Zdeněk Vančura

Differentialgeometrie der n-dimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Raum

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 114 (1989), No. 1, 45--52

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/118366`

DIFFERENTIALGEOMETRIE DER n-DIMENSIONALEN KUGEL- UND LINIENMANNIGFALTIGKEITEN IM $(n + 1)$-DIMENSIONALEN EUKLIDISCHEN RAUM

ZDENĚK VANČURA, Kopřivnice

(Eingegangen 22. 10. 1986)

Zusammenfassung. Von seinen veröffentlichten Arbeiten [10] bis [16], welche die Differentialgeometrie der Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum behandeln, ausgehend, hat der Autor die umfassende Arbeit geschrieben, welche die Differentialgeometrie der n-dimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im $(n + 1)$-dimensionalen euklidischen Raum ($n \geqq 2$) behandelt.

Die vorgelegte Arbeit versucht die Konzeption, den Inhalt, die Form seiner erwähnten umfassenden Arbeit und die Synthese der Hauptergebnisse von allen seinen oben erwähnten Arbeiten nach Möglichkeit aufs kürzeste darzustellen.

Keywords: Differentialgeometrie der Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten.

AMS Classification: 53A25.

Von meinen veröffentlichten Arbeiten [10] bis [16], welche die Differentialgeometrie der Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum entwickeln, asugehend, habe ich eine umfassende Arbeit geschrieben, in der die Differentialgeometrie der n-dimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im $(n + 1)$-dimensionalen euklidischen Raum ($n \geqq 2$) entwickelt wird.

Die vorgelegte Arbeit versucht die Konzeption, Inhalt, und Form der angeführten umfassenden Arbeit vorzustellen und die Synthese der Hauptergebnisse aller meinen oben erwähnten Arbeiten nach Möglichkeit aufs kürzeste darzustellen.

Unter Anwendung von Prinzipen, Begriffen, Methoden, die durch Erzeugen der notwendigen, zweckmässigen, zulässigen, geometrisch interpretationsfähigen Verallgemeinerungen, Kombinationen, Modifikationen der Prinzipe, Begriffe, Methoden aus meinen Arbeiten [10], [11] entstehen und bei grundsätzlich gleicher Bezeichnung der verallgemeinerten Begriffe, welche wir als Ausgangsbegriffe (vgl. [10], [11]) ansehen, bekommt man (bei passenden Voraussetzungen):

Als *die n-dimensionale Kugelmannigfaltigkeit im $(n + 1)$-dimensionalen euklidischen Raum* ($n \geqq 2$) wollen wir eine solche Menge von Kugelflächen

$$(1) \qquad ({}^n\mathbf{s}(u^1, \ldots, u^n);\ {}^n r(u^1, \ldots, u^n) > 0)$$

bezeichnen, wo ${}^n\mathbf{s}({}^n s_1(u^1, \ldots, u^n), \ldots, {}^n s_{n+1}(u^1, \ldots, u^n))$, *die* sogenannte *Mittel-*

punktmannigfaltigkeit der n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit, die n-dimensionale Punktmannigfaltigkeit darstellt.

Für die Kugelflächen (1) der n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit legen wir

(2) $$ {}^n p_i = {}^n s_i, \; i = 1, \ldots, n+1, \; {}^n p_{n+2} = {}^n r^2 - \sum_{i=1}^{n+1} {}^n s_i^2, \; {}^n p_{n+3} = 1, \; {}^n p_{n+4} = {}^n r, $$

(3) $$ {}^n k(A) = \sum_{i=1}^{n} \left({}^n d_{in+1}^2 + 2(-1)^{i+n} \, {}^n d_{n+1,n+2} \, {}^n d_{in+1} \, {}^n p_i \right) - {}^n d_{n+1,n+2}^2 \, {}^n p_{n+2} \, , $$

(4) $$ {}^n k(B) = \sum_{i=1}^{n+1} {}^n d_{in+2}^2 \, , $$

(5) $$ {}^n k(AB) = 2 \sum_{i=1}^{n} \left({}^n d_{in+1} \, {}^n d_{in+2} + (-1)^{i+n} \, {}^n d_{n+1,n+2} \, {}^n d_{in+2} \, {}^n p_i \right) - 2 \, {}^n d_{n+1,n+2}^2 \, {}^n p_{n+1}, $$

wo ${}^n d_{in+1}$ bzw. ${}^n d_{in+2}$ die Determinante der Matrix, welche aus der Matrix

