Časopis pro pěstování matematiky

Václav Vilhelm
Primární rozklady

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 114 (1989), No. 1, 2--12

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/118360

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1989

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

114 (1989) ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY No. 1, 2—12

PRIMÁRNÍ ROZKLADY

VÁCLAV VILHELM, Praha

(Došlo dne 1. března 1985)

Souhrn. V práci se vyšetřují primární rozklady prvků úplného svazu, na němž operuje daná pologrupa. Výsledky poskytují jednoduchý společný pohled např. na primární rozklady podmodulů v modulech, na primární rozklady ideálů a kongruencí na pologrupách.

1.

1.1. Definice. Nechť $(L, \vee, \wedge)$ je úplný svaz, $(S, \cdot)$ pologrupa a $u: S \times L \to L$ (pišme $u(\alpha, a) = \alpha a$) zobrazení splňující pro libovolné prvky $a_i \in L$ $(i \in I \neq \emptyset)$, $a, b \in L$, $\alpha, \beta \in S$ požadavky

(1) $\alpha(\bigvee_{i \in I} a_i) = \bigvee_{i \in I} (\alpha a_i)$,

(2) $(\alpha\beta) a = \alpha(\beta a)$,

(3) $\alpha a \leqq a$.

Trojici (S, L, u) nazveme *levým S-svazem* a označíme ji ${}_S L$. Symetricky definujeme *pravý S-svaz* $(L, S, u) = L_S$; místo $u(a, \alpha)$ budeme psát $a\alpha$.

Příklady. 1. Nechť M je levý modul nad komutativním okruhem A, L nechť je úplný svaz všech jeho podmodulů. Pro každé $x \in A$ a pro každý podmodul $N \in L$ definujme $u(x, N) = xN$. Pak L je při takto definovaném násobení prvky pologrupy $S = (A, \cdot)$ levý S-svaz.

2. Nechť $(L, \vee, \wedge)$ je úplný svaz, $(S, \cdot)$ podpologrupa pologrupy úplných endomorfismů polosvazu $(L, \vee)$ taková, že $\alpha \in S \Rightarrow \forall x \in L(\alpha(x) \leqq x)$. Pak L při násobení prvky z S definovaném předpisem $\alpha x = \alpha(x)$ je levý S-svaz.

1.2. *V levém S-svazu ${}_S L$ platí pro každá $\alpha, \beta, \gamma \in S$, $a, b \in L$ a každé přirozené číslo k nerovnosti*

(i) $a \leqq b \Rightarrow \alpha a \leqq \alpha b$,

(ii) $(\alpha\beta)^k a \leqq \alpha^k a \wedge \beta^k a$, $(\alpha\gamma\beta)^k a \leqq (\alpha\beta)^k a$.

Důkaz. Z vlastnosti (1) v definici 1.1 plyne $a \vee b = b \Rightarrow \alpha a \vee \alpha b = \alpha b$, tedy $\alpha a \leqq \alpha b$, jakmile $a \leqq b$. Protože $\beta a \leqq a$, je tedy $(\alpha\beta) a = \alpha(\beta a) \leqq \alpha a$ a dále $(\alpha\beta) a = \alpha(\beta a) \leqq \beta a$ podle (3), takže $(\alpha\beta) a \leqq \alpha a \wedge \beta a$. Dále je $\alpha\beta a \leqq \alpha a \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta\alpha\beta a \leqq \alpha a \Rightarrow \alpha\beta\alpha\beta a \leqq \alpha^2 a \Rightarrow \ldots \Rightarrow (\alpha\beta)^k a = \alpha^k a$; podobně $\alpha\beta a \leqq \beta a \Rightarrow$ $\Rightarrow \beta\alpha\beta a \leqq \beta^2 a \Rightarrow \alpha(\beta\alpha\beta a) \leqq \beta^2 a \Rightarrow \ldots \Rightarrow (\alpha\beta)^k a \leqq \beta^k a$, takže platí $(\alpha\beta)^k a \leqq \alpha^k a \wedge$ $\wedge \beta^k a$. Konečně $(\alpha\gamma\beta) a = \alpha(\gamma\beta a)$, odkud v důsledku nerovnosti $\gamma\beta a \leqq \beta a$ plyne, že $\alpha(\gamma\beta a) \leqq \alpha\beta a$. Odtud indukcí dostaneme poslední tvrzení.

1.3. Definice. Pro libovolná $a, b \in L, \alpha \in S$ definujme v ${}_S L$

$$a : b = \{\gamma \in S \mid \gamma b \leqq a\},$$
$$a : \alpha = \bigvee \{x \in L \mid \alpha x \leqq a\},$$
$$r(a) = \{\gamma \in S \mid \exists k \geqq 1 (\gamma^k 1 \leqq a)\},$$
$$R(a) = \{\gamma \in S \mid \exists k \geqq 1 (\gamma^k a = 0)\},$$

kde 0 je nejmenší, 1 největší prvek svazu L. Pro libovolný oboustranný ideál A pologrupy S položme $r(A) = \{\gamma \in S \mid \exists k \geqq 1 (\gamma^k \in A)\}$; zřejmě pak platí $r(A \cap B) = r(A) \cap$ $\cap\, r(B)$ pro každý oboustranný ideál B v S.

1.4. *Množiny $a : b$, $r(a)$, $R(a)$ jsou oboustranné ideály pologrupy S (případně prázdné).*

Důkaz plyne z tvrzení 1.2 (ii).

1.5. *Pro libovolná $a, b, a_i \in L (i \in I \neq \emptyset)$ platí v ${}_S L$*

(i) $(\bigwedge_{i\in I} a_i) : b = \bigcap_{i\in I} (a_i : b)$, $b : (\bigvee_{i \in I} a_i) = \bigcap_{i\in I} (b : a_i)$,

(ii) $r(a \wedge b = r(a) \cap r(b)$,

(iii) $R(a \vee b) = R(a) \cap R(b)$.

