Otakar Borůvka

Sur les blocs des équations différentielles linéaires du deuxième ordre et leurs transformations

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 111 (1986), No. 1, 78--88

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/118267

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 111 (1986), Praha

SUR LES BLOCS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU DEUXIÈME ORDRE ET LEURS TRANSFORMATIONS

OTAKAR BORŮVKA, Brno

Hommage à mon cher ami M. Jaroslav Kurzweil pour son 60e anniversaire

(Reçu le 10 Juin 1985)

1. INTRODUCTION

Nous considérons les équations différentielles ordinaires linéaires du deuxième ordre de la forme jacobienne

$$\mathbf{P} \qquad y'' = P(t)\, y\,,$$

aux porteurs continus dans l'intervalle $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$: $P \in C^0$. Nous supposons ces équations oscillatoires et donc jouissant de la propriété que leurs intégrales admettent infiniment beacoup de zéros qui s'accumulent vers les deux extrémités de $\mathbf{R}$. Nous désignons par M l'ensemble $\{\mathbf{P}\}$.

Les équations considérées étant oscillatoires, elles sont transformables les unes dans les autres. Les transformateurs qui réalisent ces transformations sont les fonctions-phases, c'est-à-dire les applications 3-difféomorphes de l'intervalle $\mathbf{R}$ sur lui-même. L'ensemble des fonctions-phases, muni de la loi de multiplication définie par composition de fonctions, est le groupe $\mathfrak{G}$, appelé le groupe des phases. On a étudié à plusieurs occasions la structure algébrique interne du groupe $\mathfrak{G}$, en relation avec les transformations des équations considérées [2]–[8], [10], [11].

Or, notre problème actuel est précisément de ce genre dont nous venons de parler.

Considérons une équation $\mathbf{P} \in M$. Il lui correspond le groupe des dispersions, $\mathfrak{B}_P$ $(\subset \mathfrak{G})$, formé, rappelons-le, des transformateurs de l'équation $\mathbf{P}$ dans elle-même. Le groupe $\mathfrak{B}_P$ engendre deux décompositions sur $\mathfrak{G}$, la décomposition en classes à droite, $\bar{A}_P$, et celle en classes à gauche, $\bar{B}_P$. Nous désignons par $\bar{U}_P$ et $\bar{V}_P$ le plus petit recouvrement et le plus grand raffinement de ces décompositions: $\bar{U}_P = [\bar{A}_P, \bar{B}_P]$, $\bar{V}_P = (\bar{A}_P, \bar{B}_P)$ [1] p. 30. Étant donné un élément $\bar{u} \in \bar{U}_P$ nous entendons sous le bloc associé à $\bar{u}$ l'ensemble $A_{\bar{u}} \subset M$ consistant en équations qui sont les transformées de l'équation $\mathbf{P}$ par les transformateurs-éléments de $\bar{u}$.

Cela étant précisé, notre problème consiste en étude des propriétés des blocs en question. Nous allons montrer en particulier que chaque bloc $A_{\bar{u}}$ est fermé et complet par rapport aux transformations de ses éléments, réalisées par les dispersions de l'équation P. L'ensemble $\{A_{\bar{u}}\}$ $\forall \bar{u} \in \bar{U}_{\mathsf{P}}$ est une décomposition de M, covariante par rapport aux transformations de l'équation P par les fonctions phases.

Le groupe $\mathfrak{G}$ représente évidemment un domaine d'opérateurs de l'ensemble M, dont les éléments agissent aux équations considérées en transformateurs. Or, en tenant compte des relations existant entre les équations en question et leurs transformateurs (v. 1.1–3), on trouve facilement que le groupe $\mathfrak{G}$ opère dans M [9]. De plus, chaque équation $\mathsf{P} \in M$ étant transformable dans toute équation $\mathsf{Q} \in M$, le groupe $\mathfrak{G}$ opère dans M transitivement et donc l'être $(M, \mathfrak{G})$ est un espace homogène. La théorie que nous allons développer est au fond une étude des propriétés de cet espace homogène $(M, \mathfrak{G})$.

2. GÉNÉRALITÉS

Dans le but de faciliter la lecture de cet article, nous commençons par compléter les indications précédentes.

1. Transformateurs. On sait que, toute équation $\mathsf{P} \in M$ peut être transformée dans toute équation $\mathsf{Q} \in M$. Cela veut dire qu'il existe de fonctions-phases, $\alpha \in \mathfrak{G}$, changeant chaque intégrale de P, $y(x)$, dans une intégrale de Q, $Y(t)$, suivant la formule

$$Y(t) = \frac{c}{\sqrt{|\alpha'(t)|}}\, y(\alpha(t)) \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad (0 \neq c = \text{const})\,.$$

Ces fonctions α s'appelent transformateurs de l'équation P dans Q. Nous écrivons par occasion $\mathsf{P} -\alpha\rightarrow \mathsf{Q}$ ou bien $\mathsf{Q} = \mathsf{P}^{\alpha}$.

Les transformateurs en question obéissent, rappelons-le, aux règles suivantes:

Pour $\mathsf{P}, \mathsf{Q}, \mathsf{R} \in M$ *on a*

1. $\mathsf{P} -\mathrm{id}\rightarrow \mathsf{P}$;
2. $\mathsf{P} -\alpha\rightarrow \mathsf{Q} \Rightarrow \mathsf{Q} -\alpha^{-1}\rightarrow \mathsf{P}$ $(\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = \mathrm{id}\ (\in \mathfrak{G}))$;
3. $\mathsf{P} -\alpha\rightarrow \mathsf{Q},\ \mathsf{Q} -\beta\rightarrow \mathbf{R} \Rightarrow \mathsf{P} -\alpha\beta\rightarrow \mathbf{R}$.

2. Tout transformateur de l'équation P dans Q, α, vérifie l'équation de Kummer

$$(PQ) \qquad -\{X, t\} + P(X) \,.\, X'^2(t) = Q(t) \quad \forall t \in \mathbf{R}\,,$$

et, inversement, toute fonction-phase, α, satisfaisant à l'équation (PQ) transforme l'équation P dans Q.

