Časopis pro pěstování matematiky

Jiří Jarník; Štefan Schwabik; Milan Tvrdý; Ivo Vrkoč

Jaroslav Kurzweil šedesátníkem

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 111 (1986), No. 1, 91--111

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/118257

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 111 (1986), Praha

ZPRÁVY

JAROSLAV KURZWEIL ŠEDESÁTNÍKEM

Jiří Jarník, Štefan Schwabik, Milan Tvrdý, Ivo Vrkoč, Praha

7. května tohoto roku se dožívá 60 let člen korespondent ČSAV Jaroslav Kurzweil, vedoucí vědecký pracovník v Matematickém ústavu ČSAV, univerzitní profesor matematiky, významný československý vědec.

Dříve než se budeme u této příležitosti věnovat vědecké práci profesora Kurzweila, uvedeme stručně význačné mezníky jeho života v přehledu. Vzhledem k tomu, že chceme čtenáře seznámit především s jeho vědeckou prací, zdá se nám tato forma účelná.

1926 – 7. 5. se narodil v Praze
1945 – maturita na reálném gymnáziu v Praze
1949 – ukončil studium na přírodovědecké fakultě Univerzity Karlovy v Praze, stal se asistentem na katedře matematiky a deskriptivní geometrie na ČVUT v Praze
1950 – získal akademický titul RNDr.
1951 – od 1. 7. aspirant v Ústředním ústavu matematickém, později Matematickém ústavu ČSAV
1953 – studijní pobyt v PLR
1954 – od 1. 1. zaměstnanec Matematického ústavu ČSAV
1955 – získal vědeckou hodnost kandidáta fyzikálně-matematických věd a stal se vedoucím oddělení obyčejných diferenciálních rovnic MÚ ČSAV
1957 – studijní pobyt v SSSR
1958 – získal vědeckou hodnost doktora fyzikálně-matematických věd
1964 – jmenován do vědeckého kolegia matematiky ČSAV, 1966–1970 jeho místopředseda
1964 – udělena státní cena Kl. Gottwalda
1966 – jmenován profesorem matematiky
1968 – zvolen členem korespondentem ČSAV, ve školním roce 1968–1969 pobyt v Dynamic Centre, Warwick, Velká Británie
1978 – zvolen čestným zahraničním členem Royal Society of Edinburgh
1981 – udělena stříbrná plaketa B. Bolzana ČSAV „Za zásluhy v matematických vědách" a zvolen zasloužilým členem JČSMF
1984 – stal se vedoucím úseku „Matematická analýza" v MÚ ČSAV a vedoucím kabinetu pro didaktiku v MÚ ČSAV.

Svoji vědeckou dráhu zahájil J. Kurzweil jako žák akademika V. Jarníka pracemi z oblasti metrické teorie diofantických aproximací. Vliv V. Jarníka se na jeho vědecké práci projevuje dodnes v úsilí o precizní zpracování statí a ve velkém citu pro jemné odhady. Vůbec první práce J. Kurzweila [1] pojednává o vlastnostech Hausdorffovy míry množiny reálných čísel x, které nepřipouštějí $g(q)$ aproximaci, tj. pro x existuje jen konečně mnoho čísel $p, q > 0$ takových, že $|x - p/q| < q^{-2}\, g(q)$, kde $g(q)$ je kladná funkce definovaná pro kladné hodnoty q.

Další práce s touto tématikou [5] je velmi závažná. Je v ní řešen Steinhausův problém: Jsou-li $a < b$ reálná čísla, označme

$$I(a, b) = \{(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{R}^2;\ \zeta_1 = \cos 2\pi x,\quad \zeta_2 = \sin 2\pi x,\ x \in \langle a, b \rangle\}\,,$$

B nechť je množina všech nerostoucích posloupností (b_k), $k = 1, 2, \ldots$ s kladnými členy, pro které platí $\Sigma b_k = +\infty$. Buď

$$K = \{(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{R}^2;\ \zeta_1^2 + \zeta_2^2 = 1\}\,,$$

μ Lebesgueova míra na kružnici K a $\alpha(B)$ množina reálných čísel $x \in \langle 0, 1)$, pro která platí, že pro každou posloupnost $(b_k) \in B$ patří μ-skoro všechny body $y \in K$ do nekonečně mnoha množin $I(kx - b_k, kx + b_k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Množina $\alpha(B)$ neobsahuje racionální čísla a H. Steinhaus položil otázku, zda v $\alpha(B)$ jsou všechna iracionální čísla z intervalu $(0, 1)$. Kurzweil množinu $\alpha(B)$ charakterizoval pomocí pojmu aproximovatelnosti a z jeho úvah např. vyplynulo, že je $\alpha(B) \neq \emptyset$, a že Lebesgueova míra množiny $\alpha(B)$ je nulová. Tím negativně zodpověděl Steinhausovu otázku. Práce [5] obsahuje i další výsledky, zejména je v ní problém modifikován a řešen i ve vícerozměrném případě.

V roce 1953 byl J. Kurzweil na tříměsíčním studijním pobytu v Poznani, kde pracoval pod vedením profesora Wladyslawa Orlicze. Tento kontakt vnesl do jeho práce nové podněty, týkající se stejnoměrné aproximace spojité operace pomocí analytické operace.[1])

Práce [3] byla přímo inspirována W. Orliczem a obsahuje zobecnění známé věty S. N. Bernsteina o charakterizaci reálné analytičnosti funkce. Kurzweil v [3] dokázal tvrzení tohoto druhu pro analytickou operaci definovanou v Banachově prostoru X s hodnotami v Banachově prostoru Y. V další práci [4] je formulována otázka: Je možné spojité operace z Banachova prostoru X do reálného Banachova prostoru Y stejnoměrně aproximovat pomocí analytických operací?

Je na ni dána odpověď formou následujícího tvrzení: Nechť X je separabilní reálný Banachův prostor a nechť platí podmínka
(A) existuje reálný polynom q^* definovaný na X tak, že

$$q^*(0) = 0 \quad \text{a} \quad \inf_{x \in B, \|x\| = 1} q^*(x) > 0 .$$

Nechť F je spojitá operace definovaná na otevřené množině $G \subset X$ s hodnotami v libovolném Banachově prostoru Y. Nechť φ je kladný spojitý funkcionál na G. Potom existuje operace H s hodnotami v Y, která je analytická v G a platí

$$\|F(x) - H(x)\| < \varphi(x) .$$

Jsou uvedeny i negativní příklady spojitých funkcionálů v $C(0, 1)$, l^p a L^p (p liché), které nejsou stejnoměrnou limitou analytických funkcí.