Důkaz. (i) $\alpha \in (\bigwedge_{i\in I} a_i) : b \Leftrightarrow \forall_i \in I(\alpha b \leqq a_i) \Leftrightarrow \forall i \in I(\alpha \in a_i : b) \Leftrightarrow \alpha \in \bigcap_{i \in I} (a_i : b)$. Podobně se ověří druhé tvrzení v (ii) užitím (1) z definice 1.1.

(ii) Předně platí $\alpha \in r(a \wedge b) \Rightarrow \alpha^k 1 \leqq a \wedge b \Rightarrow \alpha^k 1 \leqq a, \alpha^k 1 \leqq b \Rightarrow \alpha \in r(a) \cap$ $\cap\, r(b)$. Naopak, je-li $\alpha \in r(a) \cap r(b)$, pak $\alpha^l 1 \leqq a$, $\alpha^h 1 \leqq b$ pro nějaká $l \geqq 1$, $h \geqq 1$, takže pro $k = \max(l, h)$ je $\alpha^k 1 \leqq a$, $\alpha^k 1 \leqq b$, tedy i $\alpha^k 1 \leqq a \wedge b$ a $\alpha \in$ $\in r(a \wedge b)$. Stejně snadno se ověří (iii).

1.6. *Pro libovolná $a, a_i \in L (i \in I \neq \emptyset)$ a libovolná $\alpha, \beta \in S$ platí*

(i) $\alpha(a : \alpha) \leqq a$,

(ii) $\bigwedge_{i\in I} (a_i : \alpha) = (\bigwedge_{i\in I} a_i) : \alpha$,

(iii) $a : (\alpha\beta) = (a : \alpha) : \beta$,

(iv) $a : \alpha \geqq a$.

Důkaz. (i) $\alpha(a : \alpha) = \alpha \bigvee\{x \in L \mid \alpha x \leqq a\} = \bigvee\{\alpha x \mid \alpha x \leqq a\} \leqq a$.

(ii) Podle (i) platí pro každé $j \in I$ $\alpha[(\bigwedge_{i\in I} a_i) : \alpha] \leqq \bigwedge_{i\in I} a_i \leqq a_j$, tedy $(\bigwedge_{i\in I} a_i) : \alpha \leqq$ $\leqq a_j : \alpha$ a proto $(\bigwedge_{i\in I} a_i) : \alpha \leqq \bigwedge_{j\in I} (a_j : \alpha)$. S druhé strany máme pro každé $j \in I$ nerovnosti $\alpha[\bigwedge_{i\in I} (a_i : \alpha)] \leqq \alpha(a_j : \alpha) \leqq a_j$, takže $\alpha[\bigwedge_{i\in I} (a_i : \alpha)] \leqq \bigwedge_{j\in I} a_j$ a proto $\bigwedge_{i\in I} (a_i : \alpha) \leqq (\bigwedge_{j\in I} a_j) : \alpha$.

(iii) plyne z ekvivalencí $x \leqq a : (\alpha\beta) \Leftrightarrow \alpha\beta x \leqq a \Leftrightarrow \beta x \leqq a : \alpha \Leftrightarrow x \leqq (a : \alpha) : \beta$.

Konečně (iv) je zřejmé, neboť $\alpha a \leqq a$.

1.7. *Nechť* $L^* = (L, \vee^*, \wedge^*, \leqq^*)$ *je duální svaz ke svazu* $(L, \vee, \wedge, \leqq)$; *pro každé* $\alpha \in S$, $a \in L$ *definujme* $u(a, \alpha) = a : \alpha$. *Pak* $(L^*, S, u) = L_S^*$ *je pravý S-svaz.*

Důkaz plyne z tvrzení 1.6.

Nejmenší (největší) prvek v L^* označme $0^*(1^*)$, takže $0^* = 1$, $1^* = 0$. V pravém S-svazu L_S^* analogicky definujme

$$a :^* b = \{\gamma \in S \mid b\gamma \leqq^* a\}, \quad \alpha :^* a = \bigvee{}^*\{x \in L \mid x\alpha \leqq^* a\},$$

$$r^*(a) = \{\gamma \in S \mid \exists k \geqq 1 (1^*\gamma^k \leqq^* a)\},$$

$$R^*(a) = \{\gamma \in S \mid \exists k \geqq 1 (a\gamma^k = 0^*)\},$$

kde $a\alpha$ značí prvek $a : \alpha = u(a, \alpha)$.

Analogicky k tomu, jak jsme v 1.7 přiřadili levému S-svazu ${}_SL$ pravý S-svaz L_S^*, přiřaďme pravému S-svazu L_S^* levý S-svaz ${}_SL^{**}$.

1.8. *Platí* ${}_SL^{**} = {}_SL$.

Důkaz plyne z rovnosti $\alpha :^* a = \bigvee{}^*\{x \in L \mid x\alpha \leqq^* a\} = \bigwedge\{x \in L \mid x : \alpha \geqq a\} =$ $= \bigwedge\{x \in L \mid \alpha a \leqq x\} = \alpha a$ platné podle 1.6 (i) pro libovolná $a \in L$, $\alpha \in S$.

2.

Ve shodě s tím, jak se v modulu nad komutativním okruhem definuje primární podmodul a s tím, jak v [2] definoval K. Drbohlav primární kongruenci na komutativní pologrupě, zaveďme následující definici.

2.1. Definice. a) Prvek $q \in L$ nazveme *primárním prvkem levého S-svazu* ${}_SL$, jestliže pro každé $\alpha \in S$ a každé $x \in L$ platí implikace

$$\alpha x \leqq q\,, \quad x \nleqq q \Rightarrow \alpha^k 1 \leqq q\,,$$

kde k je nějaké přirozené číslo.

b) Prvek $q \in L$ nazveme D-*primárním prvkem levého S-svazu* ${}_SL$, platí-li pro každé $\alpha \in S$ implikace

$$\alpha q < q \Rightarrow \alpha^k q = 0$$

pro nějaké přirozené číslo k.

