Časopis pro pěstování matematiky

Leonid M. Koganov

Использование одного комбинаторного тождества при перечислении комбинаций, инвариантных относительно подстановки

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 112 (1987), No. 1, 58--65

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/118294`

112 (1987) ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY No. 1, 58—65

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОДНОГО КОМБИНАТОРНОГО ТОЖДЕСТВА ПРИ ПЕРЕЧИСЛЕНИИ КОМБИНАЦИЙ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОДСТАНОВКИ

Л. М. КОГАНОВ, Москва

Светлой памяти Руфуса (Роберта Эдварда) Боуэна, павшего смертью храбрых

(Поступило в редакцию 22/II. 1984 г.)

Резюме. Дается общее определение комбинации. Показано, что формулы Врба связи основных функций от матрицы и лемма Мэннинга из символической динамики суть следствия общеизвестного комбинаторного тождества, служащего (с необходимыми дополнениями), для полного определения двухиндексной последовательности Стирлинга второго рода. Доказательства этих утверждений основаны на перечислении комбинаций, инвариантных относительно фиксированной подстановки с даным числом циклов.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Комбинацией или комбинаторной структурой мы будем называть конечное множество с введенным на нем конечным числом конечноместных отношений.

Обычно, с целью фиксации попарного различия элементов базисного множества комбинации, на этом множестве вводится линейный порядок (пометка в старой терминологии), или же в качестве базисного множества выбирается отрезок натурального ряда $\{1, 2, \ldots, n\}$.

2. Пусть $S(n, k)$ — число эквивалентностей из k классов на n — элементном множестве.

Классифицируя отображения n — элементного множества в множество из x элементов (пока x — натурального число) по „линиям уровня", приходим к общественному соотношению [1; стр. 43, (35)]:

$$\sum_{k=1}^{n} S(n, k)\,(x)_k = x^n\,; \quad n \geqq 1\,, \tag{1}$$

где, как обычно, $(x)_k = x(x-1)\ldots(x-(k-1))$; $k \geqq 1$.

Так как x — произвольное натуральное число, то полиномы в левой и правой частях совпадают на бесконечном множестве значений, следовательно, (1) выполняется при любых (действительных, комплексных) значениях переменной x.

Подставляя в (1) $x = -1$, получаем тождество

$$(2)\qquad \sum_{k=1}^{n} S(n, k)\, k!(-1)^k = (-1)^n\,; \quad n \geqq 1\,,$$

которое проще всего интерпретируется как отождествление подсчёта функции Мёбиуса на максимальном сегменте $[\emptyset, X]$ множества всех подмножеств конечного X, упорядоченных по включению. Левая часть (2) возникает при применении формулы Ф. Холла [2; стр. 346, предложение 6], а правая в результате использования теоремы и произведении [2; стр. 345, предложение 5].

Деля обе части (1) на x, рассматривая два случая: $n = 1$ и $n \geqq 2$, и полагая, затем $x = 0$, получаем тождество:

$$(3)\qquad \sum_{k=1}^{n} S(n, k)(-1)^{k-1}(k-1)! = \delta_{n,1}\,; \quad n \geqq 1\,,$$

которое интерпретируется как рекуррентность с „левым свободным концом":

$$\sum_{x:0 \leqq x \leqq I} \mu(x, I) = \delta(0, I)$$

для функции Мёбиуса на максимальном сегменте решётки эквивалентностей конечного n – элементного множества [2; стр. 359, предложение 1][1].

3. Кроме тождеств (2) и (3), нам потребуется хорошо известное соотношение [1; стр. 55, 14в)]:

$$(4)\qquad S(n+1, k+1) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} S(j, k)\,; \quad k \geqq 1\,,$$

которое может быть легко получено классификацией элементов, находящихся в одном блоке с выделенным фиксированным элементом (например, имеющим номер 1).