Nous désignons $\mathrm{I}[P, Q]$ l'ensemble des transformateurs de l'équation P dans Q. On a, manifestement,

$$(1) \qquad \mathrm{I}[P, Q] = \mathrm{I}^+[P, Q] \cup \mathrm{I}^-[P, Q]$$

les ensembles (non vides) $I^+[P, Q]$ et $I^-[P, Q]$ consistant en intégrales de l'équation (PQ) qui vont constamment en croissant et constamment en décroissant, respectivement.

Les règles 1.1 – 3 entraînent:

Pour $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R} \in M$ *on a*

1. $\mathrm{id} \in I[P, P]$;
2. $\alpha \in I[P, Q] \Rightarrow \alpha^{-1} \in I[Q, P]$;
3. $\alpha \in I[P, Q],\ \beta \in I[Q, R] \Rightarrow \alpha\beta \in I[P, R]$.

Subsistent, manifestement, pour d'arbitraires éléments $\mathbf{P} \in M$, $\alpha \in \mathfrak{G}$ les formules suivantes:

$$P^{\alpha} = -\{\alpha, \cdot\} + P(\alpha) \,.\, \alpha'^2 \,; \quad P = -\{\alpha^{-1}, \cdot\} + P^{\alpha}(\alpha^{-1}) \,.\, \alpha^{-1'2} \,.$$

3. Dispersions. On appelle dispersions de l'équation $\mathbf{P} \in M$ les transformateurs de l'équation $\mathbf{P}$ dans elle-même. Nous avons déjà rappelé que ces fonctions forment le groupe des disperisons de l'équation $\mathbf{P}$, $\mathfrak{B}_P$ $(\subset \mathfrak{G})$. Il est digne de remarque que le groupe $\mathfrak{B}_P$ est à trois paramètres [2].

Les dispersions de $\mathbf{P}$ vérifient, évidemment, l'équation de Kummer (PP). Subsiste donc une relation telle que (1),

$$\mathfrak{B}_P = \mathfrak{B}_P^+ \cup \boldsymbol{B}_P^- \,; \tag{2}$$

ici l'ensemble des dispersions constamment croissantes, $\mathfrak{B}_P^+$, forme un sous-groupe distingué de $\mathfrak{B}_P$, tandis que l'ensemble des dispersions constamment décroissantes, $\boldsymbol{B}_P^-$ $(\subset \mathfrak{B}_P)$, forme l'autre classe du grupe-quotient $\mathfrak{B}_P/\mathfrak{B}_P^+$.

Le groupe $\mathfrak{B}_P^+$ jouit de la remarquable propriété que son centre, $\mathfrak{C}_P$, appelé par occasion le centre de $\mathbf{P}$, est un groupe monogène infini. Plus exactement, $\mathfrak{C}_P$ consiste en dispersions centrales de $\mathbf{P}$, φ_n $(n = 0, \pm 1, \ldots)$, c'est-à-dire en transformateurs changeant chaque intégrale de $\mathbf{P}$, y, dans elle-même (si n est paire) ou dans $-y$ (si n est impaire): $y(\varphi_n)/\sqrt{\varphi_n'} = (-1)^n\, y$.

L'intersection des groupes des dispersions des équations $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in M$, $\mathfrak{P}_{PQ} = \mathfrak{B}_P \cap \cap\, \mathfrak{B}_Q$, peut être exprimée, manifestement, par la formule

$$\mathfrak{P}_{PQ} = (\mathfrak{B}_P^+ \cap \mathfrak{B}_Q^+) \cup (\boldsymbol{B}_P^- \cap \boldsymbol{B}_Q^-) \,. \tag{3}$$

L'intersection $\mathfrak{P}_{PQ}$ est dite de la *première* ou de la *seconde espèce* suivant que $\boldsymbol{B}_P^- \cap \cap\, \boldsymbol{B}_Q^- = \emptyset$ ou bien $\boldsymbol{B}_P^- \cap \boldsymbol{B}_Q \neq \emptyset$.

4. Les décompositions $\bar{A}_P$, $\bar{B}_P$. Le groupe $\mathfrak{B}_P$ engendre les deux décompositions sur $\mathfrak{G}$: la décomposition en classes à droite, $\bar{A}_P$, et celle en classes à gauche, $\bar{B}_P$, et l'on a

$$\bar{A}_P = \{\mathfrak{B}_P\alpha\}\ \forall\alpha \in \mathfrak{G}\,, \quad \bar{B}_P = \{\alpha\mathfrak{B}_P\}\ \forall\alpha \in \mathfrak{G}\,.$$

Subsistent, manifestement, les formules

$$\bar{a} \in \bar{A}_P \Rightarrow \bar{a}^- \in \bar{B}_P\,, \quad \bar{b} \in \bar{B}_P \Rightarrow \bar{b}^- \in \bar{A}_P$$

$$\bar{A}_P^- = \bar{B}_P\,, \quad \bar{B}_P^- = \bar{A}_P\,,$$

ou $\bar{a}^-$ par exemple désigne l'ensemble $\{\alpha^{-1}\}\ \forall\alpha \in \bar{a}$.

En se servant des propositions 2.2–3 on trouve:

1. *Pour* $\mathbf{P} \in M$, $\alpha \in \mathfrak{G}$, *on a*

$$\mathfrak{B}_P\alpha = \mathrm{I}[P, P^\alpha]\,, \quad \alpha\mathfrak{B}_P = \mathrm{I}[P^{\alpha^{-1}}, P]\,.$$

2. *Pour* $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in M$, $\alpha \in \mathrm{I}[P, Q]$ *on a*

$$\mathrm{I}[P, Q] = \mathfrak{B}_P\alpha = \alpha\mathfrak{B}_Q\,.$$

Finalement, nous allons démontrer la proposition suivante:

3. *Pour* $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in M$, $\tau \in \mathfrak{G}$, *on a*

$$\mathrm{I}[P^\tau, Q^\tau] = \tau^{-1}\mathrm{I}[P, Q]\,\tau\,.$$

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathrm{I}[P, Q]$. On a, d'après 2, $\mathrm{I}[P, Q] = \mathfrak{B}_P\alpha$. De même, la relation $\tau \in \mathrm{I}[P, P^\tau]$ entraîne $\mathrm{I}[P, P^\tau] = \mathfrak{B}_P\tau = \tau\mathfrak{B}_{P\tau}$, d'où $\mathfrak{B}_{P\tau} = \tau^{-1}\mathfrak{B}_P\tau$. D'autre part, les formules $P^\tau \xrightarrow{\tau^{-1}} P \xrightarrow{\alpha} Q \xrightarrow{\tau} Q^\tau$ donnent $\tau^{-1}\alpha\tau \in \mathrm{I}[P^\tau, Q^\tau]$. Il en résulte

$$\tau^{-1}\mathrm{I}[P, Q]\,\tau = \tau^{-1}\mathfrak{B}_P\alpha\tau = \tau^{-1}\mathfrak{B}_P\tau(\tau^{-1}\alpha\tau) = \mathfrak{B}_{P\tau}(\tau^{-1}\alpha\tau) = \mathrm{I}[P^\tau, Q^\tau]\,. \qquad \square$$

5. Les décompositions $\bar{U}_P$, $\bar{V}_P$. Nous désignons $\bar{U}_P$ et $\bar{V}_P$ le plus petit recouvrement et le plus grand raffinement des décompositions $\bar{A}_P$, $\bar{B}_P$, respectivement.

On sait que, tout élément $\bar{u} \in \bar{U}_P$ est la réunion de certaines classes $\bar{a} \in \bar{A}_P$ et, en même temps, la réunion de certaines classes $\bar{b} \in \bar{B}_P$, $\bar{u} = \cup\,\bar{a} = \cup\,\bar{b}$, et l'on a $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ pour $\bar{a}, \bar{b} \subset \bar{u}$. Nous appelons *bandes adjointes à* $\mathbf{P}$, plus simplement *bandes*, les éléments $\bar{u} \in \bar{U}_P$.

Subsiste, rappelons-le, la proposition suivante [1] p. 163:

1. *Pour* $\bar{u} \in \bar{U}_P$, $\alpha \in \bar{u}$ *on a* $\bar{u} = \mathfrak{B}_P\alpha\mathfrak{B}_P$; *inversement, les données* $\alpha \in \mathfrak{G}$, $\bar{u} = \mathfrak{B}_P\alpha\mathfrak{B}_P$ *entraînent* $\bar{u} \in \bar{U}_P$, $\alpha \in \bar{u}$.

En ce qui concerne la décomposition $\bar{V}_P$, tout élément $\bar{v} \in \bar{V}_P$ est l'intersection non vide d'une classe $\bar{a} \in \bar{A}_P$ et d'une classe $\bar{b} \in \bar{B}_P$: $\bar{v} = \bar{a} \cap \bar{b}$; et inversement.

Nous allons terminer ces indications au sujet de fondements de nos recherches par la proposition suivante, facile à démontrer:

2. *On a*

$$\bar{U}_P^- = \bar{U}_P\,, \quad \bar{V}_P^- = \bar{V}_P\,.$$

3. DÉCOMPOSITIONS EN BLOCS DE L'ENSEMBLE M

6. Blocs à droite et blocs à gauche. Considérons une équation $\mathbf{P} \in M$ (*équation de base*).

Soit $\bar{u} \in \bar{U}_P$. Nous savons que $\bar{u}$ figure en réunion de certaines classes de la décomposition $\bar{A}_P$ dont chacune, $\bar{a}$, consiste en transformateurs de $\boldsymbol{P}$ dans une équation $A \in \boldsymbol{M}$. Nous écrivons $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{\bar{a}}$ et nous avons, d'après 4.1, $\boldsymbol{P}^{\bar{a}} = \boldsymbol{P}^{\alpha}\ \forall\alpha \in \bar{a}$.

Nous appelons *bloc à droite associé à $\bar{u}$*, plus simplemenet *bloc à droite*, l'ensemble $\boldsymbol{A}_{\bar{u}} = \{\boldsymbol{P}^{\bar{a}}\}\ \forall\bar{a} \in \bar{u} \sqcap \bar{A}_P$. On a naturellement $\boldsymbol{A}_{\bar{u}} \subset \boldsymbol{M}$.

Cette définition entraîne les formules suivantes:

1. $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{A}_{\bar{u}} \Rightarrow \mathrm{I}[P, A] \subset \bar{u}$; $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M}$, $\mathrm{I}[P, A] \subset \bar{u} \Rightarrow \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{A}_{\bar{u}}$.

Des raisonnements analogues conduisent à la notion de blocs à gauche. La bande $\bar{u} \in \bar{U}_P$ étant la réunion de certaines classes de la décomposition $\bar{B}_P$, il lui correspond l'ensemble $\boldsymbol{B}_{\bar{u}} = \{P^{\bar{b}^-}\}\ \forall\bar{b} \in \bar{u} \sqcap \bar{B}_p$; ici $\boldsymbol{P}^{\bar{b}^-}$ désigne 1' équation $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{M}$ déterminée par $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{\bar{b}^-} = \boldsymbol{P}^{\beta^{-1}}\ \forall\beta \in \bar{b}$.

Nous appelons *bloc à gauche associé à $\bar{u}$*, plus simplement *bloc à gauche*, l'ensemble $\boldsymbol{B}_{\bar{u}}\ (\subset \boldsymbol{M})$ et nous avons évidemment les formules:

2. $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{B}_{\bar{u}} \Rightarrow \mathrm{I}[B, P] \subset \bar{u}$; $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{M}$, $\mathrm{I}[B, P] \subset \bar{u} \Rightarrow \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{B}_{\bar{u}}$.