(6) $$ \left\| \begin{matrix} 2\dfrac{\partial \, {}^n p_1}{\partial u^1}, & \ldots, & 2\dfrac{\partial \, {}^n p_{n+1}}{\partial u^1}, & 2\dfrac{\partial^n \, p_{n+2}}{\partial u^1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2\dfrac{\partial \, {}^n p_1}{\partial u^n}, & \ldots, & 2\dfrac{\partial \, {}^n p_{n+1}}{\partial u^n}, & 2\dfrac{\partial \, {}^n p_{n+2}}{\partial u^n} \end{matrix} \right\| $$

durch Auslassen der i-ten und der $(n+1)$-ten $(i \neq n+1)$ bzw. der i-ten und der $(n+2)$-ten $(i \neq n+2)$ Spalte entsteht, bezeichnet.

Unter der Voraussetzung ${}^n d_{n+1,n+2} \neq 0$, ${}^n k(AB)^2 - 4 \, {}^n k(A) \, {}^n k(B) > 0$ haben die Ebenen

(7) $$ \sum_{i=1}^{n} {}^n c_i \left(\sum_{j=1}^{n+1} 2 \frac{\partial \, {}^n p_j}{\partial u^i} x_j + \frac{\partial \, {}^n p_{n+2}}{\partial u^i} \right), \quad \sum_{i=1}^{n} {}^n c_i^2 > 0 $$

von allen Elementarmannigfaltigkeiten längs der Kugelfläche (1) und die Kugelfläche (1) genau zwei verschiedene reelle Punkte ${}^n F_1$, ${}^n F_2$ gemeinsam. Die Punkte ${}^n F_1$, ${}^n F_2$ wollen wir als *die Brennpunkte der Kugelfläche* (1) bezeichnen. Die Menge von Brennpunkten ${}^n F_h$ $(h = 1, 2)$, wenn sie die n-dimensionale Punktmannigfaltigkeit darstellt, wollen wir als *die h-te Brennmannigfaltigkeit der n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit* (1) bezeichnen.

Für den Einheitsvektor ${}^n\mathbf{d}$ der Normalen der Mittelpunktmannigfaltigkeit ${}^n\mathbf{s}$, die Entfernung ${}^n v$ der Brennpunkte ${}^n F_1$, ${}^n F_2$, *die Mittenmannigfaltigkeit* ${}^n\mathbf{l}$ (d.h. für die Punktmenge, die aus den Mittelpunkten der Strecken ${}^n F_1 {}^n F_2$ besteht) und für die h-te Brennmannigfaltigkeit ${}^{nh}\mathbf{f}$ $(h = 1, 2)$ der n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit (1) bekommt man:

(8) $$ {}^n\mathbf{d} = \frac{1}{\sqrt{({}^n k(B))}} \left({}^n d_{1n+2}, \; -{}^n d_{2n+2}, \ldots, (-1)^{n+1} \, {}^n d_{nn+2} \, , \right. $$

$$(-1)^n\, {}^n d_{n+1,n+2})\,,$$

$$^n v = \sqrt{\left(\frac{[{}^n k(AB)]^2 - 4\,{}^n k(A)\,{}^n k(B)}{{}^n d^2_{n+1,n+2}\,{}^n k(B)}\right)}\,,$$

$$^n \mathbf{l} = \frac{(-1)^n}{2\,{}^n d_{n+1,n+2}\,{}^n k(B)}\,(2\,{}^n d_{1n+1}\,{}^n k(B) - {}^n d_{1n+2}\,{}^n k(AB)\,,$$

$$-2\,{}^n d_{2n+1}\,{}^n k(B) + {}^n d_{2n+2}\,{}^n k(AB), \ldots, (-1)^{n+1}\,.$$

$$.\,(2\,{}^n d_{nn+1}\,{}^n k(B) - {}^n d_{nn+2}\,{}^n k(AB)), (-1)^{n+1}\,{}^n d_{n+1,n+2}\,{}^n k(AB))\,,$$

$$^{nh}\mathbf{f} = \frac{(-1)^n}{{}^n d_{n+1,n+2}}\,({}^n d_{1n+1} + {}^n m_h\,{}^n d_{1n+2}, -{}^n d_{2n+1} - {}^n m_h\,{}^n d_{2n+2}, \ldots,$$

$$(-1)^{n+1}\,({}^n d_{nn+1} + {}^n m_h\,{}^n d_{nn+2}), (-1)^n\,{}^n m_h\,{}^n d_{n+1,n+2})\,,$$

$$^n m_h = \frac{{}^n k(AB) + (-1)^h \sqrt{([{}^n k(AB)]^2 - 4\,{}^n k(A)\,{}^n k(B))}}{2\,{}^n k(B)}\,.$$