Symetricky definujme *primární* a D *primární prvek pravého S-svazu* L_S.

2.2. *Nechť $a \in L$. Pak platí*

(i) $r(a) = R^*(a)$, $R(a) = r^*(a)$,

(ii) *a je primární (D-primární) v ${}_SL$, právě když je D-primární (primární) v L_S^*.*

Důkaz. (i) $R^*(a) = \{\gamma \in S | \exists k \geqq 1 \ (a\gamma^k = 0^*)\} = \{\gamma \in S | \exists k \geqq 1 (a : \gamma^k = 1\} = \{\gamma \in S | \exists k \geqq 1 \ (\gamma^k 1 \leqq a)\} = r(a)$.

Odtud a z tvrzení 1.8 plyne druhá část tvrzení (i).

(ii) Nechť $q \in L$ je primární v L_S^* a nechť $\alpha q < q$. V ${}_SL$ platí pro každé $\beta \in S$, $x \in L$ implikace

$$(1) \qquad x : \beta \geqq q\,, \quad x \ngeqq q \Rightarrow 0 : \beta^k \geqq q$$

pro nějaké přirozené k, neboť q je v L_S^* primární.

Z nerovností $\alpha q < q$, $q \leqq (\alpha q) : \alpha$ a z (1) plyne pro $x = \alpha q$, $\beta = \alpha$, že pro nějaké $k \geqq 1$ platí $0 : \alpha^k \geqq q$, což značí, že $\alpha^k q = 0$ a prvek q je tedy D-primárním prvkem v ${}_SL$. Naopak, nechť $q \in L$ je D-primární prvek v ${}_SL$. Nechť v pravém S-svazu L_S^* platí $x\alpha \leqq^* q$, $x \nleqq^* q$; tedy v ${}_SL$ je $x : \alpha \geqq q$, $x \ngeqq q$. Odtud plyne, že $\alpha q \leqq x$; protože $q \nleqq x$, nemůže být $\alpha q = q$ a tedy platí $\alpha q < q$, takže $\alpha^k q = 0$ pro některé $k \geqq 1$. To však znamená, že $q \leqq 0 : \alpha^k$ neboli v L_S^* platí $1^*\alpha^k \leqq^* q$, takže q je v L_S^* primární. Odtud a z 1.8 plyne druhá část tvrzení (ii).

2.3. *Je-li $q \in L$ primární (D-primární) prvek v ${}_SL$, potom $r(q)$ $(R(q))$ je prvoideál pologrupy S.*

Důkaz. Nechť q je v ${}_SL$ D-primární a nechť $\alpha\beta \in R(q)$. Tedy $(\alpha\beta)^k q = 0$ pro nějaké $k \geqq 1$. Nechť k je nejmenší takové číslo. Nechť předně $k = 1$. Pokud $\beta q = q$, pak $\alpha\beta q = \alpha q = 0$ a $\alpha \in R(q)$; jestliže je $\beta q < q$, potom $\beta^l q = 0$, $l \geqq 1$ a $\beta \in R(q)$. Nechť $k > 1$. Pak $(\alpha\beta)^{k-1} \alpha\beta q = 0$; v případě $\beta q < q$ je $\beta \in R(q)$, v případě $\beta q = q$ je pak $(\alpha\beta)^{k-1} \alpha q = 0$. Protože však platí $(\alpha\beta)^{k-1} q > 0$, nemůže být $\alpha q = q$. Tedy je $\alpha q < q$ a proto $\alpha \in R(q)$. Vždy je tedy $\alpha \in R(q)$ nebo $\beta \in R(q)$, takže $R(q)$ je prvoideál. Odtud ze symetrického tvrzení pro pravý S-svaz a z 2.2 plyne: je-li q primární v ${}_SL$, je D-primární v L_S^* a proto $R^*(q) = r(q)$ je prvoideál v S.

Vzhledem k tvrzením 1.8 a 2.2 se v dalším omezme na vyšetřování D-primárních prvků v ${}_SL$. K tomu pak stačí použít metod obvyklých pro vyšetřování primárních rozkladů ideálů v komutativním okruhu (viz např. [1]).

2.4. *Nechť q_1, q_2 jsou D-primární prvky v ${}_SL$ s týmž asociovaným prvoideálem $R = R(q_1) = R(q_2)$. Pak i $q_1 \vee q_2$ je v ${}_SL$ D-primární a $R(q_1 \vee q_2) = R$.*

Důkaz. Předně podle 1.5 (iii) je $R(q_1 \vee q_2) = R(q_1) \cap R(q_2) = R$. Nechť $q = q_1 \vee q_2$ a nechť pro nějaké $\alpha \in S$ je $\alpha q < q$. Pak tedy platí $\alpha q_1 \vee \alpha q_2 < q_1 \vee \vee q_2$, takže existuje $j \in \{1, 2\}$ takové, že $\alpha q_j < q_j$. Tedy pro nějaké $k \geqq 1$ je $\alpha^k q_j = 0$ a proto $\alpha \in R(q_j) = R$. Pro dostatečně velké $l \geqq 1$ tedy platí $\alpha^l q_1 = \alpha^l q_2 = 0$. Tudíž $\alpha^l q = \alpha^l q_1 \vee \alpha^l q_2 = 0$ a q je v ${}_S L$ D-primární.

2.5. *Nechť $q \in L$ je D-primární prvek v ${}_S L$, $x \in L$. Pak platí implikace*

(i) $q \leqq x \Rightarrow r(x : q) = S$,

(ii) $q \nleqq x \Rightarrow r(x : q) = R(q)$.