7. Relations entre les blocs à droite et les blocs à gauche. Les blocs en question, associés aux éléments de $\bar{U}_P$, remplissent les relations suivantes:

1. *Pour $\bar{u} \in \bar{U}_P$ on a*

$$\boldsymbol{A}_{\bar{u}} = \boldsymbol{B}_{\bar{u}^-}\,, \quad \boldsymbol{B}_{\bar{u}} = \boldsymbol{A}_{\bar{u}^-}\,.$$

Démonstration. Soit $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{A}_{\bar{u}}$. Cette relation entraîne $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{\bar{a}}$, $\bar{a} \in \bar{A}_P \sqcap \bar{u}$. Or, on a manifestement $(\bar{b} =)\ \bar{a}^- \in \bar{B}_P \sqcap \bar{u}^-$ et donc $(\boldsymbol{B} =)\ \boldsymbol{P}^{\bar{b}^-} \in \boldsymbol{B}_{\bar{u}^-}$. D'autre part, la relation $\bar{b}^- = \bar{a}$ entraîne $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$ et donc $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{B}_{\bar{u}^-}$. Conclusion: $\boldsymbol{A}_{\bar{u}} \subset \boldsymbol{B}_{\bar{u}^-}$. On trouve de même: $\boldsymbol{B}_{\bar{u}^-} \subset \boldsymbol{A}_{\bar{u}}$. $\square$

8. Décomposition en blocs de l'ensemble $\boldsymbol{M}$. Soit $\mathbb{A}_P$ l'ensemble formé des blocs à droite associés aux différents éléments $\bar{u} \in \bar{U}_P$:

$$\mathbb{A}_P = \{\boldsymbol{A}_{\bar{u}}\}\ \forall\bar{u} \in \bar{U}_P\,.$$

1. *$\mathbb{A}_P$ est une décomposition de l'ensemble $\boldsymbol{M}$.*

Démonstration. Nous avons à montrer que les propositions suivantes soient vraies:

a. $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M} \Rightarrow \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{A}_{\bar{u}}$ pour une convenable bande $\bar{u} \in \bar{U}_P$;

b. $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in \bar{U}_P$, $\bar{u}_1 \neq \bar{u}_2 \Rightarrow \boldsymbol{A}_{\bar{u}_1} \cap \boldsymbol{A}_{\bar{u}_2} = \emptyset$.

Ad a. Nous avons, d'après 6.1, $\bar{u} \supset \mathrm{I}[P, A] \Rightarrow \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{A}_{\bar{u}}$.

Ad b. $\bar{U}_P$ étant une décomposition sur $\mathfrak{G}$, l'hypothèse $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in \bar{U}_P$, $\bar{u}_1 \neq \bar{u}_2$ entraîne $\bar{u}_1 \cap \bar{u}_2 = \emptyset$. D'autre part, s'il existait une équation $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{A}_{\bar{u}_1} \cap \boldsymbol{A}_{\bar{u}_2}$ on aurait, d'après 6.1, $\mathrm{I}[P, A] \subset \bar{u}_1 \cap \bar{u}_2 \neq \emptyset$, ce qui est absurde. $\square$

Nous appelons *décomposition en blocs à droite par rapport à l'équation* $\boldsymbol{P}$ la décomposition de l'ensemble $\boldsymbol{M}$, $\mathbb{A}_P$. Remarquons que, cette décomposition $\mathbb{A}_P$ est bien déterminée par la seule équation $\boldsymbol{P}$.

Des raisonnements analogues mènent à la notion de *décomposition en blocs à gauche par rapport à l'équation* $\mathbf{P}$ *de l'ensemble* $\boldsymbol{M}$:

$$\mathbb{B}_P = \{\boldsymbol{B}_{\bar{u}}\} \quad \forall \bar{u} \in \bar{U}_P \, .$$

Inutile de dire que, la décomposition $\mathbb{B}_P$ est encore bien déterminée par la seule équation $\mathbf{P}$.

Les propositions 7.1 et 5.2 montrent que les deux décompositions $\mathbb{A}_P$ et $\mathbb{B}_P$ coïncident:

$$\mathbb{A}_P = \mathbb{B}_P \, .$$

La décomposition de l'ensemble $\boldsymbol{M}$, $\mathbb{M}_P$, définie de deux manières différentes, $\mathbb{A}_P = \mathbb{M}_P = \mathbb{B}_P$, prend le nom de *décomposition en blocs par raport à l'équation* $\mathbf{P}$ et ses élements s'appelent *blocs adjoints à l'équation* $\mathbf{P}$, simplement *blocs*. Dans la suite nous employons la définition $\mathbb{M}_P = \mathbb{A}_P$ et nous continuons à désigner par $\boldsymbol{A}_{\bar{u}}$ les blocs associés aux éléments $\bar{u} \in \bar{U}_P$. Deux blocs tels que $\boldsymbol{A}_{\bar{u}}$, $\boldsymbol{A}_{\bar{u}^-}$ $(\bar{u} \in \bar{U}_P)$ sont dits *mutuellement inverses*. On a manifestement $\{\mathbf{P}\} \in \mathbb{M}_P$.

9. Transformations des décompositions en blocs. Considérons à présent deux équations $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \boldsymbol{M}$ et soit $\tau \in \mathfrak{G}$ un transformateur de l'équation $\mathbf{P}$ dans $\mathbf{Q}$. Nous avons donc $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^\tau$ et, d'après 4.2, $\mathfrak{B}_Q = \tau^{-1}\mathfrak{B}_P\tau$.

1. *Pour* $\bar{u} \in \bar{U}_P$ *on a* $\tau^{-1}\bar{u}\tau \in \bar{U}_Q$.

Démonstration. Soit $\bar{u} \in \bar{U}_P$, $\alpha \in \bar{u}$. On a, d'après 5.1, $\bar{u} = \mathfrak{B}_P\alpha\mathfrak{B}_P$. Il en résulte

$$\tau^{-1}\bar{u}\tau = \tau^{-1}\mathfrak{B}_P\tau(\tau^{-1}\alpha\tau)\,\tau^{-1}\mathfrak{B}_P\tau = \mathfrak{B}_Q(\tau^{-1}\alpha\tau)\,\mathfrak{B}_Q \, .$$

D'autre part, on a $\tau^{-1}\alpha\tau \in \mathfrak{G}$ et donc, d'après 5.1, $\mathfrak{B}_Q(\tau^{-1}\alpha\tau)\,\mathfrak{B}_Q \in \bar{U}_Q$. □

Soit $\mathscr{T}$: $\bar{U}_P \to \bar{U}_Q$, $\mathscr{T}\bar{u} = \tau^{-1}\bar{u}\tau$. On s'assure sans d'aucune espèce de difficulté, que $\mathscr{T}$ est une application bijective de $\bar{U}_P$ sur $\bar{U}_Q$.