2. ФОРМУЛЫ ВРБА

4. Рассмотрим симметрическую группу S_n преобразований множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. С другой стороны элемент $\tau \in S_n$ можно естественно трактовать как комбинацию – ориентированный граф с множеством рёбер $\{(i, j) \mid i \xrightarrow{\tau} j\}$, связные компоненты которого суть простые несамопересекающиеся контуры – циклы подстановки τ. Четность τ определяется знаком $\operatorname{sgn} \tau = (-1)^{n-k}$, где k – число циклов τ. Это определение, как легко видеть, совпадает с принятым в теории определителей, поскольку каждый цикл разлагается в произведение транспозиций, число которых на единицу меньше длины цикла, а общее число элементов во всех циклах равно степени подстановки (подробности см. в [4]).

[1]) В отличие от предположений, сделанных на стр. 343 этой классической работы, в решетке разбиений множества из одного элемента нуль и единица совпадают, чем обусловлен вид правой части (3).

Сопоставим, так же как это делается в [3; стр. 33 соответствию $i \xrightarrow{\tau} j$ весий (a_{ij} [1]), а подстановке τ – произведение весов соответств $w\tau = a_{1i_1}a_{2i_2}0], \ldots$ $\ldots a_{ni_n}$. Веса соответствий удобно расположить в виде квадратной матрицы $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqq i = n \\ 1 \leqq j = n}}$.

5. Главной подматрицей матрицы A будем называть матрицу, образованную элементами, стоящими на пересечении строк и столбцов, причем подмножества номеров строк и столбцов совпадают.

Обычном образом определяются функции от матрицы:

$$\det A = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn} \tau \, w(\tau) \; ; \tag{5}$$

$$\operatorname{per} A = \sum_{\tau \in S_n} w(\tau) \, . \tag{6}$$

6. Пусть $\pi = N/M_1M_2 \ldots M_k$ – разбиение множества $D = \{1, 2, \ldots, n\}$ на k блоков $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Посредством $A(M_1), A(M_2), \ldots, A(M_k)$ обозначим главные подматрицы A, соответствующие этим блокам.[2] Следующие две формулы первоначально получены А. Врба методом неопределенных коэффициентов с привлечением обращения Мёбиуса на решетке разбиений.

Теорема 1. [5; стр. 296 (3.3)–(3.4)]. *Имеют место следующие соотношения, связывающие функции* det *и* per *на множестве квадратных матриц:*

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \, k! \sum_{N/M_1M_2\ldots M_k} \operatorname{per} A(M_1) \ldots \operatorname{per} A(M_k) \; ; \tag{7}$$

$$\operatorname{per} A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \, k! \sum_{N/M_1M_2\ldots M_k} \det A(M_1) \ldots \det A(M_k) \, . \tag{8}$$

Доказательство. А. Сначала будем доказывать формулу (7). Зафиксируем произвольную подстановку τ множества $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, имеющую l циклов. Покажем, что $w(\tau)$ встречается во внутренней сумме (7) ровно $S(l, k)$ раз, а именно в тех и только тех разбиениях, которые инвариантны относительно τ в том смысле, что каждый цикл τ содержится целиком в одном из блоков инвариантного разбиения.

В. Заметим, что существует ровно $S(l, k)$ разбиений N на k блоков, которые инвариантны относительно τ. Действительно, мы можем считать независимые циклы τ элементами, на множестве которых линейным порядком на N индуцируется линейный лексикографический порядок.

[1]) Обычно предполагается, что a_{ij} суть элементы коммутативного кольца с единицей, содержащего в качестве подполя рациональные числа так, что единицы совпадают.

[2]) Мы намеренно используем удобные, на наш взгляд, авторские обозначения Антонина Врба для облегчения сравнения нашего доказательства с оригинальным.

C. Пусть, напротив, разбиение $N/M_1M_2\dots M_k$ не инвариантно относительно τ. Покажем, что в этом случае $w(\tau)$ не встречается во внутренней сумме правой части (7).