Ve formulaci věty může do jisté míry překvapit předpoklad (A) o existenci polynomu q^* s danými vlastnostmi. K této otázce se Kurzweil vrátil v práci [11] a ukázal, že když je Banachův prostor X stejnoměrně konvexní a každou operaci F lze stejnoměrně aproximovat analytickými operacemi, pak už předpoklad (A) musí být splněn.

Rozsahem nevelký výlet do nelineární funkcionální analýzy je pozoruhodný co do hloubky výsledků a teprve v poslední době přináší plody i v zdánlivě odlehlé tématice, která pojednává o geometrii Banachových prostorů.

---

[1]) Základní informace o pojmech, se kterými se zde pracuje, může čtenář nalézt např. ve známé monografii E. Hille, R. S. Phillips: Functional Analysis and Semigroups, AMS, Providence 1957.

Funkcionální analýzy se týká i článek [25], ve kterém J. Kurzweil provedl elementárními prostředky elegantní důkaz známé věty o spektrálním rozkladu hermitovského operátoru. Na rozdíl od W. P. Eberleina[2]) vychází od bezprostřední definice tzv. spektrální funkce.

S tématikou hermitovských operátorů úzce souvisí i práce [32]. Jde v ní o odhady vlastních čísel soustavy integrálních rovnic

$$\int_\Omega K(x, t)\, u(t)\, \mathrm{d}\mu(t) = \beta\, u(x)\,,$$

$$\int_\Omega K(x, t)\, v(t)\, \mathrm{d}\nu(t) = \gamma\, v(x)$$

a k ní „spřažené" soustavy

$$\int_\Omega K(x, t)\, y(t)\, \mathrm{d}\mu(t) = \alpha\, z(x)\,,$$

$$\int_\Omega K(x, t)\, z(t)\, \mathrm{d}\nu(t) = \alpha\, y(x)\,.$$

Výsledek, kterého Kurzweil zde dosáhl, byl dříve znám jen ve zcela speciálních případech.

Teorie stability pro obyčejné diferenciální rovnice je významným tématickým celkem, který prof. Kurzweil svými pracemi ovlivnil. I když základy této teorie byly vybudovány už koncem minulého století (H. Poincaré, A. M. Ljapunov), zůstalo mnoho otevřených otázek a v padesátých letech došlo k dalšímu bouřlivému rozvoji této discipliny.

Je-li dán systém diferenciálních rovnic

$$\dot{x} = f(t, x)\,, \quad x \in R^n\,, \quad t \geqq 0\,,$$

kde $f(t, 0) = 0$, $t \geqq 0$, pak se řešení $x(t) \equiv 0$ nazývá stabilní, když k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro řešení $y(t)$ daného systému s $\|y(0)\| < \delta$ platí $\|y(t)\| < \varepsilon$ pro všechna $t \geqq 0$. Již A. M. Ljapunov odvodil postačující podmínku pro stabilitu:

Když existují funkce $V(t, x)$, $U(x)$ takové, že $V \in C^1$, U je spojitá, $U(x) > 0$ pro $x \neq 0$, $V(t, 0) \equiv 0$, $V(t, x) \geqq U(x)$, $x \in R^n$, $t \geqq 0$ a když platí

$$W(t, x) = \partial V/\partial t + \sum_{i=1}^{n} (\partial V/\partial x_i) \,.\, f_i \leqq 0\,,$$

pak je řešení $x \equiv 0$ stabilní.

V roce 1937 K. P. Persidskij ukázal, že podmínky dané touto větou jsou rovněž

[2]) A Note on the Spectral Theorem, Bull. AMS 52 (1946), 328—331.

nutné. Persidskij také formuloval postačující podmínku pro stejnoměrnou stabilitu pomocí jisté Ljapunovovy funkce. Otázkou, zda jsou podmínky této Persidského věty rovněž nutné, se zabývala řada matematiků. Problém byl kladně zodpovězen nezávisle N. N. Krasovským a J. Kurzweilem za předpokladu, že složky pravé strany diferenciální rovnice mají spojité parciální derivace. T. Yoshizawa pak dokázal obrácení těchto vět za předpokladu, že pravá strana diferenciální rovnice je spojitá. Zkonstruoval ale Ljapunovovy funkce, které nemusely být spojité. Tím byl dán podnět ke vzniku práce [10], v níž je ukázáno, že stabilitu resp. stejnoměrnou stabilitu nelze vždy charakterizovat existencí funkce V splňující podmínky Ljapunovovy příp. Persidského věty. V práci [10] jsou dány dodatečné (nutné a postačující) podmínky zaručující existenci hladké Ljapunovovy funkce. Obdobná problematika je pro případ tzv. druhé Ljapunovovy věty řešena v práci [9]. Obrácením této věty, která se týká asymptotické stability, se zabýval J. L. Massera v případě periodické pravé strany rovnice. I. G. Malkin si povšiml, že z předpokladů druhé Ljapunovovy věty plyne více, než se v ní tvrdí. V práci [9] J. Kurzweil podal konečné řešení problému. Především ukázal, že předpoklady druhé Ljapunovovy věty zaručují dokonce silnou stabilitu triviálního řešení $x \equiv 0$ a naopak, když je $x \equiv 0$ silně stabilní řešení soustavy, zkonstruoval hladké Ljapunovovy funkce, které splňují předpoklady druhé Ljapunovovy věty. Ve svých konstrukcích Kurzweil rozvinul metodu aproximace lipschitzovských funkcí, která umožnila dokázat, že hledané funkce jsou ve třídě C^∞, i když jsou pravé strany diferenciálních rovnic pouze spojité.