Considérons une bande $\bar{u} \in \bar{U}_P$ et le bloc correspondant $\boldsymbol{A}_{\bar{u}}$ et d'autre part la bande $\mathscr{T}\bar{u} \in \bar{U}_Q$ et le bloc $\boldsymbol{A}_{\mathscr{T}\bar{u}}$. Désignons $\boldsymbol{A}_{\bar{u}}^\tau$ l'ensemble $(\subset \boldsymbol{M})$ des équations dérivées par application du transformateur τ aux éléments de $\boldsymbol{A}_{\bar{u}}$:

$$\boldsymbol{A}_{\bar{u}}^\tau = \{A^\tau\} \quad \forall A \in \boldsymbol{A}_{\bar{u}} \, .$$

2. *On a* $\boldsymbol{A}_{\bar{u}}^\tau = \boldsymbol{A}_{\mathscr{T}\bar{u}}$.

Démonstration. Soit $\mathbf{A} \in \boldsymbol{A}_{\bar{u}}$. Nous avons, d'après 6.1, $\mathrm{I}[P, A] \subset \bar{u}$ et puis, d'après 4.3,

$$\mathrm{I}[Q, A^\tau] = \tau^{-1}\,\mathrm{I}[P, A]\,\tau \subset \tau^{-1}\bar{u}\tau = \mathscr{T}\bar{u} \;(\in \bar{U}_Q) \, .$$

Il en résulte, d'après 6.1, $\mathbf{A}^\tau \in \boldsymbol{A}_{\mathscr{T}\bar{u}}$ et donc $\boldsymbol{A}_{\bar{u}}^\tau \subset \boldsymbol{A}_{\mathscr{T}\bar{u}}$.

Si l'on applique ce résultat dans le sens inverse (en remplaçant τ par τ^{-1}) on obtient $\boldsymbol{A}_{\mathscr{T}\bar{u}}^{\tau^{-1}} \subset \boldsymbol{A}_{\bar{u}}$, et cela entraîne $\boldsymbol{A}_{\mathscr{T}\bar{u}} \subset \boldsymbol{A}_{\bar{u}}^\tau$. □

Nous résumons les résultats obtenus dans le

Théorème. *Toute équation* $\mathbf{P} \in M$ *détermine univoquement la décomposition de l'ensemble* M, $\mathbb{M}_P$, *consistant en blocs adjoints à* $\mathbf{P}$. *La décomposition* $\mathbb{M}_P$ *est covariante par rapport aux transformations de l'équation* $\mathbf{P}$ *réalisées par les fonctions-phases.*

4. PROPRIÉTÉS DES BLOCS

Les raisonnements qui vont suivre sont consacrés à l'étude des propriétés des blocs considérés. On peut dire, en général, que les équations-éléments d'un bloc jouissent de propriétés qui sont communes à toutes équations du bloc et se trouvent liées, d'une certaine façon, à l'équation de base.

Soit $\mathbf{P} \in M$. En tant que nous parlons, dans la suite, de blocs, de décompositions en blocs, de classes à droite, etc., nous avons en vue, sauf d'avis contraire, des notions rapportées à l'équation $\mathbf{P}$.

10. Equations équivalentes. Nous appelons *équivalentes par rapport à l'équation* $\mathbf{P}$, plus simplement *équivalentes*, deux équations $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in M$ situées dans le même bloc; nous écrivons $\mathbf{A}_1 \sim \mathbf{A}_2(\mathbf{P})$ ou $\mathbf{A}_2 \sim \mathbf{A}_1(\mathbf{P})$, plus simplement: $\mathbf{A}_1 \sim \mathbf{A}_2$ ou $\mathbf{A}_2 \sim \mathbf{A}_1$;

1. *On a* $\mathbf{A}_1 \sim \mathbf{A}_2$ *précisément dans le cas, s'il existe une équation* $\mathbf{B} \in M$ *vérifiant les relations*

$$\mathrm{I}[B, P] \cap \mathrm{I}[P, A_1] \neq \emptyset \neq \mathrm{I}[B, P] \cap \mathrm{I}[P, A_2]\,. \tag{4}$$

Démonstration. a. Soit $\mathbf{A}_1 \sim \mathbf{A}_2$. Il existe, par conséquent, l'élément $\bar{u} \in \bar{U}_P$ tel que $\mathrm{I}[P, A_1]$, $\mathrm{I}[P, A_2] \subset \bar{u}$. D'autre part, la relation $\mathbf{B} \in \boldsymbol{B}_{\bar{u}}$ entraîne, d'après 6.2, $\mathrm{I}[B, P] \subset \bar{u}$. Or, les classes $\mathrm{I}[B, P] \in \bar{B}_P$, $\mathrm{I}[P, A_1] \in \bar{A}_P$, $\mathrm{I}[P, A_2] \in \bar{A}_P$ étant parties de la même bande $\bar{u}$, les relations (4) sont vraies.

b. Soit $\mathbf{B} \in M$ une équation satisfaisant à (4). Ces relations entraînent que les classes $\mathrm{I}[B, P] \in \bar{B}_P$, $\mathrm{I}[P, A_1] \in \bar{A}_P$ font parties d'une bande $\bar{u}_1 \in \bar{U}_P$: $\mathrm{I}[B, P]$, $\mathrm{I}[P, A_1] \subset$ $\subset \bar{u}_1$; de même $\mathrm{I}[B, P]$, $\mathrm{I}[P, A_2] \subset \bar{u}_2 \in \bar{U}_P$. Il en résulte $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 (= \bar{u})$; $\mathrm{I}[P, A_1]$, $\mathrm{I}[P, A_2] \subset \bar{u}$ et donc, d'après 3.1, $\mathbf{A}_1 \sim \mathbf{A}_2$. □

Nous appelons *transformateur dispersionnel* tout transformateur-élément du groupe $\mathfrak{B}_P$.