Für die h-te Brennmannigfaltigkeit $^{nh}\mathbf{f}$ $(h = 1, 2)$ *der n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit* (1) *gilt*

(9) $$^{nh}\mathbf{f} = {}^n\mathbf{l} + \tfrac{1}{2}(-1)^h\,{}^n\varepsilon_{n+1,n+2}\,{}^n v\,{}^n\mathbf{d}\,, \quad {}^n\varepsilon_{n+1,n+2} = \operatorname{sgn}\,{}^n d_{n+1,n+2}\,.$$

Im Fall

(10) $$\det\left|{}^{nll}T_{ij} = \frac{\partial\,{}^n\mathbf{l}}{\partial u^i}\,\frac{\partial\,{}^n\mathbf{l}}{\partial u^j} = {}^n\mathbf{l}_i\,.\,{}^n\mathbf{l}_j\right| \neq 0\,, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

wollen wir die Menge von Linien

(11) $$({}^n\mathbf{l}(u^1, \ldots, u^n);\ {}^n\mathbf{d}(u^1, \ldots, u^n))$$

die n-dimensionale Linienmannigfaltigkeit im $(n + 1)$*-dimensionalen euklidischen Raum* nennen.

Weil aus (9)

(12) $$^{n2}\mathbf{f} - {}^{n1}\mathbf{f} = {}^n\varepsilon_{n+1,n+2}\,{}^n v\,{}^n\mathbf{d}$$

folgt, wollen wir (11) (bei (10)) als *die n-dimensionale zur n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit* (1) *adjungierte Linienmannigfaltigkeit* bezeichnen.

Einen reellen Punkt

(13) $$^n\mathbf{g}(u^1, \ldots, u^n) = {}^n\mathbf{l}(u^1, \ldots, u^n) + {}^n\varepsilon_{n+1,n+2}\,{}^n w(u^1, \ldots, u^n)\,{}^n\mathbf{d}(u^1, \ldots, u^n)$$

wollen wir als *den Brennpunkt der Linie* (11) bezeichnen, wenn solche reelle $^n du^1, \ldots, {}^n du^n$, $\sum_{i=1}^{n} {}^n du_i^2 > 0$ existieren, dass die Vektoren

(14) $$\sum_{i=1}^{n} ({}^n\varepsilon_{n+1,n+2}\,{}^n\mathbf{d}_i\,{}^n w + {}^n\mathbf{l}_i)\,{}^n du^i\,, \quad {}^n\mathbf{d}$$

linear abhängig sind. Die Menge von Brennpunkten $^n\mathbf{g}$, wenn sie die n-dimensionale

Punktmannigfaltigkeit darstellt, wollen wir als *die Brennmannigfaltigkeit der n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeit* (11) bezeichnen.

Für die Brennmannigfaltigkeit ${}^n\mathbf{g}$ *der n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeit* (11) *gilt*

$$ {}^n\mathbf{g} = {}^n\mathbf{l} + {}^n\varepsilon_{n+1,n+2}{}^n w\, {}^n\mathbf{d}\,, \tag{15}$$

wo ${}^n w$ *irgendeine reelle Lösung der Gleichung*

$$ \det\left|-{}^{nds}T_{ij}{}^n w + {}^{nls}T_{ij}\right| = 0\,, \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{16}$$

darstellt.

Der Brennpunkt der Kugel bzw. der Linie der n-dimensionalen Kugel- bzw. Linienmannigfaltigkeit stellt ihren Berührungspunkt auf der angehörigen Brennmannigfaltigkeit der n-dimensionalen Kugel- bzw. Linienmannigfaltigkeit dar.