Důkaz. Nechť $q \leqq x$. Pak $x : q = S$ a tedy $r(x : q) = r(S) = S$. Nechť $q \nleqq x$. Je-li $\alpha \in R(q)$, pak platí $\alpha^k q = 0 \leqq x$ pro nějaké $k \geqq 1$, takže $\alpha \in r(x : q)$. Je-li $\alpha \notin R(q)$, potom musí být $\alpha q = q$, takže pro každé $k \geqq 1$ je $\alpha^k q = q \nleqq x$ a tedy $\alpha \notin r(x : q)$.

Vyjádření prvku $a \in L$, $a > 0$ ve tvaru spojení konečně mnoha D-primárních prvků v ${}_S L$ nazveme jeho D-primárním rozkladem v ${}_S L$. Má-li prvek a v ${}_S L$ D-primární rozklad, pak z tvrzení 2.4 plyne, že má nezkratitelný D-primární rozklad

(2) $$a = \bigvee\{q_i \mid i \in N\}\,, \quad N = \{1, 2, \ldots, n\}\,,$$

v němž $R(q_i) \neq R(q_j)$ pro každá $i, j \in N$, $i \neq j$, a v němž $\bigvee\{q_j \mid j \in N \setminus \{i\}\} \ngeqq q_i$ pro každé $i \in N$.

2.6. (Věta o jednoznačnosti D-primárního rozkladu.) *Nechť $a \in L$, $a > 0$ má v ${}_S L$ nezkratitelný D-primární rozklad (2). Pak množina $\{R(q_1), \ldots, R(q_n)\}$ je prvkem a jednoznačně určena (a pro každé $i \in N$ platí $R(q_i) = r(x_i : a)$. $x_i \ngeqq a$). Dále je prvkem a jednoznačně stanovena množina $Q = \{q_j \mid j \in N, R(q_j)$ minimální v množině $\{R(q_1), \ldots, R(q_n)\}\}$ a při $n > 1$ platí pro každé $q_j \in Q$ rovnost $q_j = \bigwedge\{\alpha a \mid \alpha \in S \setminus R(q_j)\} = \alpha_j a$.*

Důkaz. Nechť $x \in L$, $a \nleqq x$. Podle 1.5 platí

$$x : a = x : \bigvee\{q_i \mid i \in N\} = \bigcap\{x : q_i \mid i \in N\}\,.$$

Odtud z tvrzení 2.5 plyne

(3) $$r(x : a) = \bigcap\{r(x : q_i) \mid i \in N\} = \bigcap\{R(q_j) \mid j \in N,\ x \ngeqq q_j\}\,.$$

$R(q_i)$, $i \in N$ jsou prvoideály v S. Je-li tedy $r(x : a)$ prvoideál v S, pak pro nějaké $i \in N$ je $r(x : a) = R(q_i)$. Tedy platí inkluze

(4) $$\{r(x : a) \mid x \ngeqq a,\ r(x : a) \text{ prvoideál}\} \subseteqq \{R(q_1), \ldots, R(q_n)\}\,.$$

Abychom dokázali první tvrzení věty, stačí dokázat, že v (4) platí rovnost. Nechť tedy $i \in N$. Položme $x_i = \bigvee\{q_j \mid j \in N \setminus \{i\}\}$, $x_1 = 0$ v případě $N = \{1\}$. Protože rozklad (2) je nezkratitelný, je jistě $x_i \ngeqq q_i$, $x_i \ngeqq a$; přitom pro každé $j \in N \setminus \{i\}$

platí $x_i \geqq q_j$. Tudíž podle 2.5 máme $r(x_i : a) = \bigcap\{r(x_i : q_j) | j \in N\} = R(q_i)$ a v (4) skutečně platí rovnost.

Nechť prvoideál $R(q_i)$, $i \in N$ je minimální v $\{R(q_1), \ldots, R(q_n)\}$, $n > 1$. Potom pro každé $j \in N \setminus \{i\}$ existuje $\alpha_j \in R(q_j)$, $\alpha_j \notin R(q_i)$. Pro $\alpha = \Pi\{\alpha_j | j \in N \setminus \{i\}\}$ je pak $\alpha \in R(q_j)$ pro každé $j \in N \setminus \{i\}$, avšak $\alpha \notin R(q_i)$. Tedy pro dostatečně velké přirozené k máme

$$\alpha^k a = \alpha^k q_1 \vee \ldots \vee \alpha^k q_n = \alpha^k q_i = q_i , \tag{5}$$

neboť z D-primárnosti prvku q_i plyne rovnost $\alpha q_i = q_i$ vzhledem k tomu, že $\alpha \notin R(q_i)$. Pro libovolné $\beta \in S \setminus R(q_i)$ je $\beta q_i = q_i$, takže $\beta a = \beta q_1 \vee \ldots \vee \beta q_n \geqq q_i$; tudíž $q_i = \bigwedge\{\alpha a | \alpha \in S \setminus R(q_i)\}$, cbd.

Vyjádření prvku $a \in L$, $a < 1$ ve tvaru průseku konečně mnoha primárních prvků S-svazu ${}_SL$ nazveme jeho primárním rozkladem v ${}_SL$. Primární rozklad v ${}_SL$

$$a = \bigwedge\{q_i | i \in N\} , \quad N = \{1, 2, \ldots, n\} \tag{6}$$

nazveme nezkratitelným, jestliže

$$r(q_i) \neq r(q_j) \quad \text{pro každá} \quad i, j \in N , \quad i \neq j , \quad a \ \bigwedge\{q_j | j \in N \setminus \{i\}\} \nleqq q_i$$

pro každé $i \in N$.