2. *Toute équation* $\mathbf{A}_1 \in A_{\bar{u}}$ *se change par un transformateur dispersionnel dans une équation équivalente* $\mathbf{A}_2 \in A_{\bar{u}}$. *Toute équation* $\mathbf{A}_1 \in A_{\bar{u}}$ *peut être transformée dans n'importe quelle équation équivalente* $\mathbf{A}_2 \in A_{\bar{u}}$ *par de dispersions de* $\mathbf{P}$.

Démonstration. a. Soient $\mathbf{A}_1 \in A_{\bar{u}}$, $\zeta \in \mathfrak{B}_P$. Choisissons $\alpha_1 \in \mathrm{I}[P, A_1] \subset \bar{u}$; nous avons donc $\alpha_1 \mathfrak{B}_P \subset \bar{u}$. En posant $\alpha_2 = \alpha_1 \zeta$, $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1^{\zeta}$, nous avons $\alpha_2 \in \bar{u}$, $\mathbf{P} -\alpha_1\rightarrow \mathbf{A}_1 -\zeta\rightarrow \mathbf{A}_2$ et ces formules donnent $\mathbf{A}_2 \in A_{\bar{u}}$.

b. Soit $\mathbf{A}_1 \sim \mathbf{A}_2$. Nous savons qu'il existe une équation $\mathbf{B} \in M$ et de fonctions-phases $\alpha_1 \in \mathrm{I}[B, P] \cap \mathrm{I}[P, A_1]$, $\alpha_2 \in \mathrm{I}[B, P] \cap \mathrm{I}[P, A_2]$. Subsistent, par conséquent, les formules $\mathbf{B} -\alpha_1\to \mathbf{P} -\alpha_1\to \mathbf{A}_1$, $\mathbf{B} -\alpha_2\to \mathbf{P} -\alpha_2\to \mathbf{A}_2$ et donc $\mathbf{P} -\alpha_1^{-1}\to \mathbf{B} -\alpha_2\to \mathbf{P}$, $\mathbf{A}_1 -\alpha_1^{-1}\to \mathbf{P} -\alpha_2\to \mathbf{A}_2$ Il en résulte $\alpha_1^{-1}\alpha_2 \in \mathfrak{B}_P \cap \mathrm{I}[A_1, A_2]$. □

Les résultats que nous venons de démontrer se trouvent résumés dans le

Théorème. *Tout bloc adjoint à l'équation $\mathbf{P}$, $A_{\bar{u}}$, est fermé et complet par rapport aux transformations de ses éléments réalisées par les dispersions de l'équation $\mathbf{P}$.*

Corollaire. $(A_{\bar{u}}, \mathfrak{B}_P)$ *est un espace homogène.*

3. *Subsiste, pour d'arbitraires équations $\mathbf{A}_1 \sim \mathbf{A}_2$ et chaque transformateur dispersionnel de l'équation $\mathbf{A}_1$ dans $\mathbf{A}_2$, ζ, la formule*

$$(\mathfrak{B}_P \cap \mathfrak{B}_{A_1})\,\zeta = \zeta(\mathfrak{B}_P \cap \mathfrak{B}_{A_2})\,. \tag{5}$$

Démonstration. L'hypothèse $\zeta \in \mathfrak{B}_P \cap \mathrm{I}[A_1, A_2]$ entraîne, manifestement, $\mathfrak{B}_P = \mathfrak{B}_P\zeta = \zeta\mathfrak{B}_P$ et, d'après 4.2, $\mathrm{I}[A_1, A_2] = \mathfrak{B}_{A_1}\zeta = \zeta\mathfrak{B}_{A_2}$. Il en résulte

$$\mathfrak{B}_P \cap \mathrm{I}[A_1, A_2] = \mathfrak{B}_P\zeta \cap \mathfrak{B}_{A_1}\zeta = \zeta\mathfrak{B}_P \cap \zeta\mathfrak{B}_{A_2}$$

et l'on trouve la formule (5). [1], p. 156.

Remarquons que, chacun des deux membres de la formule (5) met en évidence l'ensemble formé de tous transformateurs dispersionnels de l'équation $\mathbf{A}_1$ dans $\mathbf{A}_2$.

11. Intersections du groupe $\mathfrak{B}_P$ avec les groupes des dispersions des équations équivalentes. Nous désignons par occasion par un symbole tel que $\mathfrak{P}_{A_1A_2}$ le groupe-intersection des groupes $\mathfrak{B}_{A_1}$ et $\mathfrak{B}_{A_2}$: $\mathfrak{P}_{A_1A_2} = \mathfrak{B}_{A_1} \cap \mathfrak{B}_{A_2}$.

1. *Pour $\mathbf{A}_1 \sim \mathbf{A}_2$ on a* $\operatorname{card}(\mathfrak{B}_P \cap \mathfrak{B}_{A_1}) = \operatorname{card}(\mathfrak{B}_P \cap \mathfrak{B}_{A_2})$.

Démonstration résulte immédiatement de 10.3

2. *Pour $\mathbf{A}_1 \sim \mathbf{A}_2$ les intersections $\mathfrak{B}_P \cap \mathfrak{B}_{A_1}$ et $\mathfrak{B}_P \cap \mathfrak{B}_{A_2}$ sont de la même espèce.*

Démonstration. Considérons les équations $\mathbf{A}_1 \sim \mathbf{A}_2$ et un transformateur dispersionnel de l'équation $\mathbf{A}_1$ dans $\mathbf{A}_2$, ζ. Nous avons donc une formule telle que (5). Supposons, en premier lieu, que $\mathfrak{P}_{PA_1}$ soit de la première espèce et donc $\mathfrak{P}_{PA_1} \subset \mathfrak{B}_P^+$. Dans ce cas tous éléments de l'ensemble $\mathfrak{P}_{PA_1}\zeta$ vont constamment en croissant ou constamment en décroissant suivant que la fonction ζ jouit de la propriété correspondante. D'après la formule (5) les éléments de l'ensemble $\zeta\mathfrak{P}_{PA_2}$ jouissent de la même propriété et donc l'intersection $\mathfrak{P}_{PA_2}$ est encore de la première espèce. La deuxième partie de la démonstration s'effectue d'une manière analogue. □

12. Blocs de la première et de la seconde espèce. Nous disons que le bloc $A_{\bar{u}}$ est de la *première* ou de la *seconde espèce* suivant que les intersections du groupe $\mathfrak{B}_P$ par les groupes des dispersions des éléments de $A_{\bar{u}}$ résultent de la première ou de la seconde espèce, respectivement.