V padesátých letech byla v souvislosti s mechanikou velmi populární Bogoljubovova metoda přiblížení v průměru pro diferenciální rovnice. Metoda byla pro praktické otázky efektivní, nebylo ale zcela zřejmé jak ji zdůvodnit a zařadit do teorie obyčejných diferenciálních rovnic. I. I. Gichman si v r. 1952 jako první povšiml, že podstatou této metody je spojitá závislost na parametru. Gichmanovy myšlenky dále rozvinuli v roce 1955 M. A. Krasnoselskij a S. G. Krejn, kteří poukázali na to, že pro spojitou závislost na parametru stačí jistá „integrální spojitost" pravých stran diferenciální rovnice. Práce [12] pak v roce 1957 přinesla následující základní výsledek:

Buď dána posloupnost funkcí f_k: $G \times \langle 0, T\rangle \to \mathbb{R}^n$, $k = 0, 1, \ldots$, kde $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Buď $x_k(t)$ řešení diferenciální rovnice

$$\dot{x} = f_k(x, t)\,, \quad x(0) = 0$$

a nechť $x_0(t)$ je jednoznačně definováno na intervalu $\langle 0, T\rangle$. Jestliže platí

$$F_k(x, t) = \int_0^t f_k(x, \tau)\,\mathrm{d}\tau \to \int_0^t f_0(x, \tau)\,\mathrm{d}\tau = F_0(x, t)$$

stejnoměrně pro $k \to \infty$ a jsou-li funkce $f_k(x, t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ stejně spojité v x pro pevné t, potom jsou pro dost velká k řešení $x_k(t)$ definována na $\langle 0, T\rangle$ a je $x_k(t) \to$ $\to x_0(t)$ stejnoměrně na $\langle 0, T\rangle$ pro $k \to \infty$.

Práce [12] a výsledky v ní obsažené odhalily podstatu tvrzení o spojité závislosti na parametru pro diferenciální rovnice. Když v roce 1975 Z. Artstein[3]) zkoumal z obecného topologického hlediska věty o spojité závislosti a zavedl topologické porovnávání těchto vět, zjistil, že existují nejlepší věty a ukázal, že citovaná věta z [12] mezi ně patří.

Výsledky práce [12] však přinesly i některé problémy. Přímý výpočet řešení x_k: $\langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ posloupnosti lineárních diferenciálních rovnic

$$\dot{x} = x \,.\, k^{1-\alpha} \cos kt + k^{1-\beta} \sin kt \,, \quad x(0) = 0 \,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

např. ukazuje, že pro $0 < \alpha \leqq 1$, $0 < \beta \leqq 1$, $\alpha + \beta > 1$ je $\lim_{k\to\infty} x_k(t) = 0$ stejnoměrně na $\langle 0, 1\rangle$, tj. řešení konvergují k řešení „limitní" rovnice

$$\dot{x} = 0 \,, \quad x(0) = 0 \,.$$

Věty o spojité závislosti na parametru, které by tomuto konvergenčnímu jevu daly teoretický základ a zdůvodnění, nebyly tou dobou k dispozici. I výše uvedený výsledek z práce [12] poskytoval zdůvodnění konvergenčního efektu v příkladu pouze pro $\alpha = 1$ a $0 < \beta \leqq 1$.

Dále bylo patrné, že znalost funkce $f(x, t)$ na pravé straně diferenciální rovnice

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{1}$$

je v kontextu vět o spojité závislosti potřebná pouze k tomu, aby bylo možno mluvit o řešení rovnice (1). Vše podstatné pak je možno říci pomocí „neurčitého" integrálu

$$F(x, t) = \int_{t_0}^{t} f(x, \tau)\, d\tau \tag{2}$$

k pravé straně $f(x, t)$ v rovnici (1). Vznikla tak otázka, jak popsat pojem řešení diferenciální rovnice (1) pomocí funkce (2). Odpovědi na tyto otázky dal J. Kurzweil v práci [13], v níž definoval pojem zobecněné diferenciální rovnice. Naznačíme stručně, oč v této teorii jde.

Je-li dána funkce $F(x, t)$: $G \times \langle 0, T\rangle \to \mathbb{R}^n$, pak je funkce x: $\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ řešením zobecněné diferenciální rovnice

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x, t)\,, \tag{3}$$

jestliže je $(x(t), t) \in G \times \langle 0, T\rangle$ pro každé $t \in \langle a, b\rangle$ a pro každé $s_1, s_2 \in \langle a, b\rangle$ lze rozdíl $x(s_2) - x(s_1)$ s libovolnou přesností aproximovat součtem

$$\sum_{i=1}^{k} [F(x(\tau_i), \alpha_i) - F(x(\tau_i), \alpha_{i-1})]\,, \tag{4}$$

[3]) Continuous Dependence on Parameters: On the Best Possible Results, Journal of Diff. Equations 19, 214—225.

kde $s_1 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_k = s_2$, $\tau_i \in \langle \alpha_{i-1}, \alpha_i \rangle$ tvoří dost jemné dělení intervalu $\langle s_1, s_2 \rangle$.

Tím je v tomto případě v obecné podobě zaznamenán fakt, že řešení klasické rovnice (1) splňuje rovnost

$$x(s_2) - x(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} f(x(t), t)\,\mathrm{d}t\,, \quad s_1, s_2 \in \langle a, b \rangle\,,$$

a že integrál vpravo lze libovolně přesně aproximovat součtem tvaru

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(x(\tau_i), t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Ze součtů tvaru (4) vychází Kurzweilova koncepce zobecněného Perronova integrálu v práci [13]. V ní upřesnil smysl pojmu libovolně přesné aproximace rozdílu $x(s_2) - x(s_1)$ pomocí součtu (4).

Buď $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ omezený interval. Konečný systém reálných čísel

$$D = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots \alpha_{k-1}, \tau_k, \alpha_k\}$$

nazveme dělením intervalu $\langle a, b \rangle$, jestliže platí

$$\begin{aligned} &a = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_k = b \quad \text{a} \\ &\tau_i \in \langle \alpha_{i-1}, \alpha_i \rangle\,, \quad i = 1, \ldots, k\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Pro danou funkci $\delta: \langle a, b \rangle \to (0, +\infty)$ (tzv. kalibr) řekneme, že dělení D je δ-jemné, když platí

$$\langle \alpha_{i-1}, \alpha_i \rangle \subset \langle \tau_i - \delta(\tau_i), \tau_i + \delta(\tau_i) \rangle\,, \quad i = 1, \ldots, k\,. \tag{6}$$

Nechť je dána funkce $U: \langle a, b \rangle \times \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}^n$. K dělení D a k funkci U přiřaďme součet

$$S(U, D) = \sum_{i=1}^{k} [U(\tau_i, \alpha_i) - U(\tau_i, \alpha_{i-1})]\,.$$

Definice: Řekneme, že $I \in \mathbb{R}^n$ je zobecněným Perronovým integrálem funkce U přes interval $\langle a, b \rangle$, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takový kalibr δ, že pro každé δ-jemné dělení D intervalu $\langle a, b \rangle$ platí

$$|S(U, D) - I| < \varepsilon\,.$$

Hodnotu I označil J. Kurzweil (nedílným) symbolem $\int_a^b \mathrm{D}U(\tau, t)$.