Действительно, в этом случае найдется блок разбиения M_t и также $i,j\in N$, что $i\in M_t$, $i \xrightarrow{\tau} j$, $j\notin M_t$. Но тогда матричный элемент a_{ij} – составляющая веса $w(\tau)$ не принадлежит ни одной из главных подматриц, образованных разбиением $N/M_1M_2\dots M_k$.

D. Коэффициент, с которым $w(\tau)$входит в правую часть (7), равен, таким образом в силу соотношения (2),

$$\sum_{k=1}^{l}(-1)^{n-k}\,k!\,S(l,k)=(-1)^{n-l}=\operatorname{sgn}\tau\,,$$

что и завершает доказательство (7), так как правая часть приведена к правой части (5)

E. Совершенно аналогично рассматривается правая часть (8); где так же согласно (2), $w(\tau)$ присутствует

$$\sum_{k=1}^{l}(-1)^{n-k}\,k!\,S(l,k)\,(-1)^{n-l}=1\ \text{раз}\,.$$

Последним замечанием доказательство тождеств Врба (7) и (8) завершено, комбинаторное содержание их выяснено.

7. Замечание 1. Тождество (2) было получено А. Врба специализацией из (7) в случае, когда A – единичная матрица [5; стр. 296, п. 4, 9-е тождество].

Замечание 2. Д. М. Джексон приводит соотношения (7) и (8) без всяких ссылок на работу Врба в [6; стр. 251, теорема 8.1 (i)–(ii)], при этом (i) соотвествует (8) настоящего текста, а (ii) – формуле (7). Далее доказывается (8) при помощи представления per A как коэффициента при произведении первых степеней переменных разложения Мак-Магона $[\det(I-XA)]^{-1}$ (см. [8; гл. V, стр. 54–60]; [9])[1]. Так как $\det(I-XA)$ легко вычисляется либо прямой комбинаторной классификацией по числу задействованных единиц в матричных элементах главной диагонали, либо специализацией известной формулы для разложения определителя более общего вида [11; стр. 28], то применяя для нахождения искомого коэффициента в $[\det(I-XA)]^{-1}$ сначала формулу суммы геометрической прогрессии, а затем полиноминальную теорему в сочетании с комбинаторными рассуждениями (разбиения мономов), Джексон получает формулу (8). Далее, он пишет, что часть (ii) доказывается аналогичным образом. Однако, на наш взгляд, это утверждение в контексте несостоятельно, ибо совершенно неизвестно, существует ли аналог разложения Мак-Магона в ряд выражения $[\operatorname{per}(I-XA)]^{-1}$, и с чем отождествлять полученную вышеизложенным методами правую часть (7) остается неясным.

[1]) X — матрица, на диагонали которой стоят переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ на остальных местах нули, I — единичная матрица размера $n\times n$.

Замечание 3. Любопытно отметить, что, как показано в диссертации Д. Фоата [7, 3.4, стр. 106—111] и далее им в совместной работе с Картье [8; стр. 2; 56—57], само разложение Мак-Магона является точным аналогом ζ — функции Римана на моноиде независимых циклов, порождающих так называемые подстановки мультимножества [10; 5.1, стр. 37—50, особенно 5.1.2 — 19 и 20]. Таким образом, $\det(I - XA)$ есть аналог μ — ряда Дирихле с тем лишь отличием, что мультипликативные составляющие весовых переменных суть индетерминанты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и матричные элементы A, трансцедентные, вообще говоря, относительно значений μ на упомянутом моноиде.

Это наводит на мысль о мультипликативном разложении $\det(I - XA)$, аналогичном классическим бесконечным произведениям для $\zeta(s)$ и $\mu(s)$ — рядов Дирихле. Именно такой подход к теореме Мак-Магона был осуществлен в доказательстве, данном А. К. Аврамёнком [9].

3. ЛЕММА МЭННИНГА

8. Будем называть упорядоченным полуразбиением конечное множество с выделенным на нем упорядоченным набором непустых непересекающихся подмножеств (не обязательно покрывающих в объединении все множество), которые будем называть блоками упорядоченного полуразбиения.

