Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Vratislav Vyšín; Josef Tillich

O těsné analogii mezi periodickými ději v poli gravitačním a elektromagnetickém

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 2 (1961), No. 1, 103--109

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/119784`

1961 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS.
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM. 7.

Katedra teoretické fyziky a astronomie.
Vedoucí: Prof. RNDr. et DrSc. Bedřich Havelka.

O TĚSNÉ ANALOGII MEZI PERIODICKÝMI DĚJI V POLI GRAVITAČNÍM A ELEKTROMAGNETICKÉM

V. VYŠÍN A J. TILLICH
(Došlo do redakce 4. října 1960)

Úkolem této práce je ukázat analogii mezi periodickými ději v poli elektromagnetickém a poli gravitačním; tuto analogii pak vyjádřit formálně stejným matematickým aparátem a to takovým způsobem, že děje v poli elektromagnetickém jsou studovány jako analogie dějů v gravitačním poli, nejen po stránce matematické, ale i po stránce fyzikální. Existující práce se zabývaly analogiemi mezi oscilačním obvodem a lineárním harmonickým oscilátorem; při analogii mezi oscilačním obvodem a kyvadlem vznikaly jisté potíže při matematické formulaci problému. Tyto nesnáze se snaží naše práce vysvětlit.

Faktem, že některé fyzikální děje, patřící často do zcela odlišných odvětví fyziky, bylo možno popisovat matematicky velmi podobnými vztahy, se zabývala již celá řada fyziků. Na základě formálně matematicky vybudovaných analogií bylo pak možno aplikovat výsledky některých fyzikálních disciplín na jiné, méně pokročilé a tím najít výsledky nové nebo dosavadní metody řešení značně zjednodušit. Tak např. mechanika převzala některé poznatky z řešení elektrického oscilačního obvodu pro řešení kmitavých obvodů mechanických apod. Elektromechanických analogií se v poslední době využívá zejména ke konstrukci analogových matematických strojů.

Uvažme nyní nejběžněji užívanou analogii mezi kmitavým obvodem elektrickým a harmonickým oscilátorem. Už z názoru, stejně jako porovnáním diferenciálních rovnic, kterými se děje v obvodech řídí, vidíme, že lze provést analogii mezi těmito veličinami:

napětí U v oscilačním obvodu je analogické síle	F v mech. obvodu	
proud I	rychlosti	v
náboj Q	výchylce	q

Též konstanty lze vyjádřit analogicky; nás bude v dalším zajímat pouze ten fakt, že indukčnosti L odpovídá v mechanické analogii hmota m. Podrobnější tabulku ostatních vztahů mezi veličinami elektrickými a mechanickými publikuje ve své práci L. Franc: O některých elektromechanických analogiích, PVVŠ (v tisku).

Tato analogie po formální stránce naprosto vyhovuje; podobná analogie mezi oscilačním obvodem a kyvadlem, které se donedávna běžně užívalo i v pedagogické praxi, však narážela na jisté potíže, jak ve zmíněné práci L. Franc ukázal. Zatímco potenciální energie nabitého kondensátoru je dána vztahem

$$W = \frac{1}{2} QU\,, \tag{1}$$

kde Q je náboj a U napětí mezi deskami, je potenciální energie kyvadla dána vztahem

$$W' = mgh \tag{2}$$

kde m je hmota kyvadla, g gravitační zrychlení, h rychlostní výška. Ve vztahu (2) se číselný faktor $\frac{1}{2}$ nevyskytuje.

Pokusme se odstranit tuto nesrovnalost:
Uvažujme nejprve potenciální energii soustavy dvou bodových nábojů Q_1 a Q_2, které se nacházejí ve vzdálenosti r a nejsou v žádném vnějším silovém poli. Potenciální energie náboje Q_1 v poli náboje Q_2 je zřejmě dána vztahem

$$W_1 = Q_1 V_1\,, \tag{3}$$

kde V_1 je potenciál od náboje Q_2 v místě náboje Q_1. Podobně pro potenciální energii náboje Q_2 v poli náboje Q_1 můžeme psát

$$W_2 = Q_2 V_2\,. \tag{4}$$

Zobecníme-li tuto úvahu i pro případ rovinného kondensátoru, pak vzhledem k tomu, že $Q_1 = -Q_2 = Q$, máme

$$W = \frac{1}{2} Q(V_1 - V_2) = \frac{1}{2} QU\,, \tag{5}$$

kde U je rozdíl potenciálů čili napětí mezi deskami kondensátorů.