Užitím této definice lze nyní už upřesnit pojem řešení zobecněné diferenciální rovnice (3): funkce $x: \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}^n$ je řešením (3), když je $(x(t), t) \in G \times \langle 0, T \rangle$, a když pro každé $s_1, s_2 \in \langle a, b \rangle$ platí

$$x(s_2) - x(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} \mathrm{D}F(x(\tau), t)\,.$$

Pojem zobecněné diferenciální rovnice (3) J. Kurzweil zevrubně studoval v pracích [13], [14], [15], [17], [20], [29], [34], kde získal podstatné nové poznatky o spojité závislosti na parametru pro diferenciální rovnice a dal teoretický základ konvergenčním jevům, kterým předtím chybělo opodstatnění. Vysvětlil např. i konvergenční efekty pro posloupnost obyčejných diferenciálních rovnic

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x)\,\varphi_k(t)\,, \quad k = 1, 2, \ldots\,,$$

když posloupnost funkcí (φ_k) známým způsobem konverguje k Diracově funkci (viz [14] a [16]).

V práci [14] J. Kurzweil ukázal, ze zobecněné diferenciální rovnice připouštějí jako řešení i funkce, které nejsou spojité. To byl zcela nový jev v teorii diferenciálních rovnic. Pochopitelně byl podmíněn vlastnostmi třídy pravých stran rovnice (3).

Metodiku zobecněných diferenciálních rovnic Kurzweil rozvinul i v případě diferenciálních rovnic v Banachově prostoru a získal nové poznatky o parciálních diferenciálních rovnicích a o některých okrajových úlohách pro tyto rovnice (např. práce [27], [28], [29], [33], [34]). Tyto jeho příspěvky inspirovaly řadu matematiků pracujících v teorii parciálních diferenciálních rovnic.

Soubor prací J. Kurzweila o zobecněných diferenciálních rovnicích byl podkladem pro udělení státní ceny Klementa Gottwalda v roce 1964.

Vraťme se nyní ještě k práci [13] a k definici integrálu, kterou jsme uvedli výše. Kurzweil v [13] podal dvě ekvivalentní definice, z nichž jedna využívala pojmů majorantní a minorantní funkce, podobně jak je tomu u klasické Perronovy definice, a druhá byla součtová tak jak jsme ji uvedli zde. Když má funkce U tvar $U(\tau, t) = f(\tau)\,t$, potom má jí příslušný integrální součet tvar $\sum f(\tau_i)(\alpha_i - \alpha_{i-1})$, který je shodný s Riemannovým integrálním součtem. V [13] Kurzweil ukázal, že v uvedeném speciálním případě integrál $\int_a^b [\mathrm{D}\, f(\tau)\, t)]$ existuje, právě když existuje Perronův integrál $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, tj. ukázal, že Perronův integrál lze definovat pomocí riemannovských součtů s výše uvedenou obměnou pojmu jemnosti dělení intervalu. K teorii integrálu v tomto období přispěl ještě článkem [18] z roku 1958, v němž pojednal o integraci per partes.

Na Kurzweilovi nezávisle a ze zcela jiných pohnutek k téže definici integrálu později dospěl i R. Henstock (kolem roku 1960)[4]).

Vedle již zmíněné užitečnosti v teorii diferenciálních rovnic je tato teorie integrálu velmi zajímavá i sama o sobě. Jde o názornou součtovou definici obecného, neabsolutně konvergentního integrálu, která mimo jiné představuje i značnou pedagogickou hodnotu.[5])

---

[4]) Viz např. monografii R. Henstock: Theory of Integration, Butterworths, London 1963.

[5]) Tohoto faktu využil např. belgický matematik J. Mawhin ve svém univerzitním textu Introduction à l'Analyse, Louvain, 1979. Další monografie z nedávné doby, které se Kurzweilovým integrálem zabývají, jsou R. M. McLeod: The Generalized Riemann Integral, Carus Math. Monographs, 20, MAA, 1980 a E. J. McShane: Unified Integration, Academic Press, 1983.

Ukazuje se, že Kurzweilovy myšlenky z roku 1957 nalézají v matematice úrodnou půdu a jsou stále velmi živé. Ke své teorii integrálu se J. Kurzweil vrátil v r. 1973 příspěvky o záměně pořadí dvou integrací v [57], o zajímavém problému multiplikátorů pro Perronův integrál v [58], a zveřejnil dodatek [B6] k Jacobsově monografii o míře a integrálu. V roce 1980 vydal malou monografii [B5], v níž shrnul poznatky a včlenil své pojetí integrálu do rámce teorie integrálu. V přehledné práci [74] pak prof. Kurzweil stručně a přístupně sepsal svůj pohled na teorii integrálu, jejímž základem jsou jeho práce z roku 1957.

V letech 1957–1959 se objevovaly zásadní práce o matematické teorii optimální regulace a zejména v r. 1959 vyšla známá monografie kolektivu sovětských matematiků, vedeného L. S. Pontrjaginem, o této problematice. Prof. J. Kurzweil velmi brzy reagoval na tuto aktuální problematiku a dal podnět výzkumům v této oblasti v Československu. V pracích [23] a [31] se J. Kurzweil zabýval lineární regulační úlohou a získal v tomto případě výsledky týkající se zejména geometrických vlastností dosažitelných množin. V práci [26] se věnoval lineární autonomní úloze s kvadratickým funkcionálem. Dokázal větu o existenci optimálního řešení, které pro $t \to \infty$ konverguje k nule, a řešil také tzv. obrácenou úlohu.

Problémy matematické teorie optimální regulace tvoří zázemí pozdějších prací J. Kurzweila, které se týkají diferenciálních relací (inklusí).

Metodika přiblížení v průměru zůstala i nadále v okruhu otázek, kterým J. Kurzweil věnoval pozornost. Zajímalo jej, jak tuto metodu použít v případě obecnějších prostorů. V [27] dokázal větu o přiblížení v průměru pro diferenciální rovnice v Banachově prostoru a výsledek použil v případě rovnice pro kmity slabě nelineární struny. Zvlášť je zde diskutován případ slabé nelinearity van der Polova typu. Těchto otázek se v daleko širší míře týkají práce [34]–[44] a [49]. V nich se Kurzweil zabývá i otázkami týkajícími se integrálních variet pro systémy diferenciálních rovnic v Banachově prostoru. Přitom velmi dbá na to, aby výsledků mohl použít i v teorii parciálních diferenciálních rovnic a funkcionálních diferenciálních rovnic.