Auf der n-dimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeit im $(n + 1)$*-dimensionalen euklidischen Raum sind* ${}^n v$ (aus (8)), ${}^n v_i = \partial{}^n v/\partial u^i$ *und*

$$ \begin{gathered} {}^{nld}T_i = {}^n\varepsilon_{n+1,n+2}{}^n\mathbf{l}_i \,.\, {}^n\mathbf{d}\,, \quad {}^{nss}T_{ij} = {}^n\mathbf{s}_i \,.\, {}^n\mathbf{s}_j\,, \\ {}^{nds}T_{ij} = -{}^n\varepsilon_{n+1,n+2}({}^n\mathbf{d}_i \,.\, {}^n\mathbf{s}_j)\,, \quad {}^{nls}T_{ij} = {}^n\mathbf{l}_i \,.\, {}^n\mathbf{s}_j\,, \quad {}^{nll}T_{ij} = {}^n\mathbf{l}_i \,.\, {}^n\mathbf{l}_j \end{gathered} \tag{17}$$

Tensoren. Diese Tensoren kann man in den Krümmungsparametern der Mittelpunktmannigfaltigkeit ${}^n\mathbf{s}$ (*für die Hauptrichtungen* ${}^n v^i$ *der Mannigfaltigkeit* ${}^n\mathbf{s}$ *setzen wir*

$$ \left({}^{nds}T^i_j - \frac{1}{{}^nR}\,\delta^i_j\right){}^n v^j = 0\,, \quad \det\left|{}^{nds}T^i_j - \frac{1}{{}^nR}\,\delta^i_j\right| = 0\,, \quad \frac{d}{d\dfrac{1}{{}^nR}}\det\left|{}^{nds}T^i_j - \frac{1}{{}^nR}\,\delta^i_j\right| \neq 0 $$

voraus) durch *die Tensoren*

$$ {}^n r\,, \quad {}^{nss}T_{ij}\,, \quad {}^{nds}T_{ij} \tag{18}$$

folgendermassen ausdrücken:

$$ {}^n v = 2\,{}^n r(1 - {}^n r_q^2\, {}^{nss}T^{qq})^{1/2}\,, \tag{19}$$

$$ \begin{aligned} {}^n v_i = 2(1 - {}^n r_q^2\, {}^{nss}T^{qq})^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} {}^n r_k({}^n r\, {}^n r_t {}^n\Gamma^t_{ki} - \\ - {}^n r\, {}^n r_{ki} - {}^n r_k {}^n r_i + {}^{nss}T_{ki})\, {}^{nss}T^{kk}\,, \end{aligned} \tag{20}$$

$$ {}^{nld}T_i = -{}^n r\, {}^n r_i {}^{nds}T^i_i\,, \tag{21}$$

$$ {}^{nls}T_{ij} = {}^n r\, {}^n r_t {}^n\Gamma^t_{ij} - {}^n r\, {}^n r_{ij} - {}^n r_i {}^n r_j + {}^{nss}T_{ij}\,, \tag{22}$$

$$ \begin{aligned} {}^{nll}T_{ij} = \sum_{k=1}^{n} ({}^n r\, {}^n r_t {}^n\Gamma^t_{ki} - {}^n r\, {}^n r_{ki} - {}^n r_k {}^n r_i + {}^{nss}T_{ki})\,. \\ .\,({}^n r\, {}^n r_t {}^n\Gamma^t_{kj} - {}^n r\, {}^n r_{kj} - {}^n r_k {}^n r_j + {}^{nss}T_{kj})\, {}^{nss}T^{kk} + {}^n r^2\,. \\ .\, {}^n r_i {}^n r_j {}^{nds}T^i_i\, {}^{nds}T^j_j\,. \end{aligned} \tag{23}$$

Für die Grundtensoren ${}^{nss}T_{ij}$, ${}^{nds}T_{ij}$ bzw. ${}^{nh}_{f}a_{ij}$, ${}^{nh}_{f}b_{ij}$ bzw. ${}^{n}_{g}a_{ij}$, ${}^{n}_{g}b_{ij}$, für die Gaussschen Krümmungen ${}^{n}K$ bzw. ${}^{nh}_{f}K$ bzw. ${}^{n}_{g}K$, für die mittleren Krümmungen ${}^{n}H$ bzw. ${}^{nh}_{f}H$ bzw. ${}^{n}_{g}H$ der Mittelpunktmannigfaltigkeiten ${}^{n}\mathbf{s}$ bzw. der Brennmannigfaltigkeiten ${}^{nh}\mathbf{f}$ bzw. der Brennmannigfaltigkeiten ${}^{n}\mathbf{g}$ der n-dimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im $(n+1)$ dimensionalen euklidischen Raum gilt (bei den zweiten Grundtensoren eventuell bis aus das Vorzeichen)

