ($d = v$), в) третья система Дюрер ($d > v$). Вводит такие новые понятия, как *прямая перспективы*, *инвариантная тройка* a_c, a'_1, o^c , *окружность перспективы*, *границные точки и прямые*, *направляющее коническое сечение* и т. п. На основе этой теории предлагает некоторые механические приспособления перспективы в виде перспективной линейки, простые, легко изготавливаемые и поэтому дешевые, *коллинеограф* и *перспектограф*. Определяет

условия для различных положений прямой перспективы и, основываясь на этом, сможет линейкам заранее придавать различные формы.

Теории системы Дюрера перспективного проектирования расширяет на теории параллельного проектирования и на теории гомотетии и предлагает некоторые *аффинографы*, *аксонографы* и *пантографы*. Особый случай гомотетии является идентическим, и теория на основе конструкции Френе приводит к предложению некоторых *копирующих приспособлений*.

Надо заметить, что все приведенные механические приспособления имеют тот же теоретический фундамент.

Zusammenfassung

THEORIE DES DÜRERSCHEN SYSTEMS UND EINIGER MECHANISCHEN PERSPEKTIV- SOWIE PARALLELPROJEKTIONEN

FRANTIŠEK HAVELKA

Mechanische Konstruktionen von Perspektiven fesselten seit jeher die Aufmerksamkeit von Mechanikern, Mathematikern, Technikern und anderen Interessenten für die Perspektive während ihrer ganzen Entwicklung. Die Blütezeit dieser Konstruktionen beginnt in den achtziger Jahren des vorigen Jahrhunderts. Seit dieser Zeit wurden mehrere mechanische Hilfsmittel und Apparate konstruiert, von denen manche in Vergessenheit geraten sind, andere im Gegenteil sogar noch die Aufmerksamkeit zeitgenössischer Fachleute erregen. Zu diesen Konstruktionen gehört die besonders von K. Bartel [1] und S. A. Smirnov [2] geschätzte Fresnaye-Perspektiven-Konstruktion [6]. Im Artikel [7] ist ein Abriss ihrer Theorie zu finden.

Die Grundlage dieser Konstruktion bildet ein aus der Mitte der Projektion O , aus der Projektionsebene π und der Grundebene ϱ bestehendes System. Das System erfüllt folgende Bedingungen: $O \notin \pi$, $O \notin \varrho$, $\pi \perp \varrho$. Als erster befasste sich mit diesem System *L. Battista Alberti* und besonders *Albrecht Dürer*, nach welchem das System benannt wurde. In dem vorliegenden Artikel wird gezeigt, dass das Dürersche System äquivalent ist mit einer perspektivischen Kollineation in der π -Ebene zwischen der perspektivischen Projektion der Grundebene ϱ und der gedrehten Ebene ϱ in die Projektions-Ebene π . Diese Drehung lässt sich durch eine Parallelprojektion, die Ω -Projektion, ersetzen.

Bartel und Smirnov berichten über die ersten Grundlagen der Theorie des Dürerschen Systems. Der Verfasser des vorliegenden Artikels entwickelt diese Theorie

weiter, führt eine Reihe neuer Begriffe, wie zum Beispiel die *Zerspaltung der perspektivischen Kollineation*, die *Perspektivitäts-Gerade*, das *invariante Tripel* a_c, a'_1, o^a , den *Perspektivitätskreis*, die *Grenzpunkte* und *Grenzgeraden*, den *Leitkegelschnitt* u. dgl. Er unterscheidet drei Arten des Dürerschen Systems: $d < v$, $d = v$, $d > v$.

Auf Grund dieser Theorie entwirft der Verfasser einige perspektivische mechanische Hilfsmittel in der Form von perspektivischen Linealen, einfache, leicht zu konstruierende und mithin billige *Kollineo-* und *Perspektographen*. Er bestimmt die Bedingungen für die verschiedenen Lagen der Perspektivitäts-gerade und auf Grund dessen kann er den Linealen im vorhinein verschiedene Formen geben.

Er erweitert die Theorie des Dürerschen Systems der perspektivischen Projektion in die Theorie der Parallelprojektion, sowie in die Theorie der Homotätie und entwirft einige *Affino-* und *Pantographen*. Einen Sonderfall der Homotätie stellt die Identität dar, deren Theorie auf Grund der Fresnaye-Konstruktion zum Entwurf einiger *Kopierhilfsmittel* führt.

Es wäre hinzufügen, dass alle angeführten mechanischen Konstruktionen dieselbe theoretische Grundlage haben.