Z věty 2.4 použité na pravý S-svaz L_S^* a přechodem k levému S-svazu ${}_SL = {}_SL^{**}$ plyne, že pro libovolné primární prvky q_1, q_2 S-svazu ${}_SL$, pro něž $r(q_1) = r(q_2) = r$ je i $q_1 \wedge q_2$ primární a $r(q_1 \wedge q_2) = r$. Má-li tedy prvek $a \in L$ v ${}_SL$ primární rozklad, má i nezkratitelný primární rozklad. Stejnou úvahou pak z věty 2.6 plyne (pro $a \in L$, $x \in L$ je $x :^* a = a : x$) následující věta.

2.7. (Věta o jednoznačnosti primárního rozkladu.) *Nechť $a \in L$, $a < 1$ má v ${}_SL$ nezkratitelný primární rozklad (6). Pak množina $\{r(q_1), \ldots, r(q_n)\}$ je prvkem a jednoznačně určena (a pro každé $i \in N$ platí $r(q_i) = r(a : x_i)$, $x_i \nleqq a$. Dále je prvkem a jednoznačně stanovena množina $Q = \{q_j | j \in N, r(q_j)$ minimální v $\{r(q_1), \ldots, r(q_n)\}\}$ a při $n > 1$ platí pro každé $q_j \in Q$ rovnost $q_j = \bigvee\{a : \alpha | \alpha \in S \setminus r(q_j)\} = a : \alpha_j$.*

Obrátíme se k otázce po existenci D-primárního resp. primárního rozkladu. Prvek $a \in L$ nazveme spojově ireducibilním, jestliže pro každá $b, c \in L$ platí implikace $a = b \vee c \Rightarrow a = b$ nebo $a = c$.

2.8. (Věta o existenci D-primárního rozkladu.) *Nechť svaz L má klesající řetězce konečné. Pak v ${}_SL$ jsou tyto tři podmínky ekvivalentní:*

(i) *Každý prvek $0 < a \in L$ má v ${}_SL$ D-primární rozklad.*

(ii) *Pro každá $a \in L$, $\alpha \in S$, pro něž $\alpha a = \alpha^2 a$ existuje $b \in L$ a přirozené číslo $k \geqq 1$ tak, že $\alpha^k b = 0$, $a = \alpha a \vee b$.*

(iii) *Pro každá $a \in L$, $\alpha \in S$, pro něž $\alpha a = \alpha^2 a$ existuje přirozené $k \geqq 1$ tak, že $a = [a \wedge (0 : \alpha^k)] \vee \alpha a$.*

Je-li L modulární svaz, pak (i) *je ekvivalentní podmínce*

(iv) *Pro každá $a \in L$, $\alpha \in S$, pro něž $\alpha a = \alpha^2 a$ existuje přirozené $k \geqq 1$ tak, že $a \leqq \alpha a \vee (0 : \alpha^k)$.*

Splňuje-li ${}_S L$ podmínku

(v) *Pro každá $a \in L$, $\alpha \in S$. pro něž $0 : \alpha < a$, existuje $b \in L$ tak, že $a = b : \alpha$,*

pak splňuje i podmínku (iv).

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Nechť $\alpha a = \alpha^2 a$, $a > 0$. Tedy $a = \bigvee\{q_i \mid i \in N\}$, kde q_i je D-primární pro každé $i \in N$. Pro dostatečně velké $k \geqq 1$ je pak pro každé $i \in N$ $\alpha^k q_i = 0$ anebo $\alpha^k q_i = q_i$, takže $\alpha a = \alpha^k a = \bigvee\{\alpha^k q_i \mid i \in N\} = \bigvee\{q_j \mid j \in N_1\}$, $N_1 \subset \subset N$ a $\alpha^k q_i = 0$ pro každé $i \in N \setminus N_1$. Pro $b = \bigvee\{q_i \mid i \in N \setminus N_1\}$ (resp. $b = 0$ při $N = N_1$) je $a = b \vee \alpha a$, $\alpha^k b = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Je-li $a = \alpha a \vee b$, $\alpha^k b = 0$, pak $0 : \alpha^k \geqq b$, $a \geqq b$, takže $a \wedge (0 : \alpha^k) \geqq b$ a proto $a = \alpha a \vee b \leqq \alpha a \vee [a \wedge (0 : \alpha^k)] \leqq a$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Neboť $\alpha^k[a \wedge (0 : \alpha^k)] \leqq \alpha^k(0 : \alpha^k) = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Stačí dokázat, že každý spojově ireducibilní prvek $a \in L$ je v ${}_S L$ D-primární. Nechť pro nějaké $\beta \in S$ je $\beta a < a$. Pak existuje $r \geqq 1$ takové, že $\beta^r a = \beta^{r+1} a$. Pro $\alpha = \beta^r$ pak platí $\alpha a = \alpha^2 a$, takže existuje $b \in L$ a $k \geqq 1$ tak, že $\alpha^k b = 0$, $a = \alpha a \vee b$. Je-li $b < a$, pak z ireducibility prvku a plyne rovnost $a = \alpha a$. Avšak $\alpha a = \beta^r a \leqq \beta a < a$, což je spor. Tedy platí $b = a$ a pak $0 = \alpha^k b = \alpha^k a = \beta^{k+r} a$, takže a je v ${}_S L$ D-primární.

Nechť svaz L je modulární. Pak (iii) $\Leftrightarrow$ (iv), neboť platí $a = [a \wedge (0 : \alpha^k)] \vee \alpha a = [\alpha a \vee (0 : \alpha^k)] \wedge a$. Konečně (v) $\Rightarrow$ (iv): Nechť $\alpha a = \alpha^2 a$; položme $\alpha a \vee (0 : \alpha) = y$. Stačí dokázat, že $y \geqq a$. Jest $\alpha a \leqq y$, $0 : \alpha \leqq y$. V případě, že $0 : \alpha = y$, je $\alpha y = 0$, takže $0 = \alpha y \geqq \alpha^2 a = \alpha a$, tedy $\alpha a = 0$ a $a \leqq 0 : \alpha = y$. V případě, že $0 : \alpha < y$, existuje $b \in L$ tak, že $y = b : \alpha$. Potom z $\alpha a \leqq y = b : \alpha$ plyne podle 1.6 (i) $b \geqq \alpha(b : \alpha) = \alpha y \geqq \alpha^2 a = \alpha a$. Tedy opět $a \leqq b : \alpha = y$.