$$(24)\qquad {}^{nss}T_{ij} = {}^{n}\mathbf{s}_i \,.\, {}^{n}\mathbf{s}_j\,, \quad {}^{nds}T_{ij} = -{}^{n}\varepsilon_{n+1,n+2}{}^{n}\mathbf{d}_i \,.\, {}^{n}\mathbf{s}_j\,,$$

$$(25)\qquad {}^{nh}_{f}a_{ij} = {}^{nll}T_{ij} + \tfrac{1}{4}\,{}^{n}v_i{}^{n}v_j + \tfrac{1}{4}\,{}^{n}v^2 \,.$$
$$.\,{}^{nss}T_{kl}{}^{nds}T_i^k\,{}^{nds}T_j^l - \tfrac{1}{2}(-1)^h\,{}^{n}v\big({}^{nds}T_i^k\,{}^{nls}T_{jk} +$$
$$+\,{}^{nds}T_j^k\,{}^{nls}T_{ik}\big) + \tfrac{1}{2}(-1)^h\big({}^{nld}T_i\,{}^{n}v_j + {}^{nld}T_j\,{}^{n}v_i\big)\,,$$

$$(26)\qquad {}^{nh}_{f}b_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\Big({}^{nh}c_{ki} + \sum_{q=1}^{n}{}^{nh}c_q{}^{n}\Gamma_{qi}^k - {}^{n}\varepsilon_{n+1,n+2}{}^{nh}c_{n+1}{}^{nds}T_i^k\Big){}^{nls}T_{jk} +$$
$$+\Big({}^{nh}c_{n+1\,i} + {}^{n}\varepsilon_{n+1,n+2}\sum_{q=1}^{n}{}^{nh}c_q{}^{nds}T_{qi}\Big)\Big({}^{nld}T_j + \tfrac{1}{2}(-1)^h\,{}^{n}\varepsilon_{n+1,n+2}{}^{n}v_j\Big) -$$
$$-\tfrac{1}{2}(-1)^h\,{}^{n}v\sum_{k=1}^{n}\Big({}^{nh}c_{ki} + \sum_{q=1}^{n}{}^{nh}c_q{}^{n}\Gamma_{qi}^k - {}^{n}\varepsilon_{n+1,n+2}{}^{nh}c_{n+1}{}^{nds}T_{ki}\Big)\,{}^{nds}T_j^l\,{}^{nss}T_{kl}\,,$$

$$\sum_{q=1}^{n}\Big({}^{nls}T_{jq} - \tfrac{1}{2}(-1)^h\,{}^{n}v\,{}^{nss}T_{kq}{}^{nds}T_j^k\Big)\,{}^{nh}c_q + \Big({}^{nld}T_j + \tfrac{1}{2}(-1)^h\,{}^{n}\varepsilon_{n+1,n+2}{}^{n}v_j\Big)\,{}^{nh}c_{n+1} = 0\,,$$
$$j = 1,\ldots,n\,,$$

$$\sum_{p,q=1}^{n}{}^{nss}T_{pq}{}^{nh}c_p{}^{nh}c_q + {}^{nh}c_{n+1}^2 = 1\,,$$

$$(27)\qquad {}^{n}_{g}a_{ij} = {}^{nll}T_{ij} + {}^{n}w_i{}^{n}w_j + {}^{n}w^2\,{}^{nds}T_i^k\,{}^{nds}T_j^l\,{}^{nss}T_{kl} -$$
$$-\,{}^{n}w\big({}^{nds}T_i^k\,{}^{nls}T_{jk} + {}^{nds}T_j^k\,{}^{nls}T_{ik}\big) + {}^{nld}T_i{}^{n}w_j + {}^{nld}T_j{}^{n}w_i\,,$$

$$(28)\qquad {}^{n}_{g}b_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\Big({}^{n}_{g}c_{ki} + \sum_{q=1}^{n}{}^{n}_{g}c_q{}^{n}\Gamma_{qi}^k\Big)\Big({}^{nls}T_{jk} - {}^{n}w\,{}^{nds}T_j^l\,{}^{nss}T_{kl}\Big) +$$
$$+\Big({}^{n}\varepsilon_{n+1,n+2}{}^{nld}T_j + {}^{n}w_j\Big)\sum_{q=1}^{n}{}^{n}_{g}c_q{}^{nds}T_{qi}\,,$$

