Časopis pro pěstování matematiky

Jiří Sedláček

O jednom zobecnění vnějškově rovinných grafů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 113 (1988), No. 2, 213--218

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/118344`

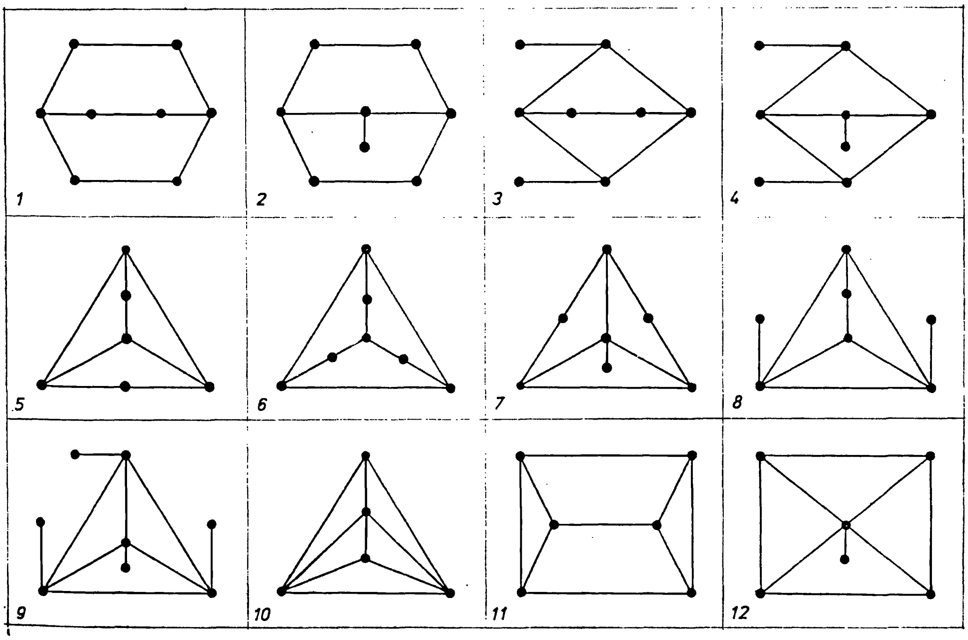
113 (1988) ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY No. 2, 213—218

O JEDNOM ZOBECNĚNÍ VNĚJŠKOVĚ ROVINNÝCH GRAFŮ

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

(Došlo dne 26. března 1986)

Souhrn. Studium lokálních vlastností rovinných grafů nás vede k tomuto zobecnění vnějškově rovinných grafů: Zobecněný vnějškově rovinný graf je rovinný graf, který se dá vnořit do roviny tak, že každá hrana má aspoň jeden koncový uzel na hranici jedné a téže oblasti. Je dokázáno, že G je zobecněný vnějškově rovinný graf právě tehdy, jestliže žádný podgraf grafu G není homeomorfní z některého z grafů znázorněných na obr. 1.



Obr. 1

Keyword: Outerplanar graphs.

AMS classification: 05C10.

Ke zobecnění zmíněnému v nadpise můžeme dojít při studiu lokálních vlastností rovinných grafů, jak si za okamžik ukážeme. Pojmy, které zde nejsou definovány, se najdou např. v knížce [8]. Všechny grafy v tomto článku jsou konečné, neorientované a nemají smyčky ani násobné hrany.

V dalším budou užitečné některé názvy a symboly. Jsou-li G_1, G_2 izomorfní, píšeme $G_1 \cong G_2$. Říkáme, že G_3 je *homeomorfní* z grafu G_4, je-li buď $G_3 \cong G_4$ nebo lze-li postupným půlením hran grafu G_4 dojít ke grafu G_4^* tak, že $G_3 \cong G_4^*$.

Užitečné je označovat sled (cestu) v grafu stručně $u - v$, začíná-li v uzlu u a končí ve v a je-li z kontextu jasné, o který z možných sledů (cest) jde.

Je-li G rovinný graf vnořený do roviny, pak nechť $o(G)$ značí množinu všech bodů této roviny, jež jsou obrazem buď nějakého uzlu nebo bodu na některé hraně nebo bodu uvnitř nějaké konečné oblasti vymezené grafem G. Nechť hr (G) je hranice množiny $o(G)$.