Naznačíme zhruba Kurzweilovo tvrzení o existenci integrální variety (viz [41]) pro případ systému obyčejných diferenciálních rovnic v Banachově prostoru $X = X_1 \times X_2$, kde X_1, X_2 jsou rovněž Banachovy prostory. Nechť $f = (f_1, f_2)$: $G \times \mathbb{R} \to X_1 \times X_2 = X$, kde např. $G = \{(x_1, x_2) \in X, x_1 \in X_1, |x_1| < 2, x_2 \in X_2\}$. Pro $x = (x_1, x_2) \in X$ je $|x| = |x_1| + |x_2|$, kde $|x|, |x_1|, |x_2|$ jsou normy prvků x, x_1, x_2 v prostorech X, X_1, X_2. Vyšetřujme systém rovnic

$$\dot{x} = f(x, t) \quad \text{resp.} \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, t), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, t) \end{aligned} \tag{7}$$

za předpokladu, že funkce f: $G \times \mathbb{R} \to X$ je spojitá, omezená a má omezený diferenciál $\partial f / \partial x$, který je stejnoměrně spojitý vzhledem k x a t.

Nechť je $f_1(0, x_2, t) = 0$ pro $x_2 \in X_2$, $t \in \mathbb{R}$, tj. funkce $x_1(t) = 0$ je řešením první z rovnic (7) v celém $\mathbb{R}$ a množina

$$M = \{(0, x_2, t);\, x_2 \in X_2,\ t \in \mathbb{R}\} \subset X \times \mathbb{R}$$

je integrální varietou pro systém (7). Nechť dále pro $\tilde{x}_1 \in X_1$, $|\tilde{x}_1| \leqq \sigma$, $\tilde{x}_2 \in X_2$, $\tilde{t} \in \mathbb{R}$ existuje takové řešení (x_1, x_2) systému (7) definované na $\langle \tilde{t}, +\infty)$, že $x_1(\tilde{t}) = \tilde{x}_1$, $x_2(\tilde{t}) = \tilde{x}_2$ a

$$|x_1(t)| \leqq \varkappa e^{-\nu(t-\tilde{t})} \,.\, |x_1|$$

pro $t \geqq \tilde{t}$.

Jsou-li (x_1, x_2), (y_1, y_2) řešení systému (7) definovaná pro $t \in \mathbb{R}$, taková, že leží v M, potom nechť platí

$$|x_2(t_2) - y_2(t_2)| \geqq \varkappa^{-1} e^{-\mu(t_2 - t_1)} |x_2(t_1) - y_2(t_1)| \tag{8}$$

pro $t_2 \geqq t_1$ a přitom buď $\mu < \nu$.

Jestliže pro $x \in G$, $t \in \mathbb{R}$ a $0 \leqq \lambda \leqq 1$ je

$$\left| \int_t^{t+\lambda} [f(x, s) - g(x, s)] \, ds \right|$$

dostatečně malé, potom existuje zobrazení p: $X_2 \times \mathbb{R} \to X_1$ tak, že množina

$$\tilde{M} = \{(x_1, x_2, t);\, x_1 = p(x_2, t),\ x_2 \in X_2,\ t \in \mathbb{R}\} \subset X \times \mathbb{R}$$

je integrální varietou pro systém

$$\dot{x} = g(x, t)\,. \tag{9}$$

Jinými slovy: když $\tilde{x}_2 \in X_2$, $\tilde{t} \in \mathbb{R}$, $\tilde{x}_1 = p(\tilde{x}_2, \tilde{t})$, pak existuje takové řešení (x_1, x_2) systému (9) definované pro $t \in \mathbb{R}$, že $x_1(\tilde{t}) = \tilde{x}_1$, $x_2(\tilde{t}) = \tilde{x}_2$ a $x_1(t) = p(x_2(t), t)$ pro $t \in \mathbb{R}$.

Integrální varieta $\tilde{M}$ pro systém (9) si přitom zachová některé vlastnosti variety M pro systém (7). Zobrazení p je např. omezené a je lipschitzovské v proměnné x_2. Řešení systému (9) vycházející z okolí variety $\tilde{M}$ se pro $t \to \infty$ exponenciálně přibližuje k nějakému řešení (9), které leží v $\tilde{M}$ a pro každá dvě řešení (9) ležící v $\tilde{M}$ platí odhad stejného typu jako je uvedeno v (8).

Kvůli přehlednosti zde úmyslně neuvádíme úplnou formulaci výsledků, v nichž důležitou roli hraje souhra konstant charakterizujících systémy (7) a (9) a jejich řešení. Ty jsou pochopitelně pro výsledek podstatné a nesou také důležité informace.

Již jsme se zmínili o Kurzweilově snaze po obecné použitelnosti výsledků; ta jej vedla jak k obecným formulacím, tak i k obecné metodice zpracování. V souvislosti se studiem integrálních variet mu jako základ vyšetřování posloužil obecný pojem toku. Tok je jistý systém zobrazení vyhovující podmínkám axiomatické povahy, které vycházejí z podstatných vlastností, jež má soubor všech řešení diferenciální rovnice. Axiómy zahrnou všechny rysy diferenciální rovnice, které jsou pro důkaz existence integrální variety důležité. Tento přístup zvolil Kurzweil už v práci [34]. Práce [35] na ni pak těsně navázala. Celý komplex 122 tištěných stran těchto dvou prací obsahuje mnohá využití abstraktních výsledků s náležitou ilustrací na konkrétních případech. Abstraktní přístup k otázkám existence invariantní variety vrcholí v Kurzweilově práci [42], v níž formuluje výsledky pro toky v metrickém prostoru. Jeden odstavec v [42] je věnován funkcionálním diferenciálním rovnicím v Banachově prostoru. Kurzweil dokázal, že je-li funkcionální diferenciální rovnice dostatečně blízká k obyčejné diferenciální rovnici splňující jisté podmínky ohraničenosti, pak všechna řešení, která jsou definována na celém $\mathbb{R}$ (tzv. globální řešení) tvoří exponenciálně stabilní integrální varietu. Podmínka ohraničenosti však způsobila, že se výsledek na případ lineárních rovnic nevztahoval. V krátkých sděleních [45] a [48] proto Kurzweil zveřejnil analogické výsledky pro rovnice na varietách, do jejichž rámce už je možné zařadit i lineární funkcionální diferenciální rovnice. S A. Halanayem se v práci [40] Kurzweil zabýval toky na Banachových prostorech, které jsou tvořeny funkcemi definovanými na celé reálné ose, příp. na nějaké polopřímce. Teorie z [42] byla modifikována tak, že skýtala abstraktní základnu i pro funkcionální diferenciální systémy (viz např. [39]).