$$\sum_{q=1}^{n}\Big({}^{nls}T_{jq} - {}^{n}w\,{}^{nss}T_{qk}{}^{nds}T_j^k\Big)\,{}^{n}_{g}c_q = 0\,, \quad \sum_{p,q=1}^{n}{}^{nss}T_{pq}\,{}^{n}_{g}c_p\,{}^{n}_{g}c_q = 1\,,$$

$$(29)\qquad {}^{n}K = \frac{\det\left|{}^{nds}T_{ij}\right|}{\det\left|{}^{nss}T_{ij}\right|}\,, \quad {}^{nh}_{f}K = \frac{\det\left|{}^{nh}_{f}b_{ij}\right|}{\det\left|{}^{nh}_{f}a_{ij}\right|}\,, \quad {}^{n}_{g}K = \frac{\det\left|{}^{n}_{g}b_{ij}\right|}{\det\left|{}^{n}_{g}a_{ij}\right|}\,,$$

$$(30)\qquad {}^{n}H = {}^{nss}T^{ij}\,{}^{nds}T_{ij}\,, \quad {}^{nh}_{f}H = {}^{nh}_{f}a^{ij}\,{}^{nh}_{f}b_{ij}\,, \quad {}^{n}_{g}H = {}^{n}_{g}a^{ij}\,{}^{n}_{g}b_{ij}\,.$$

Die Menge der Kugelflächen (1) bzw. der Punkte (9) bzw. der Punkte (13) bildet eine n-dimensionale Kugelmannigfaltigkeit $({}^{n}\mathbf{s};\, {}^{n}r)$ bzw. die Brennmannigfaltigkeit ${}^{nh}\mathbf{f}$ bzw. die Brennmannigfaltigkeit ${}^{n}\mathbf{g}$ genau dann, wenn $\det\left|{}^{nss}T_{ij}\right| \neq 0$ *bzw.* $\det\left|{}^{nh}_{f}a_{ij}\right| \neq 0$ *bzw.* $\det\left|{}^{n}_{g}a_{ij}\right| \neq 0$ *ist.*

Die n-dimensionale zur n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit $({}^n\mathbf{s}; {}^n r)$ *adjungierte Linienmannigfaltigkeit besteht aus den Normalen der Mittelpunktmannigfaltigkeit* ${}^n\mathbf{s}$ *genau dann, wenn* ${}^n r = \text{const} > 0$ *gilt.*

Im Fall ${}^n r = \text{const} > 0$ werden wir kurz über *die spezielle n-dimensionale Kugel- und Linienmannigfaltigkeit im* $(n + 1)$*-dimensionalen euklidischen Raum* sprechen.

Für die speziellen n-dimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im $(n + 1)$*-dimensionalen euklidischen Raum gilt in den Krümmungsparametern der Mittelpunktmannigfaltigkeit* ${}^n\mathbf{s}$*, wenn wir die Brennmannigfaltigkeit* ${}^{nk}\mathbf{g} = {}^n\mathbf{g}({}^n w = {}^{nk}w = {}^{nss}T_{kk}{}^{nds}T_{kk}^{-1}$, ${}^{nds}T_{kk} \neq 0$ *als die k-te Brennmannigfaltigkeit der speziellen n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeit* (11) *bezeichnen, folgendes*

$$(31)\qquad {}^{nh}_{f}a_{ii} = {}^{nss}T_{ii}^{-1}({}^{nss}T_{ii} - (-1)^h\, {}^n r\, {}^{nds}T_{ii})^2\,, \quad {}^{nh}_{f}a_{ij} = 0\,, \quad i \neq j\,,$$

$$(32)\qquad {}^{nh}_{f}b_{ii} = {}^{nds}T_{ii}(1 - (-1)^h\, {}^n r\, {}^{nss}T_{ii}^{-1}\, {}^{nds}T_{ii})\,, \quad {}^{nh}_{f}b_{ij} = 0\,, \quad i \neq j\,,$$