Z věty 2.8 použité na pravý S-svaz L_S^* dostaneme přechodem k levému S-svazu ${}_S L = {}_S L^{**}$ větu o existenci primárního rozkladu v ${}_S L$:

2.9. (Věta o existenci primárního rozkladu.) *Nechť svaz L má rostoucí řetězce konečné. Pak jsou v ${}_S L$ tyto tři podmínky ekvivaletní:*

(i) *Každý prvek $1 > a \in L$ má v ${}_S L$ primární rozklad.*

(ii) *Pro každá $a \in L$, $\alpha \in S$, pro něž $a : \alpha = a : \alpha^2$ existuje $b \in L$ a přirozené číslo $k \geqq 1$ tak, že $b : \alpha^k = 1$, $a = (a : \alpha) \wedge b$.*

(iii) *Pro každá $a \in L$, $\alpha \in S$, pro něž $a : \alpha = a : \alpha^2$ existuje přirozené $k \geqq 1$ tak, že $a = (a : \alpha) \wedge [a \vee \alpha^k 1]$.*

Je-li L modulární svaz, pak (i) *je ekvivalentní podmínce*

(iv) *Pro každá* $a \in L, \alpha \in S$, *pro něž* $a: \alpha = a: \alpha^2$ *existuje* $k \geqq 1$ *tak, že* $a \geqq (a: \alpha) \wedge \wedge \alpha^k 1$.

Splňuje-li ${}_S L$ *podmínku*

(v) *Pro každá* $a \in L$, $\alpha \in S$, *pro něž* $\alpha 1 > a$, *existuje* $b \in L$ *tak, že* $a = \alpha b$, *pak splňuje i podmínku* (iv).

3.

Obraťme se k použití dosažených výsledků pro primární rozklady v pologrupách. Nechť $P = (P, \cdot)$ je pologrupa; pro jednoduchost předpokládejme, že P má jednotkový prvek e. Nechť n je přirozené číslo; n-ární relaci $A \subseteqq P^n$ na P nazveme stabilní, platí-li pro každé $x \in P$ implikace

$$(a_1, \ldots, a_n) \in A \Rightarrow (a_1 x, \ldots, a_n x) \in A \,, \quad (x a_1, \ldots, x a_n) \in A \,.$$

Oboustranné ideály pologrupy P tvoří při obvyklé definici násobení pologrupu $(I, \cdot)$; nechť S je její podpologrupa. Je-li A n-ární stabilní relace na P a $\alpha \in S$, definujme n-ární relaci $A \mathbin{.\,\cdot\,.} \alpha$ předpisem $(a_1, \ldots, a_n) \in A \mathbin{.\,\cdot\,.} \alpha \Leftrightarrow \forall x \in \alpha((a_1 x, \ldots, a_n x) \in A)$. Relace $A \mathbin{.\,\cdot\,.} \alpha$ je opět stabilní: je-li $(a_1, \ldots, a_n) \in A \mathbin{.\,\cdot\,.} \alpha$, $z \in P$, pak pro každé $x \in \alpha$ je $(a_1 x, \ldots, a_n x) \in A$, tedy i $(z a_1 x, \ldots, z a_n x) \in A$, neboť A je stabilní; tedy $(z a_1, \ldots, z a_n) \in A \mathbin{.\,\cdot\,.} \alpha$. S druhé strany platí pro každé $x \in \alpha$ $zx \in \alpha$, takže $(a_1 zx, \ldots \ldots, a_n zx) \in A$ a tedy $(a_1 z, \ldots, a_n z) \in A \mathbin{.\,\cdot\,.} \alpha$.

Pro operaci $\mathbin{.\,\cdot\,.}$ platí tyto vztahy:

(1) $A \mathbin{.\,\cdot\,.} \alpha \supseteqq A$,

(2) $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \mathbin{.\,\cdot\,.} \alpha = \bigcap_{i \in I} (A_i \mathbin{.\,\cdot\,.} \alpha)$,

(3) $A \mathbin{.\,\cdot\,.} (\alpha\beta) = (A \mathbin{.\,\cdot\,.} \beta) \mathbin{.\,\cdot\,.} \alpha$.

Důkaz. Stačí ukázat platnost (3), ostatní je zřejmé: $(a_1, \ldots, a_n) \in A \mathbin{.\,\cdot\,.} (\alpha\beta) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \forall x \in \alpha, \forall y \in \beta ((a_1 xy, \ldots, a_n xy) \in A) \Leftrightarrow \forall x \in \alpha ((a_1 x, \ldots, a_n x) \in A \mathbin{.\,\cdot\,.} \beta) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (a_1, \ldots, a_n) \in (A \mathbin{.\,\cdot\,.} \beta) \mathbin{.\,\cdot\,.} \alpha$.

Nechť L je libovolná množina n-árních stabilních relací na P, která obsahuje relaci P^n, je uzavřená na libovolné průniky a je uzavřená vzhledem k operaci $\mathbin{.\,\cdot\,.}$. Při uspořádání inkluzí tvoří L úplný svaz $L = (L, \subseteqq, \vee, \cap)$; nechť $L^* = (L, \leqq, \vee^*, \wedge)$ je svaz duální ke svazu L. Ze vztahů (1), (2), (3) ihned plyne, že (S, L^*, u), kde $u(\alpha, A) = A \mathbin{.\,\cdot\,.} \alpha$, je levý S-svaz ${}_S L^*$. Relace $A \in L$ je D-primární prvek v ${}_S L^*$, právě když pro každý ideál $\alpha \in S$ platí implikace

$$A \mathbin{.\,\cdot\,.} \alpha \neq A \Rightarrow A \mathbin{.\,\cdot\,.} \alpha^k = P^n \quad \text{pro nějaké} \quad k \geqq 1 \,.$$

Předpokládejme v dalším, že svaz L má rostoucí řetězce konečné (a tedy L^* má klesající řetězce konečné).