Soudobá problematika dynamických systémů má velmi výrazné souvislosti s moderní diferenciální geometrií. Tohoto aparátu Kurzweil ve svých výzkumech také bohatě využíval. Jako ilustraci uveďme jeho výsledek z [49]: Nechť M je podvarieta variety N a $f\colon U \to N$, kde f je $C^{(1)}$ zobrazení z okolí U variety M takové, že parciální zobrazení $f|_M\colon M \to M$ je difeomorfizmus na M. Za jistých dodatečných předpokladů pro každé $g\colon U \to N$, kde g je $C^{(1)}$ blízké k f, existuje podvarieta M_g v N tak, že $g|_{M_g}\colon M_g \to M_g$ je difeomorfizmus na M_g.

Tento výsledek je užitečný zejména v teorii diferenciálních rovnic se zpožděním.

Na práce o invariantních varietách navazuje skupina prací z let 1970–75, zabývajících se globálními řešeními funkcionálních diferenciálních rovnic a speciálně diferenciálních rovnic se zpožděním [45], [47], [50], [51], [52], [59].

Podrobněji se zmiňme jen o výsledku práce [59], v níž Kurzweil podstatně prohloubil výsledky Ju. A. Rjabova. Je-li $x\colon \langle t - \tau, t\rangle \to \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$, označme x_t: $\langle -\tau, 0\rangle \to \mathbb{R}^n$ funkci definovanou vztahem $x_t(\sigma) = x(t + \sigma)$ pro $\sigma \in \langle -\tau, 0\rangle$. Uvažujme funkcionální diferenciální rovnici

$$\dot{x} = F(t, x_t)\,, \tag{10}$$

kde F je spojitá v obou proměnných a lipschitzovská v druhé proměnné s konstantou L nezávislou na první proměnné. Rjabov ukázal, že není-li „zpoždění" τ příliš velké (přesně je-li $L\tau < \mathrm{e}^{-1}$), pak každým bodem (t_0, x_0) prochází právě jedno „speciální" řešení $\bar{x}(t) = \bar{x}(t_0, x_0; t)$ rovnice (10), které je definováno na $\mathbb{R}$ a exponenciálně omezené pro $t \to -\infty$. Při dalším zostření podmínky na τ ukázal, že ke každému řešení x existuje (nikoliv nutně jediné) speciální řešení $\bar{x}$ tak, že $x(t) - \bar{x}(t) \to 0$ pro $t \to +\infty$.

V práci [59] je dokázáno, že splnění nerovnosti $L\tau < \mathrm{e}^{-1}$ stačí dokonce k důkazu podstatně obsažnějšího tvrzení: je-li x řešení rovnice (10) a položíme-li $x_0 =$

$= \lim_{s \to \infty} \bar{x}(s, x(s); t_0)$, pak platí

$$\sup \{\exp(t/\tau) \cdot |x(t) - \bar{x}(t_0, x_0; t)|;\ t \geqq t_0\} < \infty .$$

Samozřejmě je $\bar{x}(t_0, x_0; t)$ jediné speciální řešení, splňující tuto nerovnost.

Problematika diferenciálních relací (inklusí) a s tím související otázky multifunkcí jsou dalším okruhem otázek, kterými se J. Kurzweil začal zabývat v 70. letech, a který jej zajímá dodnes.

Diferenciální relací nazýváme zobecnění diferenciální rovnice tvaru

$$\dot{x} \in F(t, x) . \tag{11}$$

Pravá strana tohoto vztahu je tzv. multifunkce, tj. zobrazení definované na $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, jehož hodnoty jsou podmnožiny prostoru $\mathbb{R}^n$. Za řešení diferenciální relace pokládáme obvykle lokálně absolutně spojitou funkci u definovanou na intervalu I, která pro skoro všechna $t \in I$ splňuje vztah $\dot{u}(t) \in F(t, u(t))$.

Počátky teorie diferenciálních relací, spadající do 30. let našeho století, jsou spjaty se jmény A. Marchaud a S. Zaremba. Jejich rozvoj v posledních 20—30 letech souvisí s jejich vztahem k teorii regulace, k vyšetřování diferenciálních rovnic s nespojitou pravou stranou apod. Právě tyto vztahy a zejména Filippovova práce[6]) z roku 1960 podnítily Kurzweilův dlouhotrvající zájem o diferenciální relace.

Při vyšetřování diferenciální relace se často předpokládá splnění podmínek Carathéodoryova typu, tj.

(i) $F(t, \cdot)$ je shora polospojitá pro skoro všechna t;
(ii) $F(\cdot, x)$ je měřitelná pro všechna x;
(iii) F splňuje podmínku omezenosti integrovatelnou funkcí.

Přitom se obvykle požaduje, aby množiny $F(t, x)$ byly neprázdné kompaktní a konvexní podmnožiny v $\mathbb{R}^n$.

V této souvislosti vzniká otázka, zda splnění podmínek (i), (ii) zaručuje již „rozumné" chování multifunkce F v obou proměnných. Nabízí se podmínka, která zřejmě implikuje podmínky (i), (ii):

(iv) ke každému $\varepsilon > 0$ existuje taková množina $A_\varepsilon \subset \mathbb{R}$, že míra $m(\mathbb{R} \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$ a restrikce $F|_{(A_\varepsilon \times \mathbb{R}^n) \cap G}$ je shora polospojitá (vzhledem ke dvojici proměnných (t, x)).

Opačná implikace, tj. (i), (ii) $\Rightarrow$ (iv), však neplatí. V práci [64] je dokázáno, že přesto se můžeme při studiu diferenciálních relací omezit na pravé strany, které splňují (iv). Platí totiž věta:

Buď K^n systém všech neprázdných kompaktních konvexních podmnožin v $\mathbb{R}^n$. Nechť $F: G \to K^n$ splňuje (i). Pak existuje funkce $\tilde{F}: G \to K^n \cup \{\emptyset\}$ splňující (iv),

[6]) A. F. Filippov: Differencial'nyje uravnenija s razryvnoj pravoj časťju, Mat. sbornik 51 (93) (1960), 99—128.

(v) $\tilde{F}(t, x) \subset F(t, x)$ pro všechna $(t, x) \in G$,

(vi) každé řešení (11) je i řešením diferenciální relace $\dot{x} \in \tilde{F}(t, x)$.

Vlastnost (iv) Kurzweil nazval Scorza-Dragoniovou vlastností podle italského matematika, který obdobné otázky zkoumal pro klasické diferenciální rovnice.