Blok grafu se nazývá *cyklický*, má-li aspoň tři uzly.

Okolí $N_1(u)$ uzlu u v grafu G definujeme (ve shodě s [10] a [6]) jako podgraf indukovaný na množině všech uzlů sousedních s u. Je-li u izolovaný, pak $N_1(u)$ je prázdný graf. Podrobněji nazýváme $N_1(u)$ *okolím prvního druhu*. V [6] jsme také zavedli *okolí druhého druhu* (označení $N_2(u)$) jako podgraf grafu G indukovaný na množině všech hran sousedních s u. Přitom hrana vw se nazývá *sousední* s uzlem u, není-li s ním incidentní a je-li aspoň jeden z uzlů v, w sousední s u. Neexistuje-li k uzlu u žádná sousední hrana, pak $N_2(u)$ definujeme jako prázdný graf. Okolí $N_2(u)$ byla už studována např. ve [2], [3], [6] a [7].

Připomeňme si známý pojem vnějškově rovinného grafu. Graf G se nazývá *vnějškově rovinný* (anglicky *outerplanar*), dá-li se vnořit do roviny tak, že existuje oblast Ω_1 vymezená grafem G, na jejíž hranici leží každý uzel grafu G. Třídu všech vnějškově rovinných grafů označíme $\mathfrak{A}_1$.

Zobecněný vnějškově rovinný graf G zavedeme nyní takto: Je to graf, který se dá vnořit do roviny tak, že existuje oblast Ω_2 vymezená grafem G, na jejíž hranici má každá hrana grafu G aspoň jeden svůj koncový uzel. Třídu všech zobecněných vnějškově rovinných grafů označme $\mathfrak{A}_2$.

Zavedeme-li ještě symbol $\mathfrak{A}_3$ pro třídu všech rovinných grafů, pak zřejmě platí

$$\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{A}_3 .$$

Je-li G rovinný graf, potom všechna jeho uzlová okolí prvního druhu patří do $\mathfrak{A}_1$, jak jsme konstatovali už v [5]. Podobně se snadno přesvědčíme, že v rovinném grafu jsou všechna uzlová okolí druhého druhu ze třídy $\mathfrak{A}_2$.

Charakterizace grafů ze třídy $\mathfrak{A}_1$ je známá a uvádíme ji zde bez důkazu.

Věta 1 (G. Chartrand a F. Harary [1]). *Graf G patří do $\mathfrak{A}_1$ právě tehdy, neobsahuje-li žádný podgraf homeomorfní z K_4 nebo z $K_{2,3}$.*

Analogickou větu můžeme vyslovit také pro třídu $\mathfrak{A}_2$, což je právě hlavním účelem tohoto článku.

Věta 2. *Graf G patří do $\mathfrak{A}_2$ právě tehdy, neobsahuje-li žádný podgraf homeomorfní z některého ze 12 grafů*) znázorněných na obr. 1.*

Než budeme větu 2 dokazovat, předešleme několik pomocných pojmů a dvě lemmata.

Nechť G je souvislý graf s aspoň jednou artikulací. Nechť B je blok grafu G a buďte $a_1, a_2, \ldots, a_r$ všechny artikulace grafu G patřící do B. Připojme k B uzly $b_1, b_2, \ldots, b_r$ nepatřící do B a hrany a_ib_i $(1 \leqq i \leqq r)$. Hrany a_ib_i budeme nazývat *přídavné*; připojením přídavných hran a_ib_i rozumíme současné přidání nových uzlů b_i a nových hran a_ib_i. Vzniklý graf budiž $B^{(+)}$. Je-li G bez artikulací, klademe $G^{(+)} = G$. Bez důkazu uvádíme toto pomocné tvrzení:

Lemma 1. *Souvislý graf G je ze třídy $\mathfrak{A}_2$ právě tehdy, jestliže pro každý jeho cyklický blok B platí $B^{(+)} \in \mathfrak{A}_2$.*

Nechť nyní G je souvislý rovinný graf bez artikulací obsahující kružnici Z. Znázorníme-li G v rovině, pak obraz kružnice Z rozdělí rovinu na dvě oblasti (vnitřní Ω a vnější $\bar{\Omega}$). Nechť uvnitř Ω leží uzel u grafu G. Nechť $S = S(Z, u)$ je množina všech cest C v grafu G s těmito vlastnostmi:

(i) cesta C obsahuje u;

(ii) cesta C neobsahuje žádný uzel ze Z jako svůj vnitřní uzel.