$$(33)\qquad {}^{nk}_{g}a_{ii} = {}^{nss}T_{ii} + (({}^{nss}T_{kk}{}^{nds}T_{kk}^{-1})_i)^2 - 2\, {}^{nss}T_{kk}{}^{nds}T_{kk}^{-1}\, {}^{nds}T_{ii} + ({}^{nss}T_{kk}{}^{nds}T_{kk}^{-1})^2\, {}^{nss}T_{ii}^{-1}({}^{nds}T_{ii})^2\,,$$

$$\qquad {}^{nk}_{g}a_{ij} = ({}^{nss}T_{kk}{}^{nds}T_{kk}^{-1})_i\,({}^{nss}T_{kk}{}^{nds}T_{kk}^{-1})_j\,, \quad i \neq j\,,$$

$$(34)\qquad {}^{nk}_{g}b_{ii} = {}^{nss}T_{kk}^{-1/2}({}^{nss}T_{ii} - {}^{nss}T_{kk}{}^{nds}T_{kk}^{-1}\, {}^{nds}T_{ii})\, {}^n\Gamma^i_{ki}\,, \quad i \neq k\,,$$

$$\qquad {}^{nk}_{g}b_{kk} = {}^{nss}T_{kk}^{-1/2}\, {}^{nds}T_{kk}({}^{nss}T_{kk}{}^{nds}T_{kk}^{-1})_k\,, \quad {}^{nk}_{g}b_{ij} = 0\,, \quad i \neq j\,,$$

$$(35)\qquad {}^n K = \prod_{i=1}^{n} {}^{nds}T_{ii}\Big(\prod_{i=1}^{n} {}^{nss}T_{ii}\Big)^{-1}\,, \quad {}^{nh}_{f}K = \prod_{i=1}^{n} {}^{nh}_{f}b_{ii}\Big(\prod_{i=1}^{n} {}^{nh}_{f}a_{ii}\Big)^{-1}\,,$$

$$\qquad {}^{nk}_{g}K = {}^{nss}T_{kk}^{-n/2}\, {}^{nds}T_{kk}({}^{nss}T_{kk}{}^{nds}T_{kk}^{-1})_k \cdot \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} ({}^{nss}T_{ii} - {}^{nss}T_{kk}{}^{nds}T_{kk}^{-1}\, {}^{nds}T_{ii})\, {}^n\Gamma^i_{ki}(\det |{}^{nk}_{g}a_{ij}|)^{-1}\,,$$

$$(36)\qquad {}^n H = {}^{nss}T_{ii}^{-1}\, {}^{nds}T_{ii}\,, \quad {}^{nh}_{f}H = {}^{nh}_{f}a_{ii}^{-1}\, {}^{nh}_{f}b_{ii}\,, \quad {}^{nk}_{g}H = {}^{nk}_{g}a^{ij}\, {}^{nk}_{g}b_{ij}\,.$$

Die Gausssche Krümmung der Brennmannigfaltigkeit der speziellen n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit ist genau dann gleich Null, wenn die Gausssche Krümmung der Mittelpunktmannigfaltigkeit der speziellen n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit gleich Null ist.

Die Gausssche Krümmung der k-ten Brennmannigfaltigkeit der speziellen n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeit ist genau dann gleich Null, wenn auf der Mittelpunktmannigfaltigkeit der speziellen n-dimensionalen Linienmannigfaltikeit $({}^{nss}T_{kk}{}^{nds}T_{kk}^{-1})_k\, {}^n\Gamma^i_{ki} = 0$ *(im Fall* ${}^n\Gamma^i_{ki} = 0$ *für irgendein* $i \neq k$*) gilt.*

Im Sinne der vorgelegten Arbeit kann man das folgende Theorem formulieren:

Die Differentialgeometrie der n-dimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im $(n + 1)$*-dimensionalen euklidischen Raum* $(n \geqq 2)$ *kann unter An-*

wendung der Tensoren

$$^{n}(T)_{E_{n+1}} \qquad {}^{n}r\,, \quad {}^{nss}T_{ij}\,, \quad {}^{nds}T_{ij}\,, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

untersucht werden.