Tvrzení uvedené věty, že od dané multifunkce můžeme přejít k multifunkci, která má Scorza-Dragoniovu vlastnost, aniž přitom „ztratíme" nějaká řešení původní diferenciální relace, usnadní vyšetřování vlastností řešení diferenciálních relací, jak se ukazuje např. v práci [65]. V ní je dokázán výsledek analogický známé větě z teorie obyčejných diferenciálních rovnic:

K diferenciální rovnici $\dot{x} = f(t, x)$ existuje taková množina $E \subset \mathbb{R}$ nulové míry, že pro každé řešení $x(t)$ derivace $\dot{x}(t)$ existuje a splňuje diferenciální rovnici pro všechna $t \notin E$. (Pro diferenciální relaci je nutno pojem „derivace" nahradit pojmem „kontingentní derivace").

V práci [68] je dokázána uzavřenost množiny řešení diferenciální relace (11) vůči jistému limitnímu přechodu, který lze zhruba popsat následujícím způsobem:

Nechť W je množina funkcí $w: I_w \to \mathbb{R}^n$, $I_w = \bigcup_{i=1}^{k} \langle \tau_{i-1}, \tau_i)$, $\tau_0 < \ldots < \tau_k$, pro které existují taková řešení u_i diferenciální relace (11), že platí $w(t) = u_i(t)$ pro $t \in \langle \tau_{i-1}, \tau_i)$. Označme J_w funkci skoků funkce w (tj. $w - J_w$ je spojitá funkce, $J_w(t) = 0$ pro $t \in \langle \tau_0, \tau_1)$). Pak každá funkce q, která je stejnoměrnou limitou nějaké posloupnosti funkcí $w_j \in W$ splňující $J_{w_j} \to 0$ stejnoměrně, je řešením (11).

Obráceně, každá množina „rozumných" funkcí uzavřená vůči popsanému limitnímu přechodu je množinou (všech) řešení jisté diferenciální relace. To umožňuje k dané množině funkcí najít „minimální" relaci, pro kterou jsou všechny dané funkce řešeními.

Diferenciálních relací se týkají i další Kurzweilovy práce [61], [63], [66], [67], [69] a [70]. Zmiňme se již jen o práci [70], kde je podána nová součtová definice integrálu multifunkce a je dokázána věta o ekvivalenci diferenciální a integrální relace (zobecňující obdobný výsledek pro obyčejné diferenciální rovnice).

Tento článek signalizuje v Kurzweilově vědecké práci jistý návrat k problematice součtové definice integrálu. V posledních letech se jí skutečně opět intenzivně věnuje. Hlavním podnětem však byla práce J. Mawhina[7]), který podal zobecnění Perronova integrálu v $\mathbb{R}^n$, zaručující platnost věty o divergenci (Stokesovy věty) pro všechna diferencovatelná vektorová pole bez dalších předpokladů. Mawhinova definice zobecněného Perronova integrálu vychází ze součtové definice podané Kurzweilem Henstockem a McShanem. Omezuje však třídu přípustných dělení (n-rozměrného intervalu) tím, že uvažuje jen intervaly, u nichž podíl nejdelší a nejkratší hrany není příliš velký. Mawhin sám však upozornil, že není jasné, zda jím zavedený integrál

[7]) J. Mawhin: Generalized Multiple Perron Integrals and the Green-Goursat Theorem for Differentiable Vector Fields, Czechoslovak Math. Journal 31 (106) (1981), 614—632.

má některé přirozené vlastnosti, zejména pokud jde o následující typ aditivity: jsou-li $J, K, J \cup K$ intervaly a je-li f integrovatelná na J i na K, je f integrovatelná rovněž na $J \cup K$.

V práci [73] byl nalezen příklad, že Mawhinův integrál tuto vlastnost skutečně postrádá, a byla podána modifikovaná verze Mawhinovy definice: místo poměru nejdelší a nejkratší strany se zde pro charakterizaci dělicích intervalů J užívá veličiny $\sigma(J) = \operatorname{diam} J \,.\, m(\partial J)$ (součin průměru intervalu a $(n-1)$-rozměrné Lebesgueovy míry jeho hranice).

Definujme P-dělení intervalu $I \subset \mathbb{R}^n$ jako konečný systém Π dvojic (x^j, I^j), $j = 1, \ldots, k$, kde I^j jsou nepřekrývající se kompaktní intervaly, jejichž sjednocení je I, a $x^j \in I^j$. Je-li $\delta\colon I \to (0, \infty)$ (kalibr), pak dané P-dělení nazýváme δ-jemné jestliže I^j, $j = 1, \ldots, k$ leží v kouli o středu x^j a poloměru $\delta(x^j)$. Pro funkci $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ položme

$$S(f, \Pi) = \sum_{j=1}^{k} f(x^j)\, m(I^j)$$

a definujme: číslo γ je M-integrálem funkce f jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ a $C > 0$ existuje takový kalibr δ, že pro každé P-dělení Π, které je δ-jemné a splňuje

$$\sum_{j=1}^{k} \sigma(I^j) \leqq C\,, \tag{12}$$

platí $|\gamma - S(f, \Pi)| < \varepsilon$. Protože podmínka (12) je zřejmě méně omezující než původní Mawhinova, připouští tato definice bohatší třídu dělení, a tedy užší třídu integrovatelných funkcí. V práci [73] jsou podrobně vyšetřeny vlastnosti nového pojmu integrálu a ukazuje se, že zachovává ty, které vedly J. Mawhina k nové definici (zejména tedy větu o divergenci, resp. integrovatelnost každé derivace). Integrál má přitom vlastnost „aditivity" ve výše uvedeném smyslu a platí pro něj i limitní věty o monotonní resp. dominované konvergenci.

Jak v případě Mawhinova, tak i Kurzweilova vícerozměrného integrálu je nevýhodné, že lze integrovat jen přes intervaly, které jsou kartézským součinem jednorozměrných intervalů. Integrály jsou svázány se souřadnicovou soustavou a následkem toho nedovolují ani poměrně jednoduché transformace. Další Kurzweilovou snahou proto bylo nalézt takovou definici, která by tyto nevýhody odstranila.