Všechny uzly a hrany cest z množiny S tvoří zřejmě souvislý rovinný graf $G(Z, u)$, který je podgrafem v G. Tento podgraf nazveme *předivo* vytvořené uzlem u vzhledem k Z (podle německé terminologie *Gespinst*, *Spinnwebe* – viz [4], [9]; anglické a francouzské termíny jsou uvedeny na str. 79 ve [4]). Uzly přediva $G(Z, u)$, jež nepatří do Z, se jmenují *vnitřní*, ostatní jsou *okrajové*. Jsou-li kromě uzlu u všechny uzly přediva okrajové, pak předivo se nazývá *singulární*.

I další pomocnou větu podáváme bez důkazu.

Lemma 2. *Nechť $G(Z, u)$ je předivo souvislého rovinného grafu G bez artikulací s okrajovými uzly $v_1, v_2, \ldots, v_m$ $(m \geqq 2)$. Potom existuje strom T těchto vlastností:*

(i) T je podgraf grafu $G(Z, u)$;

(ii) uzly 1. stupně stromu T jsou právě uzly $v_1, v_2, \ldots, v_m$.

Nyní se vraťme k větě 2 a k jejímu důkazu.

Důkaz věty 2. Stačí se omezit na grafy souvislé. Je zřejmé, že G není z $\mathfrak{A}_2$, obsahuje-li podgraf homeomorfní z některého grafu na obr. 1.

Abychom dokázali obrácené tvrzení, předpokládejme, že G neobsahuje žádný podgraf homeomorfní z některého z oněch grafů, avšak G není z $\mathfrak{A}_2$. Kdyby G nebyl rovinný, pak by podle Kuratowského věty obsahoval podgraf homeomorfní buď z K_5 nebo z $K_{3,3}$. V prvním případě by z toho plynula existence podgrafu homeomorfního z *10*, ve druhém existence podgrafu homeomorfního z *5*. Je tedy G rovinný. Protože

*) V dalším textu citujeme tyto grafy jako *1, 2, ..., 12.*

není $G \in \mathfrak{A}_2$, musí G podle lemmatu 1 obsahovat cyklický blok B takový, že neplatí $B^{(+)} \in \mathfrak{A}_2$. Vnořme $B^{(+)}$ do roviny a označme Z kružnici tvořící při tomto vnoření hranici té oblasti vymezené blokem B, s jejímiž uzly inciduje maximální počet hran grafu $B^{(+)}$. Můžeme předpokládat, že už máme to vnoření grafu $B^{(+)}$, při němž je toto maximum největší. Znázornění lze volit tak, že hr B je právě obrazem kružnice Z. Obraz kružnice Z dělí rovinu na dvě oblasti, konečnou Ω a nekonečnou $\bar{\Omega}$. Protože není $B^{(+)} \in \mathfrak{A}_2$, musí v Ω ležet aspoň jedna hrana xy, jež neinciduje se žádným uzlem kružnice Z. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že x patří do B. Sestrojme předivo $B(Z, x)$ a označme $v_1, v_2, \ldots, v_m$ $(m \geqq 2)$ všechny jeho okrajové uzly. Budeme rozlišovat tři případy.