Im Sinne der Arbeiten [10] bis [16] (siehe das Theorem mit $(T) = (T')_{E_3}$ in [15]) und der vorgelegten Arbeit (siehe das Theorem mit $^{n}(T)_{E_{n+1}}$) kann man das folgende Theorem formulieren:

Die Differentialgeometrie der Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten bzw. der n-dimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen bzw. im $(n + 1)$-dimensionalen euklidischen Raum $(n \geqq 2)$ kann unter Anwendung der Tensoren

$$(T)_{E_3} \qquad r\,, \quad {}^{ds}_{\varphi_3\varphi_4}T_i\,, \quad {}^{ss}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ij}\,, \quad {}^{ds}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ij}\,, \quad {}^{dd}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ij}\,, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

bzw. der Tensoren

$$^{n}(T)_{E_{n+1}} \qquad {}^{n}r\,, \quad {}^{nss}T_{ij}\,, \quad {}^{nds}T_{ij}\,, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

untersucht werden.

Literatur

[1] *W. Blaschke:* Vorlesungen über Differentialgeometrie III. Berlin 1929.

[2] *S. P. Finikov:* Теория конгруэнций. Moskva—Leningrad 1950.

[3] *V. Hlavatý:* Zur Lie'schen Kugelgeometrie: I. Kanalflächen. Věstník Král. čes. společnosti nauk, Praha 1941.

[4] *V. Hlavatý:* Zur Lie'schen Kugelgeometrie: Kongruenzen. (Elementare Eigenschaften). Rozpravy II. tř. České akademie roč. LI, č. 33.

[5] *V. Hlavatý:* Differentialgeometrie der Linienmannigfaltigkeiten I, II. Rozpravy II. tř. České akademie, roč. L, č. 27.

[6] *V. Hlavatý:* Differentialgeometrie der Kurven und Flächen und Tensorrechnung. JČMF Praha 1937.

[7] *V. F. Kagan:* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Moskva—Leningrad 1947, 1948.

[8] *V. I. Šulikovskij:* Классическая дифференциальная геометрия в тензорном иизложении. Moskva 1963.

[9] *Z. Vančura:* Les congruences de Lie-sphères (*L*-sphères). Spisy přír. fak. Karlovy univ., Praha 1950.

[10] *Z. Vančura:* Die Brennflächen der Kugelkongruenz. Časopis pěst. mat. *80* (1955).

[11] *Z. Vančura:* Kugelkongruenzen und ihre Brennflächen. Adjungierte Linienkongruenzen und ihre Brennflächen. Rozpravy ČSAV, 78, Praha 1968.

[12] *Z. Vančura:* Differentialgeometrie der zweidimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltikeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum I. Commentationes Mathemat. Univ. Carol. 16, 2 (1975).

[13] *Z. Vančura:* Differentialgeometrie der zweidimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum II. Commentationes Mathemat. Univ. Carol. 16, 3 (1975).

[14] *Z. Vančura:* Adjunktionsfähige zweidimensionale Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum. Časopis pěst. mat. *105* (1980).
[15] *Z. Vančura:* Differentialgeometrie der Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum. Časopis pěst. mat. *108* (1983).
[16] *Z. Vančura:* Zur Differentialgeometrie der Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum. Časopis pěst. mat. *111* (1986).

Souhrn

DIFERENCIÁLNÍ GEOMETRIE n-ROZMĚRNÝCH KULOVÝCH A PŘÍMKOVÝCH VARIET V $(n + 1)$-ROZMĚRNÉM EUKLIDOVSKÉM PROSTORU

Zdeněk Vančura

Vycházeje ze svých publikovaných prací [10] až [16], pojednávajících o diferenciální geometrii kulových a přímkových variet v trojrozměrném euklidovském prostoru, napsal autor rozsáhlou práci, pojednávající o diferenciální geometrii n-rozměrných kulových a přímkových variet v $(n + 1)$-rozměrném eukleidovském prostoru $(n \geqq 2)$.

Předložená práce podává maximálně stručný výklad koncepce, obsahu, formy napsané rozsáhlé práce a syntézu hlavních výsledků všech výše zmíněných autorových prací.

Резюме

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ СФЕР ПРЯМЫХ В $(n + 1)$-МЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Zdeněk Vančura

Исходя из своих работ [10]—[16], автор этой статьи написал обширную работу о дифференциальной геометрии n-мерных многообразий сфер и прямых в $(n + 1)$-мерном эвклидовом пространстве $(n \geqq 2)$.

Эта работа стремится изложить с максимальной краткостью концепицю, содержание и форму этой обширной работы и синтез главных результатов всех выше упомянутых работ.

Anschrift des Verfassers: Osvoboditelů 1214/11, 742 21 Kopřivnice.