Podle věty 2.8 má pak každá relace $A \in L$ v $_SL^*$ D-primární rozklad právě tehdy, jestliže pro každý ideál $\alpha \in S$ platí ve svazu L implikace

(4) $$A \therefore \alpha = A \therefore \alpha^2 \Rightarrow A = (A \therefore \alpha) \cap [A \vee (P^n : \alpha^k)],$$

kde $k \geqq 1$ a $P^n : \alpha^k$ značí nejmenší relaci R v L s vlastností $R \therefore \alpha^k = P^n$.

Definujme nyní pro každý ideál $\alpha \in S$ n-ární relaci I_α na P předpisem

$$(a_1, \dots, a_n) \in I_\alpha \Leftrightarrow \exists x \in \alpha, (b_1, \dots, b_n) \in P^n \ (a_i = b_i x \text{ pro } i = 1, \dots, n).$$

Relace I_α je zřejmě stabilní a je to nejmenší n-ární relace na P, pro niž platí $I_\alpha \therefore \alpha = P^n$: je-li totiž B n-ární stabilní relace na P s vlastností $B \therefore \alpha = P^n$, pak pro každé $x \in \alpha$ a každou n-tici $(a_1, \dots, a_n) \in P^n$ platí $(a_1 x, \dots, a_n x) \in B$, takže $I_\alpha \subseteqq B$. K relaci $A \in L$ a ideálu $\alpha \in S$ označme A_α nejmenší relaci v L obsahující A i I_α. Pak tedy v L je $A_\alpha = A \vee (P^n : \alpha)$ a podmínku (4) lze přepsat do tvaru

(5) $$A \therefore \alpha = A \therefore \alpha^2 \Rightarrow A = (A \therefore \alpha) \cap A_\beta, \quad \beta = \alpha^k \quad \text{pro nějaké} \quad k \geqq 1.$$

V případě, že svaz L je modulární a pro každý ideál $\alpha \in S$ obsahuje relaci I_α, lze podmínce (5) dát tvar

(6) $$A \therefore \alpha = A \therefore \alpha^2 \Rightarrow A \supseteqq (A \therefore \alpha) \cap I_\beta, \quad \beta = \alpha^k \quad \text{pro nějaké} \quad k \geqq 1,$$

neboť v tomto případě je $I_\beta = P^n : \alpha^k$ a z modularity svazu L plyne rovnost $(A \therefore \alpha) \cap (A \vee I_\beta) = A \vee [(A \therefore \alpha) \cap I_\beta]$, takže (4) $\Leftrightarrow$ (6).

Zvolme nyní pologrupu S takto: Nechť $K = \{x \in P \mid Px = xP\}$. Zřejmě je $(K, \cdot)$ podpologrupa pologrupy P. Nechť S je tvořena všemi hlavními ideály PxP, $x \in K$ pologrupy P. Pro $x, y \in K$ je $(xy) P = (xP)(yP)$.

3.1. *Pro každou relaci $A \in L$ a každý ideál $xP \in S$ platí ekvivalence $(a_1, \dots, a_n) \in A \therefore (xP) \Leftrightarrow (a_1 x, \dots, a_n x) \in A$.*

Důkaz plyne z ekvivalencí $(a_1 x, \dots, a_n x) \in A \Leftrightarrow \forall z \in P\, ((a_1 xz, \dots, a_n xz) \in A) \Leftrightarrow \forall y \in xP\, ((a_1 y, \dots, a_n y) \in A)$.

3.2. *Nechť L obsahuje s každou relací A i realci $A_\alpha = A \cup I_\alpha$ pro každý ideál $\alpha = xP \in S$. Pak podmínka (5) je splněna.*

Důkaz. Nechť $A \therefore \alpha = A \therefore \alpha^2$ a nechť $(a_1, \dots, a_n) \in (A \therefore \alpha) \cap A_\alpha$. Tedy předně $(a_1, \dots, a_n) \in A_\alpha$, takže $(a_1, \dots, a_n) \in A$ anebo $(a_1, \dots, a_n) = (b_1 x, \dots, b_n x)$, kde $(b_1, \dots, b_n) \in P^n$, jak plyne z definice relace I_α a z volby pologrupy S. Zároveň je $(a_1, \dots, a_n) \in A \therefore \alpha$, takže z rovnosti $(a_1, \dots, a_n) = (b_1 x, \dots, b_n x)$ plyne, že $(b_1 x^2, \dots, b_n x^2) \in A$. Protože $x^2 P = \alpha^2 \in S$, dostáváme odtud podle 3.1, že $(b_1, \dots, b_n) \in A \therefore \alpha^2 = A \therefore \alpha$, takže $(b_1 x, \dots, b_n x) \in A$. Vždy je tedy $(a_1, \dots, a_n) \in A$ a proto $(A \therefore \alpha) \cap A_\alpha = A$. Opačná inkluze je zřejmá. Platí tedy (5) pro $k = 1$.

Z důkazu 3.2 ihned plyne

3.3. *Je-li L modulární svaz obsahující každou relaci I_α, kde $\alpha = xP \in S$, pak v ${}_SL^*$ platí podmínka* (6).