Алгоритм, доставляющий упорядоченные полуразбиения, следующий:

1°. Выделение непустого подмножества.

2°. Разбиение выделенного подмножества на блоки.

3°. Введение линейного порядка на множестве блоков, полученных на предыдущем шаге.

Диаграмма упорядоченного полуразбиения множества $\{1, 2, \ldots, 10\}$ приведена на рис. 1:

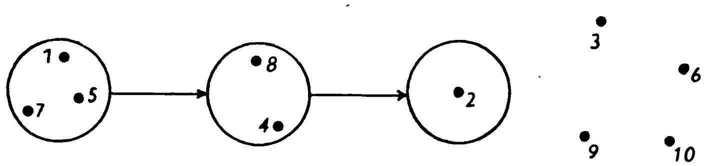

Рис. 1

Элементы базисного множества, не принадлежащие ни одному из блоков упорядоченного полуразбиения, удобно собрать в особый блок, находящийся в конце цепи, как показано, на рис. 2:

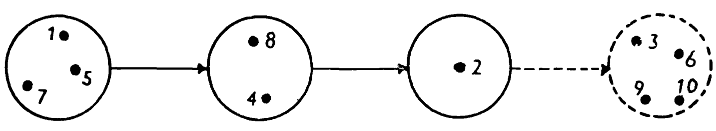

Рис. 2

Упорядоченное полуразбиение является надструктурой, т.е. суперпозицией двух структур — полуразбиения и линейного порядка (перестановки в старой терминологии) на множестве блоков полуразбиения. Вопросы суперпозиции (частичной суперпозиции) комбинаций рассмотрены Рейнером [12; стр. 99—102, опр. 14—17], Джони [13; стр. 147—149, опр. 3.1—3.2] и в опубликованной диссертации [14].

9. Будем называть упорядоченное полуразбиение инвариантным относительно подстановки τ на базисном множестве, если каждый цикл τ либо входит целиком в один из блоков упорядоченного полуразбиения, либо не пересекается ни с одним из них (лежит целиком вне блоков).

Теорема 2. (Лемма Мэннинга [15]). *Пусть* OSP (τ, q) — *число упорядоченных полуразбиений, инвариантных относительно фиксированной подстановки* τ (*базисные множества упорядоченного полуразбиения и подстановки совпадают*) *и имеющих* q *блоков. Тогда имеет место соотношение Мэннинга:*

$$\sum_{q=1}^{\infty}(-1)^{q+1}\,\mathrm{OSP}(\tau, q) = 1\,. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть τ имеет p циклов. Выберем из этого числа t циклов, из которых сформируем q блоков, которые затем линейно упорядочим. Последовательность описанных операций можно осуществить $\binom{p}{t} S(t, q)\, q!$ способами. Суммируя по t и используя (4), преобразуем левую часть (9) к виду

$$\sum_{q=1}^{\infty}(-1)^{q+1}\sum_{t=q}^{p}\binom{p}{t} S(t, q)\, q! = \sum_{q=1}^{\infty}(-1)^{q+1} S(p+1, q+1)\, q! =$$
$$= \sum_{q=0}^{\infty}(-1)^{q+1} S(p+1, q+1)\, q! - [(-1)\, 0!\, S(p+1, 1)] =$$
$$= -\delta_{1,p+1} + 1 = 1\,,$$

где мы использовали (3), тот факт, что существует единственное одноблочное разбиение: $S(p+1, 1) = 1$, и тот факт, что $p \geqq 1$, $p+1 \geqq 2$, и $\delta_{1,p+1} = 0$. Тем самым левая часть (9) преобразована в правую, и лемма Мэннинга полностью доказана. В ходе доказательства было полностью выяснено комбинаторное содержание этого предложения, находящего себе применение в символической динамике [16; § 5, стр. 127—128, 131—132. Лемма (5.5)].