a) Případ $m = 2$. Uzly v_1, v_2 dělí Z na dvě části Z_1, Z_2. Přidejme k Z_i $(i = 1, 2)$ jednak každý uzel u z $B^{(+)}$ sousední k nějakému uzlu v ze Z_i $(v_1 \neq v \neq v_2)$, jednak každou hranu uv; tím nechť vznikne ze Z_i graf $Z_i^{(+)}$. Nechť $Z_2^{(+)}$ má aspoň tolik hran jako $Z_1^{(+)}$. Kdyby graf $Z_1^{(+)}$ měl aspoň tři hrany, pak bychom v $B^{(+)}$ našli podgraf homeomorfní z některého z grafů *1, 2, 3, 4*. Má-li $Z_1^{(+)}$ právě dvě hrany v_1w, wv_2, překlopíme celé $B(Z, x)$ a jeho přídavné hrany do Ω, přičemž v_1, v_2 zůstávají pevné a obraz uzlu w se octne v novém zobrazení uvnitř konečné oblasti vymezené novou hranicí bloku B. V novém vnoření do roviny inciduje s uzly zobrazenými na hr B více hran grafu $B^{(+)}$ než v původním vnoření (spor). Podobný spor dostaneme, má-li $Z_1^{(+)}$ jedinou hranu v_1v_2.

b) Případ $m = 3$. Strom T sestrojený v $B(Z, x)$ podle lemmatu 2 je homeomorfní z $K_{1,3}$. Nechť t je uzel 3. stupně v T. Cesty $t - v_1$, $t - v_2$, $t - v_3$ nemohou mít všechny délku aspoň 2, neboť to by byl spor s grafem *6*.

Kdyby na T cesta $t - v_1$ měla délku 1 a cesta $t - v_3$ délku aspoň 2, pak z *5* by plynulo, že na Z je hrana v_1v_2. Vzhledem k *6* musí na Z být aspoň jedna ze hran v_1v_3, v_2v_3; nechť je tu v_1v_3. Nechť C_{23} je složení cest $v_2 - t$, $t - v_3$. Je-li w libovolný uzel z C_{23}, pak každá cesta $v_1 - w$ v B mající s C_{23} společný jen uzel w, má délku 1 (plyne z *5*).

Nechť W je množina všech vnitřních uzlů cesty C_{23}, pro něž existuje v B hrana v_1w. Odstraníme-li z $B(Z, x)$ uzel v_1 a hrany v_1w pro každé $w \in W$, vznikne souvislý graf Q, v němž každý prvek z W je artikulací. Kdyby totiž nějaké $w \in W$ nebylo artikulací v Q, pak by v Q existovala kružnice O obsahující hrany rw, ws a to r resp. s z $v_2 - w$ resp. $w - v_3$. Na O by musely existovat uzly r_0, s_0 $(r_0 \neq w \neq s_0)$ tak, že r_0 resp. s_0 patří do $v_2 - w$ resp. do $w - v_3$, přičemž jedna z cest (označme ji C_{00}), na něž r_0, s_0 dělí O, neobsahuje uvnitř žádný uzel z C_{23}. Při $r_0 \neq v_2$, $s_0 \neq v_3$, máme spor s *11*. Při $r_0 \neq v_2$, $s_0 = v_3$ rozlišme tři případy:

(i) je-li uvnitř $v_2 - r_0$ na C_{23} nějaký prvek z W, máme spor s *11*;

(ii) je-li r_0 první prvek na C_{23} patřící do W, je spor s *10*;

(iii) jsou-li všechny prvky z W uvnitř $r_0 - v_3$, spor s *5*.

Při $r_0 = v_2$, $s_0 \neq v_3$ je to obdobné. Ve zbývajícím případě $r_0 = v_2$, $s_0 = v_3$ najdeme na C_{00} resp. C_{23} vnitřní uzel w_0 resp. w_{23} tak, že v Q existuje cesta $w_0 - w_{23}$ mající jen uzel w_0 společný s C_{00} a jen w_{23} společný s C_{23}. Případ $w_{23} = w$ je ve sporu s *10*, zatímco $w_{23} \neq w$ vede ke kružnici neprocházející současně oběma uzly v_2, v_3.

Překlopme nyní $B(Z, x)$ spolu s hranami v_1v_2, v_1v_3 a hranami přídavnými tak, že v_2, v_3 jsou pevné a v_1, t si vymění místo. Toto překlopení označme φ. V novém vnoření leží každé $w \in W$ na hr $B^{(+)}$. Ptejme se, zda uzly nové hranice incidují s více hranami než původně. Tento spor nastane při $|W| \geqq 2$ a také při $|W| = 1$, neexistuje-li současně hrana v_1w', $w' \notin C_{23}$. Existuje-li při $|W| = 1$ hrana v_1w', pak s přihlédtím k *8* nesmí tu být hrana v_2w'', $w'' \notin C_{23}$ a vzhledem k 7 musí existovat v_2t na C_{23} a v_2v_3 na Z. Stačí tedy vyměnit označení v_1, v_2 a φ vede opět ke sporu.