Analogickou situaci můžeme uvažovat v polích gravitačních. Máme-li dvě hmoty m_1 a m_2, pak potenciální energii hmoty m_1 v poli hmoty m_2 vyjádříme

$$W_1' = m_1 \psi_1\,, \tag{6}$$

kde ψ_1 je gravitační potenciál, daný známým výrazem

$$\psi_1 = \varkappa \frac{m_2}{r}\,, \tag{7}$$

kde $\varkappa$ je gravitační konstanta. Podobně potenciální energii hmoty m_2 vyjádříme

$$W_2' = m_2 \psi_2\,, \tag{8}$$

což nám opět dovoluje vyjádřit potenciální energii ve tvaru formálně stejném jako v prvním případě

$$W' = \frac{1}{2}(W_1' + W_2') = \frac{1}{2}(m_1\psi_1 + m_2\psi_2)\,. \tag{9}$$

V tomto případě ovšem nelze uvažovat hmoty opačného znaménka; výraz v závorce však je možno přímo sloučit, což dá po dosazení

$$W' = \varkappa \frac{m_1 m_2}{r}\,. \tag{10}$$

Pro případ, že $m_2 = M$ je hmota Země, R její poloměr, pak pro malé výšky h nad povrchem

$$\varkappa \frac{m_1 M}{(R + h)^2} = m_1 g \,,$$

takže

$$W' = m_1 g (R + h) \tag{11}$$

a položíme-li $W_0 = m_1 g R = 0$, je

$$W' = m_1 g h \,. \tag{12}$$

Ukážeme však obecnější metody, kterými lze vést analogii mezi oscilačním obvodem a kyvadlem. Spočítejme si nejprve dráhový integrál síly, v němž podle uvedených analogických vztahů píšeme místo síly F napětí U a místo zobecněné souřadnice q (nastupuje na místo výchylky) náboj Q. Protože analogicky s druhým Newtonovým zákonem $F = m \,.\, a$ platí

$$U = L \frac{d^2 Q}{dt^2} \,, \tag{13}$$

máme

$$W'_k = \int U dQ = L \int \frac{d^2 Q}{dt^2} dQ = L \int \frac{d\dot{Q}}{dQ} \frac{dQ}{dt} dQ = L \int \dot{Q} d\dot{Q}$$

Integrujeme-li od $\dot{Q}_o$ (položíme $\dot{Q}_o = 0$) do $\dot{Q}$, dostáváme výraz analogický vztahu pro kinetickou energii

$$W'_k = \frac{1}{2} L \dot{Q}^2 \,. \tag{14}$$

Uvažme, že v mechanickém případě se jedná pouze o pohyb hmoty jistou rychlostí; v případě vybíjení kondensátoru si však současně vyměňují místo kladný a záporný náboj, takže vnějším obvodem teče vlastně proud tvořený pohybem obou těchto nábojů, tedy dvojnásobný. Pak výsledná kinetická energie při vybíjení kondensátoru musí být rovna součtu kinetických energií, příslušejících přemístění každého náboje zvlášť, tedy

$$W_k = \frac{1}{2} L \dot{Q}_+^2 + \frac{1}{2} L \dot{Q}_-^2 \,.$$

Protože ale $\dot{Q}_+^2 = \dot{Q}_-^2 = \dot{Q}^2$, máme

$$W_k = L \dot{Q}^2 \,. \tag{15}$$

Poznamenejme pro úplnost, že vypočítáme-li časový integrál napětí

$$\int U \, dt = L \int \frac{d^2 Q}{dt^2} dt \,,$$

dostaneme při počátečních podmínkách $\dot{Q}(0) = \dot{Q}_o = 0$, $\dot{Q}(t) = \dot{Q}$

$$\int U \, dt = L \dot{Q} = \Phi \,, \tag{16}$$

kde Φ je magnetický indukční tok; tato rovnice nám tedy vlastně dává Faradayův zákon elektromagnetické indukce.