Případ unárních relací ($n = 1$) nám dá výsledky týkající se oboustranných ideálů pologrupy P. Vyšetřeme třeba případ, kdy P je multiplikativní pologrupa okruhu R s jednotkovým prvkem, nosič svazu L je množina všech oboustranných ideálů okruhu R a pologrupa S je tvořena všemi těmi hlavními ideály RxR okruhu R, pro něž $Rx = xR$. Ideál Q je pak D-primární prvek v ${}_SL^*$, právě když pro každý prvek $x \in R$, pro nějž $Rx = xR$ a pro každý prvek $a \in R$ platí implikace

$$(7) \qquad ax \in Q\,, \quad a \notin Q \Rightarrow x^k \in Q \quad \text{pro nějaké} \quad k \geqq 1\,.$$

Splňuje-li R maximální podmínku pro ideály, pak vzhledem k tomu, že L je modulární svaz, platí podle 3.3 podmínka (6) a v R je tedy každý ideál průnikem konečně mnoha ideálů splňujících (7) a tento rozklad je ve smyslu věty 2.7 jednoznačný.

Je-li T jakákoliv pologrupa ideálů okruhu R, je pak ideál Q okruhu R D-primární prvek v ${}_TL^*$, právě když pro každý prvek $r \in R$ a každý ideál $A \in T$ platí implikace

$$(8) \qquad rA \subseteqq Q\,, \quad r \notin Q \Rightarrow A^k \subseteqq Q \quad \text{pro nějaké} \quad k \geqq 1\,.$$

Jestliže R splňuje maximální podmínku pro ideály a ke každé dvojici ideálů $A \in L$, $B \in T$, pro něž $A \subseteqq B$, existuje ideál $C \in L$ tak, že $A = CB$, pak každý ideál okruhu R je průnik konečně mnoha ideálů splňujících (8). To plyne z věty 2.8 (v), která říká, že postačující podmínka pro existenci D-primárního rozkladu v ${}_TL^*$ je platnost implikace

$$R : B \supseteqq A \Rightarrow A = C : B\,, \quad C \in L$$

pro každý ideál $A \in L$ a každý ideál $B \in T$. V našem případě snadno zjistíme, že $C : B = \bigcap\{X \in L \mid X \therefore B \supseteqq C\} = CB$, $R : B = B$.

Případ binárních relací ($n = 2$) můžeme použít na kongruence nebo stabilní tolerance na pologrupě P. Je-li A kongruence (resp. stabilní tolerance) na P a je-li $\alpha \in S$, kde S je pologrupa všech ideálů tvaru PxP, pro něž $Px = xP$, pak — jak lehce zjistíme — je relace $A \therefore \alpha$ opět kongruence (resp. stabilní tolerance) na P. Pro každý ideál $\alpha = Px \in S$ jsme definovali relaci I_α předpisem $(a, b) \in I_\alpha \Leftrightarrow a = a'x$, $b = b'x$ pro nějaká $a', b' \in P$. Nechť $\bar{I}_\alpha$ je nejmenší kongruence (resp. stabilní tolerance) na P obsahující I_α. Pak zřejmě je $\bar{I}_\alpha = \Delta_P \cup I_\alpha$, kde Δ_P je diagonála kartézského součinu P^2. Je-li A kongruence (resp. stabilní tolerance) na P, $\alpha = Px \in S$, pak nejmenší kongruence (resp. stabilní tolerance) na P obsahující A a I_α je $\tilde{A}_\alpha$ kde

$$(a, b) \in \tilde{A}_\alpha \Leftrightarrow (a, b) \in A \quad \text{anebo} \quad (a, a'x) \in A\,, \quad (b, b'x) \in A \quad \text{pro nějaká} \quad a', b' \in P$$

(resp. $\tilde{A}_\alpha = A \cup I_\alpha$).

Nechť nyní nosič svazu L je množina kongruencí (resp. stabilních tolerancí) na P taková, že obsahuje P^2 a je uzavřená na libovolné průniky a na operaci $\therefore$. Snadnou modifikací důkazu tvrzení 3.2 dokážeme větu

3.4. *Nechť L obsahuje s každou kongruencí (stabilní tolerancí) A i kongruenci (stabilní toleranci) $\bar{A}_\alpha$ pro každý ideál $\alpha = Px \in S$. Pak pro každou $A \in L$ a každý ideál $\alpha \in S$ je splněna podmínka (5). Je-li svaz L modulární a pro každý ideál $\alpha \in S$ obsahuje L kongruenci (stabilní toleranci) $\bar{I}_\alpha = \Delta_P \cup I_\alpha$, pak je splněna podmínka (6) pro $k = 1$.*

Literatura

[1] *M. F. Atiyah, I. G. Macdonald:* Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley Publ. Comp., 1969.

[2] *K. Drbohlav:* Zur Theorie der Kongruenzrelationen auf kommutativen Halbgruppen. Math. Nachrichten *26* (1964), 233—245.

Summary

PRIMARY DECOMPOSITIONS

VÁCLAV VILHELM

The paper deals with decompositions of elements of a complete lattice $(L, \vee, \wedge)$, on which a given semigroup $(S, \cdot)$ acts as follows: if $\alpha \in S$, $x \in L$, then $\alpha x \leqq x$ and the mapping $\alpha: L \rightarrow L$ is an endomorphism of the complete semilattice $(L, \vee)$. The results yield a simple common view on primary decompositions of submoduls in moduls, or on primary decompositions of ideals and congruences in semigroups.

Резюме

ПРИМАРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

VÁCLAV VILHELM

В работе изучаются разложения элементов полной решетки $(L, \vee, \wedge)$, на которой действует данная полугруппа $(S, \cdot)$ таким образом, что для любого $\alpha \in S$ отображение $\alpha: L \rightarrow L$ является эндоморфизмом полной полурешетки $(L, \vee)$ и $\alpha x \leqq x$ для всех $x \in S$. Результаты работы делают возможным простой общий взгляд на примарные разложения подмодулей в модулях, идеалов и конгрузнций на полугруппах.

Adresa autora: Stavební fakulta ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6.