Tout bloc de la première espèce, $A_{\bar{u}_1}$, jouit de la propriété que les transformateurs dispersionnels de toute équation $\mathbf{A}_1 \in A_{\bar{u}_1}$ dans une équation donnée $\mathbf{A}_2 \in A_{\bar{u}_1}$ vont tous constamment en croissant ou constamment en décroissant. Tout bloc de la seconde espèce, $A_{\bar{u}_2}$, se manifeste par ceci que, toute équation $\mathbf{A}_1 \in A_{\bar{u}_2}$ peut être transformée dans une équation donnée $\mathbf{A}_2 \in A_{\bar{u}_2}$ soit par de transformateurs qui vont constamment en croissant soit par de transformateurs constamment décroissants.

Considérons, à présent, le bloc de la *première* espèce $A_{\bar{u}}$. On se rend compte facilement que, $A_{\bar{u}}$ consiste en deux classes disjointes et non vides, $A_{\bar{u}}^1$ et $A_{\bar{u}}^2$, caractérisées par les propriétés suivantes: Si les équations $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ sont placées dans la même classe $A_{\bar{u}}^1$ ou $A_{\bar{u}}^2$, tous transformateurs dispersionnels de l'équation $\mathbf{A}_1$ dans $\mathbf{A}_2$ vont constamment en croissant, tandis que dans le cas $\mathbf{A}_1 \in A_{\bar{u}}^1$, $\mathbf{A}_2 \in A_{\bar{u}}^2$ ils vont toujours en décroissant. Nous appelons *demi-blocs de* $A_{\bar{u}}$ les classes en question. Nous avons, d'après la définition même: $A_{\bar{u}}^1 \neq \emptyset \neq A_{\bar{u}}^2$, $A_{\bar{u}} = A_{\bar{u}}^1 \cup A_{\bar{u}}^2$, $A_{\bar{u}}^1 \cap \cap A_{\bar{u}}^2 = \emptyset$.

Nous appelons *positivement équivalentes par rapport à l'équation* $\mathbf{P}$, plus simplement *positivement équivalentes*, deux équations $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in M$ placées dans le même demi-bloc ou bien dans le même bloc de la seconde espèce; nous écrivons $\mathbf{A}_1 \approx \mathbf{A}_2(\mathbf{P})$ ou $\mathbf{A}_2 \approx \mathbf{A}_1(\mathbf{P})$, plus simplement $\mathbf{A}_1 \approx \mathbf{A}_2$ ou $\mathbf{A}_2 \approx \mathbf{A}_1$. Dans ce cas $\mathbf{A}_1 \approx \mathbf{A}_2$ et dans ce cas seulement, les équations $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ peuvent être transformées l'une dans l'autre par de transformateurs dispersionnels constamment croissants.

1. $\mathbf{A}_1 \approx \mathbf{A}_2(\mathbf{P}) \Rightarrow \mathfrak{C}_P \cap \mathfrak{B}_{A_1} = \mathfrak{C}_P \cap \mathfrak{B}_{A_2}$.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathfrak{C}_P \cap \mathfrak{B}_{A_1}$. La fonction φ $(\in \mathfrak{C}_P)$ étant échangeable avec toute dispersion $\zeta \in \mathfrak{B}_P^+$, on a $\varphi = \zeta^{-1}\varphi\zeta$. Or, la relation $\mathbf{A}_1 \approx \mathbf{A}_2(\mathbf{P})$ entraîne l'existence d'un transformateur constamment croissant de l'équation $\mathbf{A}_1$ dans $\mathbf{A}_2$, $\zeta_0 \in \mathfrak{B}_P^+$. On a donc $\varphi = \zeta_0^{-1}\varphi\zeta_0$ et en plus, d'après (5), $(\mathfrak{C}_P \cap \mathfrak{B}_{A_1})\zeta_0 = \zeta_0(\mathfrak{C}_P \cap \mathfrak{B}_{A_2})$. Il en résulte $\varphi \in \mathfrak{C}_P \cap \mathfrak{B}_{A_2}$ et donc $\mathfrak{C}_P \cap \mathfrak{B}_{A_1} \subset \mathfrak{C}_P \cap \mathfrak{B}_{A_2}$. On trouve de même la relation $\supset$. □

13. Procédé analytique. Considérons les équations $(\mathbf{P} \neq) \, \mathbf{A}_1 \sim \mathbf{A}_2$ et un transformateur dispersionnel de l'équation $\mathbf{A}_1$ dans $\mathbf{A}_2$, ζ. Nous avons manifestement

$$\left.\begin{aligned} -\{\zeta, t\} + P(\zeta)\,\zeta'^2(t) &= P(t)\,, \\ -\{\zeta, t\} + A_1(\zeta)\,\zeta'^2(t) &= A_2(t)\,, \end{aligned}\right. \quad (\forall t \in \mathbf{R})$$

et ces relations montrent que ζ vérifie l'équation

$$(P(X) - A_1(X))\,X'^2(t) = P(t) - A_2(t)\,. \tag{6}$$

Par conséquent, tout transformateur dispersionnel de l'équation $\mathbf{A}_1$ dans l'équation équivalente $\mathbf{A}_2$ vérifie l'équation (6).

La formule (6) entraîne, à son tour,

1. $P - A_1 \neq 0 \;\; \forall t \in \mathbf{R} \Rightarrow P - A_2 \neq 0 \;\; \forall t \in \mathbf{R}$;

2. $P - A_1 \in C^2 \Rightarrow P - A_2 \in C^2$.

Remarquons que, si $A_1 = A_2$, l'ensemble des dispersions $\zeta \in \mathfrak{B}_P$ vérifiant l'équation (6) constitue le groupe $\mathfrak{B}_P \cap \mathfrak{B}_{A_1}$.