Hledejme dále výraz pro potenciální energii. V mechanice lze v případě stacionárních vazeb považovat potenciální energii za funkci pouze zobecněné souřadnice (v tomto případě výchylky q)

$$W_p = W_p(q)\,. \tag{17}$$

Zvolíme-li rovnovážný stav soustavy za počátek odčítání potenciální energie, musí

$$W_p(q_o) = 0 \tag{18}$$

a je zřejmé, že v tomto případě je rovna nule i zobecněná síla

$$\left(\frac{dW_p}{dq}\right)_{q_0} = 0\,. \tag{19}$$

Rozvineme-li funkci $W_p(q)$ v okolí rovnovážné polohy podle Taylorovy věty, máme

$$W_p(q) = W_p(q_o) + \left(\frac{dW_p}{dq}\right)_{q_0} (q - q_0^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2W_p}{dq^2}\right)_{q_0} (q - q_0)^2 + \dots,$$

čili pro malé kmity lze vzhledem k (18) a (19) psát

$$W_p(q) = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2W_p}{dq^2}\right)_{q_0} (q - q_o)^2. \tag{20}$$

V analogii pak lze psát (protože v rovnovážném stavu $Q_o = 0$)

$$W_p\,(Q) = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2W_p}{dQ^2}\right)_{Q_0} Q^2 \tag{21}$$

a dosadíme-li pro kondensátor $W_p = Q\,.\,V$, vyjde

$$\left(\frac{d^2W_p}{dQ^2}\right)_{Q_0} = \frac{2}{C}\,, \tag{22}$$

kde C je kapacita kondensátoru, takže

$$W_p(Q) = \frac{1}{C}\,Q^2. \tag{23}$$

Konstruujeme-li pak ryze analogicky Lagrangeovu funkci

$$L = W_K - W_p = L\dot{Q}^2 - \frac{1}{C}\,Q^2\,, \tag{24}$$

můžeme napsat Lagrangeovu rovnici

$$\frac{d}{dt}(2\,L\dot{Q}) + \frac{2}{C}\,Q = 0\,,$$

$$\ddot{Q} + \frac{1}{LC}\,Q = 0\,, \tag{25}$$

jež má obecné řešení

$$Q = A\cos\sqrt{\frac{1}{LC}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{1}{LC}}\,t. \tag{26}$$

Dosazením počáteční podmínky $Q = Q_{max}$ a $\dot{Q} = 0$ pro $t = 0$, máme

$$Q = Q_{max} \cos \sqrt{\frac{1}{LC}}\, t. \tag{27}$$

Náboj na kondensátoru nabývá vždy maximální hodnoty po době T dané vztahem

$$\sqrt{\frac{1}{LC}}\, T = 2\pi\,,$$

takže odtud plyne pro dobu kmitu oscilačního obvodu Thomsonův vztah

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \tag{28}$$

Tento výsledek je ostatně možno dostat i z úvahy elementární — z principu zachování energie. Celková energie kondensátoru je

$$W = W_k + W_p = L\dot{Q}^2 + \frac{1}{C}\, Q^2\,. \tag{29}$$

Před vybíjením má kondensátor pouze energii potenciální

$$W_o = \frac{1}{C}\, Q_{max}^2\,.$$

Ze zachování energie plyne

$$L\dot{Q}^2 + \frac{1}{C}\, Q^2 = \frac{1}{C}\, Q_{max}^2 \tag{30}$$

čili

$$\dot{Q} = \pm \sqrt{\frac{Q_{max}^2 - Q^2}{LC}}\,.$$

U odmocniny musíme zvolit znaménko minus, protože se jedná o úbytek náboje. Separace proměnných pak dává

$$-\frac{dQ}{\sqrt{Q_{max}^2 - Q^2}} = \sqrt{\frac{1}{LC}}\, dt.$$

Integrací dostáváme

$$\arccos \frac{Q}{Q_{max}}\Bigg|_1^{\frac{Q}{Q_{max}}} = \sqrt{\frac{1}{LC}}\, t\,,$$

takže

$$Q = Q_{max} \cos \sqrt{\frac{1}{LC}}\, t\,,$$

což dává stejný výsledek jako v předešlém případě.
Podle uvedeného postupu můžeme tedy srovnat oba výrazy pro dobu kyvu. Dostáváme pro oscilační obvod a kyvadlo

$$T = 2\pi \sqrt{LC} \qquad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \tag{31}$$