10. Замечание 4. Можно было остановится на дальнейших связях между исчислением комбинаций (перечислением) и символической динамикой, например, обратить внимание читателя на тот факт, что выражение ζ — функции Смейла топологической марковской цепи [16; стр. 207—208, ф-лы (4.4) и (4.6)] является специализацией разложения Мак-Магона, но это лишь вероятное поле дальнейших исследований.

Литература

[1] *Дж. Риордан:* Введение в комбинаторный анализ. М., ИЛ., 1963.
[2] *G.-C. Rota:* On the foundations of combinatorial theory I. Theory of Mobius functions. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete. *2* (1964), No 4, 340—368.
[3] G. *C. Rota:* Baxter algebras and combinatorial identities. II. Bulletin of the Amer. Math. Soc. *75* (1969), 2, 330—334.
[4] *А. И. Кострикин:* Введение в алгебру. М. Наука, 1977, гл. IV, 2, п. 4, стр. 146—156.
[5] *A. Vrba:* An inversion formula, matrix functions, combinatorial identities and graphs. Čas. pěst. mat. *98* (1973), 292—297.
[6] *D. M. Jackson:* The combinatorial interpretation of the Jacobs identity from Lie algebras. J. Combinatorial Theory, A23 (1977), 233—256.
[7] *D. Foatá:* Etude algébrique de certains problèmes de l'analyse combinatoire et du calcul des probabilités. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, *14* (1965), 81—241.
[8] *P. Cartier, D. Foatá:* Problèmes combinatoires de commutation et réarangement. Lecture Notes in Math. *85* (1969).
[9] *А. К. Аврамёнок:* Алгебраическое доказательство главной теоремы Мак-Магона. Сб. Комбинаторный и асимптотический анализ. Красноярск. Изд-во Крас ГУ, (1975), 147—150.
[10] *Д. Кнут:* Искусство программирования для ЭВМ, т. III, Сортировка и поиск. М., Мир, 1978, No 5, 1.2, 37—50.
[11] Э. *Чезаро:* Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых, ч. 1, М.-Л., ОНТИ, 1936, стр. 28.
[12] *D. L. Reiner:* The combinatories of polynomial sequences. Studies in Appl. Math. *58* (1978), 95—117.
[13] *S. A. Joni:* The multiindexed partitional. Discrete Mathematics *26* (1979), 145—163.
[14] *A. Joyal:* Une théorie combinatoire des séries formelles. Advances in Math. *42* (1981), 1—82.
[15] *A. Manning:* Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions. Bull. London Math. Soc. *3* (1971), 215—220.
[16] *Р. Боуэн:* Методы символической динамики. Сер. „Математика Новое в зарубежной науке", вып. 13. М., Мир, 1979.

Souhrn

APLIKACE JEDNÉ KOMBINATORICKÉ IDENTITY NA VÝČET KOMBINACÍ INVARIANTNÍCH VZHLEDEM K SUBSTITUCI

LEONID KOGANOV

V práci je dána obecná definice kombinace a ukázáno, že formule A. Vrby, týkající se základních maticových funkcí a Manningovo lemma ze symbolické dynamiky jsou důsledky všeobecně známé kombinatorické identity, jež slouží (s nutnými doplňky) k úplnému určení dvojné Stirlingovy posloupnosti druhého druhu. Důkazy jsou založeny na výčtu kombinací invariantních vzhledem k fixované substituci se zadaným počtem cyklů.

Summary

APPLICATION OF A COMBINATORIAL IDENTITY TO THE ENUMERATION OF COMBINATIONS INVARIANT WITH RESPECT TO SUBSTITUTION

LEONID KOGANOV

A general definition of combination is introduced. It is proved that formulas of A. Vrba concerning the fundamental matrix functions as well as Manning's lemma from symbolic dynamics are consequences of a generally known combinatorial identity which serves (with necessary appendix) for complete determination of Stirling double indexed sequence of 2nd kind. The proofs are based on the enumeration of combinations invariant with respect to a fixed substitution with a given number of cycles.

Адресс автора: Грузинский вал 26, кв. 39, 123056 Москва, Д-56, СССР.