Considérons à présent le cas particulier $|P - A_1| = \text{const} > 0$, et donc $A_1 = P + a$, $0 \neq a \in \mathbf{R}$. Dans ce cas, le groupe $\mathfrak{B}_P \cap \mathfrak{B}_{A_1}$ consiste en droites $\zeta(t) = \sigma t + c$ $\forall t \in \mathbf{R}$ et $\forall c \in C \subset \mathbf{R}$, $\sigma = \pm 1$, et l'on voit que la fonction P vérifie l'équation fonctionnelle $P(\sigma t + c) = P(t)$ pour toutes valeurs t, c en question. L'ensemble formé des transformateurs dispersionnels de l'équation $\mathbf{A}_1$ dans $\mathbf{A}_2$ consiste en fonctions $\zeta = \sigma\zeta_0 + c$, ζ_0 étant un transformateur dispersionnel de l'équation $\mathbf{A}_1$ dans $\mathbf{A}_2$, fixe, choisi à volonté.

Posons, pour $\mathbf{A} \in M$ et $t_0 \in \mathbf{R}$ quelconque

$$R_{A,t_0}(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{|P(\tau) - A(\tau)|}\, \mathrm{d}\tau \quad \forall t \in \mathbf{R}\,;$$

nous écrivons par occasion, pour simplifier, $R_A(t)$.

On a évidémment $R_{A,t_0}(t_0) = 0$, $R'_{A,t_0}(t) \geqq 0$ $\forall t \in \mathbf{R}$ et donc, la fonction R_A croît. De plus, on s'assure facilement qu'il subsiste, pour $\alpha \in \mathfrak{G}$, $\mathbf{P}^* = \mathbf{P}^\alpha$, $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^\alpha$, $t_0^* = \alpha^{-1}(t_0)$, la formule

$$R_{A^*,t_0^*}(t) = \operatorname{sgn} \alpha' \,.\, R_{A,t_0}(\alpha(t)) \quad \forall t \in \mathbf{R}\,. \tag{7}$$

Cela étant, revenons à nos données $\mathbf{P}$, $\mathbf{A}_1 \sim \mathbf{A}_2$, ζ. La formule (7) donne (v. (6))

$$R_{A_1}(\zeta(t)) = \sigma\, R_{A_2}(t) + R_{A_1}(\zeta(t_0)) \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad (\sigma = \operatorname{sgn} \zeta')\,,$$

et l'on a par conséquent

3. $R_{A_1}(\mathbf{R}) = \mathbf{R} \Leftrightarrow R_{A_2}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$

et puis, en vertu de 1 et 2,

4. $R_{A_1} \in \mathfrak{G} \Leftrightarrow R_{A_2} \in \mathfrak{G}$.

Envisageons en particulier le cas $R_{A_1} \in \mathfrak{G}$. Dans ce cas nous avons $R'_{A_1} > 0$ et en plus $(\alpha =)\ R_{A_1}^{-1} \in \mathfrak{G}$, $\operatorname{sgn} \alpha' = 1$. Or, la fonction α transforme les équations $\mathbf{P}$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ dans les équations bien déterminées $\mathbf{P}^*$, $\mathbf{A}_1^*$, $\mathbf{A}_2^*$, respectivement, et l'on a, d'après 9.2, $\mathbf{A}_1^* \sim \mathbf{A}_2^*(\mathbf{P}^*)$. D'autre part, la formule (7) entraîne $R_{A_1^*}(t) = R_{A_1} R_{A_1}^{-1}(t) = t$ $\forall t \in \mathbf{R}$ et donc $(R'^2_{A_1^*} =)\ |P^* - A_1^*| = 1$. Nous retrouvons ainsi la situation considérée plus haut.

13. Équations mutuellement inverses. Les équations $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in M$ sont dites *mutuellement inverses par rapport à l'équation* $\mathbf{P}$, plus simplement *mutuellement inverses*, si elles figurent en éléments des blocs mutuellement inverses: $\mathbf{A}_1 \in A_{\bar{u}}$, $\mathbf{A}_2 \in A_{\bar{u}^-}$. Les résultats précédents fournissent une base appropriée pour l'étude des propriétés des équations mutuellement inverses.

Bibliographie

[1] *O. Borůvka:* Foundations of the Theory of Groupoids and Groups. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1974.

[2] *O. Borůvka:* Linear Differential Transformations of the Second Order. The English Universities Press, London 1971.

[3] *O. Borůvka:* Sur les blocs des équations différentielles $y'' = q(t)\,y$ aux coefficients périodiques. *Rend. di Mat.* (2), *8* (1975), 519—532.

[4] *O. Borůvka:* Algebraic Methods in the Theory of Global Properties of the Oscillatory Equations $Y'' = Q(T)\,Y$. *Lecture Notes in Mathematics, 703.* Equadiff IV, Proceedings Prague 1977, 35—45.

[5] *O. Borůvka:* Теория глобальных свойств обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Дифференциальные уравнения, том *XII* (1976), 1347—1383. En anglais: *Differential Equations 12* (1976), no 8, 949—975.

[6] *O. Borůvka:* Contribution à la théorie algébrique des équations $Y'' = Q(T)\,Y$. *Boll. U. M. I.* (5) *13* — B(1976), 896—915.

[7] *O. Borůvka:* Sur les transformations simultanées de deux équations différentielles linéaires du deuxième ordre dans elles-mêmes. *Applicable Anal. 15* (1983), 187—200.

[8] *O. Borůvka:* Sur les sous-groupes planaires des groupes des dispersions des équations différentielles linéaires du deuxième ordre. *Proc. Royal Soc. Edinburgh, 97A* (1984), 35—41.

[9] *F. Dubreil, M. L. Dubreil-Jacotin:* Leçons d'algèbre moderne. 2—ième éd. Dunod, Paris, 1964.

[10] *F. Neuman, S. Staněk:* On the Structure of Second-Order Periodic Differential Equations with Given Characteristic Multipliers. *Arch. Math., Brno, XIII* (1977), 149—157.

[11] *S. Staněk:* On a Structure of the Intersection of the Sets of Dispersions of Two Second-Order Linear Differential Equations. *Acta Univ. Palackianae Olomucensis, 73* (1982), 79—85.

Adresse de l'auteur: 662 95 Brno, Janáčkovo nám. 2a (Matematický ústav ČSAV).