Dimensionální analýza ukáže, že výrazy $\sqrt{LC}$ a $\sqrt{\frac{l}{g}}$ jsou si ekvivalentní, použijeme-li uvedených mechanických a elektromagnetických analogií. My ovšem můžeme provést toto srovnání následujícím způsobem: Výraz $\sqrt{LC}$ lze přepsat dosazením z rovnice (22)

$$\sqrt{LC} = \sqrt{L \frac{2}{\left(\frac{d^2W_p}{dQ^2}\right)_{Q_0}}} \tag{32}$$

V případě kyvadla položíme $L = m$ a dosadíme do výrazu $\left(\frac{d^2W_p}{dQ^2}\right)_{Q_0}$ zobecněnou souřadnici, totiž výchylku. Musíme si však uvědomit, že tento výraz vyjadřuje změnu potenciální energie v závislosti na náboji nebo na výchylce. Náboj ovšem teče v obou směrech a nabíjí-li kladný náboj jednu z desek kondensátoru, odpovídá tomu výchylka analogického kyvadla. Ovšem pohyb tohoto náboje je provázen pohybem náboje záporného v opačném směru a tím se nabíjí druhá deska kondensátoru záporně. Analogické kyvadlo se opět vychyluje, ale opačným směrem a je tudíž zrcadlovým obrazem prvého kyvadla, tak jako záporný náboj lze považovat za zrcadlový obraz náboje kladného.

Jelikož v daném okamžiku na obou deskách je stejné množství náboje Q, musí mu odpovídat i stejná výchylka q. Pak ovšem musíme v druhé derivaci potenciální energie brát v úvahu energii obou kyvadel a tak dostáváme pro jejich společnou potenciální energii

$$W_p = 2\,mgl\,(1\text{-}\cos\varphi) \tag{33}$$

Pro $\varphi \ll 1$ lze $\cos\varphi$ rozvést a vzít pouze první dva členy, takže dostáváme

$$W_p = mgl\varphi^2. \tag{34}$$

Za φ dosadíme, neboť platí

$$\varphi^2 = \frac{q^2}{l^2}. \tag{35}$$

Pak dostaneme

$$W_p = m\,\frac{g}{l}\,q^2 \tag{36}$$

a po derivaci

$$\left(\frac{d^2W_p}{dq^2}\right)_{q_0} = 2\,m\,\frac{g}{l}. \tag{37}$$

Tento vztah dosadíme do výrazu (32) a odtud plyne, že skutečně

$$\sqrt{LC} \sim \sqrt{\frac{l}{g}},$$

což mělo být dokázáno.

Tyto výsledky vedou k překvapivému závěru, že kondensátor si musíme představit jako soustavu dvou kyvadel, jejichž kmity odpovídají změně stavu obou desek kondensátoru. Uvažovali jsme samozřejmě netlumené oscilace a jim odpovídá pohyb kyvadla v neodporujícím prostředí. Kondensátor považu,eme za bezeztrátový. Pochopitelně, že zavedením těchto podmínek by se poměry komplikovaly, nám však šlo o první příblížení a vysvětlení některých nesouhlasů v dosavadních analogiích.

Seznam literatury:

L. Franc, O elektromechanických analogiích (v tisku).

Souhrn

V této práci byla studována analogie mezi periodickými ději v gravitačním a elektromagnetickém poli. Výsledky vedou k závěru, že kondensátor si lze představit jako dvě kyvadla. Jejich frekvence odpovídají změnám stavů obou desek kondensátoru. Byl uvažován případ bez tlumení.

SUMMARY

In this work were the analogies between the periodical processes in the gravitational and elektromagnetic fields discussed. The results lead to the conclusion, that the condenser may be as two pendulums imagined. Their frequencies correspond with the change of states of both plates of condenser. The case without damping is considered only.