Kdyby existovalo T pouze jako singulární předivo, tj. $T \cong K_{1,3}$, existovala by přídavná hrana u t. Podle 7 lze předpokládat, že na Z jsou hrany v_1v_2, v_1v_3. Není-li na Z hrana v_2v_3, pak podle *8* musí být v_1 stupně 3. Je-li tu v_2v_3, musí podle *9* aspoň jeden z uzlů v_1, v_2, v_3 (např. v_1) být stupně 3. V obou případech φ vede ke sporu.

c) Případ $m \geqq 4$. Strom T může mít nejvýš jeden uzel stupně aspoň 3, neboť opak by vedl k *11*. Je tedy T homeomorfní z $K_{1,m}$. Kdyby na T byl vnitřní uzel přediva, je to spor s *5*. Existuje-li jen T izomorfní s $K_{1,m}$, musí u uzlu stupně m být přídavná hrana (spor s *12*). Tím důkaz končí.

Poznámka. Výsledek obsažený ve větě 2 byl součástí referátu, který autor proslovil v Polsku na konferenci o kombinatorické analýze (Pokrzywna, 16.—20. září 1985).

Literatura

[1] *G. Chartrand, F. Harary:* Planar permutation graphs. Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. *B 3* (1967), 433—438.

[2] *Z. Ryjáček:* Graphs with non-isomorphic vertex neighbourhoods of the first and second types. Časopis pěst. mat. *112* (1987), 390—394.

[3] *Z. Ryjáček:* On graphs with isomorphic, non-isomorphic and connected N_2-neighbourhoods. Časopis pěst. mat. *112* (1987), 66—79.

[4] *H. Sachs:* Einführung in die Theorie der endlichen Graphen II. Leipzig 1972.

[5] *J. Sedláček:* Finite graphs with distinct neighbourhoods. In: Graphs, Hypergraphs and Applications. Proc. Eyba 1984. Teubner-Texte zur Mathematik 73. Leipzig 1985, 152—156.

[6] *J. Sedláček:* Lokální vlastnosti grafů. Časopis pěst. mat. *106* (1981), 290—298.

[7] *J. Sedláček:* Über eine spezielle Klasse von asymmetrischen Graphen. In: Graphen in Forschung und Unterricht. Kiel 1985, 167—177.

[8] *J. Sedláček:* Úvod do teorie grafů (třetí vydání). Praha 1981.

[9] *H. Walther, H.-J. Voss:* Über Kreise in Graphen. Leipzig 1974.

[10] *A. A. Zykov:* Problem 30. In: Theory of graphs and its applications. Proc. Smolenice 1963. Praha 1964, 164—165.

Резюме

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ВНЕШНЕПЛАНАРНЫХ ГРАФОВ

JIŘÍ SEDLÁČEK

Изучение локальных свойств планарных графов приводит к следующему обобщению внешнепланарных графов: Обобщенный внешнепланарный граф — это планарный граф, который можно уложить на плоскости таким образом, что каждое ребро обладает хотя бы одной концевой вершиной на границе одной и той же грани. В статье доказано, что G есть обобщенный внешнепланарный граф тогда и только тогда, когда ни один его подграф не гомеоморфен некоторому из графов изображённых на рисунке 1.

Summary

ON A GENERALIZATION OF OUTERPLANAR GRAPHS

JIŘÍ SEDLÁČEK

The study of local properties of planar graphs motivates the following generalization of outerplanar graphs: A generalized outerplanar graph is a planar graph which can be embedded in the plane in such a way that at least one endvertex of each edge lies on the boundary of the same face. It is shown that G is a generalized outerplanar graph if and only if no subgraph of G is homeomorphic from one of the graphs in Fig. 1.

Adresa autora: Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1.