V práci [76] byl i tento problém úspěšně rozřešen. Místo uvedeného typu dělení se v ní užívá dělení založených na rozkladu jednotky. Je-li f funkce s kompaktním nosičem $\operatorname{supp} f$, pak PU-dělením nazveme každý konečný systém Δ dvojic (x^j, ϑ_j), $j = 1, \ldots, k$, kde ϑ_j jsou funkce třídy C^1 s kompaktním nosičem, pro které platí $0 \leqq \vartheta_j(x) \leqq 1$, $\operatorname{Int}\{x \in \mathbb{R}^n; \sum_{j=1}^{k} \vartheta_j(x) = 1\} \supset \operatorname{supp} f$. Dále definujeme $S(f, \Delta) = \sum_{j=1}^{k} f(x^j) \int \vartheta_j(x)\, \mathrm{d}x$ a místo podmínky (12) zaveďme

$$(13) \qquad \sum_{j=1}^{k} f(x^j) \int \|x - x^j\| \sum_{i=1}^{n} |(\partial \vartheta_j / \partial x_i)(x)| \, dx \leqq C$$

(v obou případech integrujeme ve skutečnosti jen přes jisté kompaktní množiny). Jestliže v definici δ-jemnosti dělení zaměníme intervaly I^j množinami supp ϑ_j, pak lze vyslovit definici PU-integrálu (PU = „partition of unity" = „rozklad jednotky") formálně zcela stejně jako definici M-integrálu.

Pro PU-integrál platí obvyklá transformační věta a rovněž Stokesova věta pro diferencovatelné funkce resp. formy bez jakýchkoliv dodatečných předpokladů. Přitom se snadno ukáže, že mezi PU-integrovatelnými funkcemi jsou některé neabsolutně integrovatelné funkce, takže PU-integrál je skutečným zobecněním Lebesgueova integrálu. Není však zobecněním Perronova integrálu (i když existují PU-integrovatelné funkce, které nemají Perronův integrál).

V další práci [78] se ukazuje, že modifikací podmínky (13) lze dojít k pojmu integrálu, pro který lze dokázat Stokesovu větu i pro funkce, které nejsou diferencovatelné ve všech bodech, ale splňují jednu z následujících tří podmínek:

(i) f je diferencovatelná až na body nadroviny $x_1 = 0$, je spojitá v celém oboru;

(ii) f je diferencovatelná až na jistou množinu „malé" Hausdorffovy míry; je omezená v celém oboru;

(iii) f je diferencovatelná až na bod 0; $f(x) = o(\|x\|^{1-n})$.

Technicky obtížné je dokázat, že zavedená definice má smysl, tj. že pro každý kalibr δ a každou (dost velkou) konstantu C existují δ-jemná dělení splňující stanovené podmínky.

Uvedený popis Kurzweilových vědeckých výsledků je výběrem, který z důvodu omezeného rozsahu článku zdaleka není úplný. Avšak Kurzweilova badatelská činnost ani ve svém souhrnu nevyčerpává jeho přínos k rozvoji československé matematiky.

Již dlouhou dobu prof. J. Kurzweil pedagogicky působí na matematicko-fyzikální fakultě Karlovy univerzity v Praze. Zprvu vedl speciální přednášky výběrového charakteru, ve kterých posluchače seznamoval s oblastmi své vlastní vědecké práce. Od roku 1964 pak soustavně přednáší základní kurs obyčejných diferenciálních rovnic. Vytvořil reformovanou osnovu tohoto předmětu a připravil pro studenty odpovídající učební texty [B2] a [B3].

Z pedagogických zkušeností prof. Kurzweila vychází i kniha [B4] věnovaná klasické teorii obyčejných diferenciálních rovnic. Není jenom precizní učebnicí, v níž jsou beze zbytku vyloženy analytické základy teorie; má i rysy vědecké monografie. Jsou naznačeny některé cesty, kterými se ubírá moderní teorie diferenciálních rovnic. V tomto směru je v [B4] např. originální výklad o diferenciálních relacích, který se v běžných textech nevyskytuje. Kniha nese pečeť Kurzweilova stylu, spočívajícího v detailním zpracování. Vede čtenáře k zevrubnému studiu, které vzhledem k charakteru textu nemůže být povrchní.

Knihu [B4] J. Kurzweil v některých partiích upravil, doplnil a dal tím vznik její anglické verzi [B7]. Pozoruhodná je např. v [B7] partie o okrajových úlohách.

Se jménem prof. J. Kurzweila je spojen pravidelný čtvrteční seminář o obyčejných diferenciálních rovnicích v Matematickém ústavu ČSAV. Seminář se schází od roku 1952 a není tématicky omezen pouze na obyčejné diferenciální rovnice. Je to dáno jednak velkým Kurzweilovým rozhledem a jednak jeho neobyčejnou zvídavostí v různých oblastech matematiky. Na schůzkách semináře promluvilo už mnoho matematiků z celého světa.

Vědecké oddělení obyčejných diferenciálních rovnic v MÚ ČSAV, které prof. Kurzweil vedl od roku 1955 do roku 1985, nese na své práci stopy jeho vědecké osobnosti, plné originálních myšlenek a nápadů. Pisatelé těchto řádek nejlépe vědí, a mohou odpovědně prohlásit, že pracovat s J. Kurzweilem je příjemné a mimořádně podnětné, a že mnohé z prací pracovníků oddělení by bez něj světlo světa nespatřily.

Prof. J. Kurzweil od roku 1956 do roku 1970 vedl Časopis pro pěstování matematiky jako vedoucí redaktor. Podílel se na tvorbě státních plánů základního výzkumu a v různých funkcích vedl také práce k jejich naplnění. Dlouhodobě pracuje ve vědeckém kolegiu matematiky ČSAV a z jeho pověření sleduje otázky ediční činnosti v matematice v rámci ČSAV. Byl a je členem či předsedou komisí pro udělování vědeckých hodností kandidáta resp. doktora fyzikálně-matematických věd. Pracuje v Jednotě čs. matematiků a fyziků, jejímž je dlouholetým členem.

Výčet jubilantova působení v matematice by nebyl úplný, kdybychom se nezmínili o jeho širokém zájmu o otázky výuky matematiky na našich školách. Této problematice se věnuje jak na svém pracovišti, tak také v rámci JČSMF. Profesor Kurzweil je vynikající vědecká osobnost. Je přitom ale bytostně spjat se životem v reálném světě, je mu blízké i myšlení a život dětí. Z toho vychází jeho postoje např. v otázkách výuky matematiky na základní škole. Prosazuje využití zdravého rozumu a dovednosti dětí a jejich vzdělávání založené na zkušenosti a přirozeném myšlení. Je přesvědčen o tom, že je nutné děti vychovávat v souladu s dnešním stavem vědy. Je však toho názoru, že abstraktní pojmy a schemata, která významně přispěla k rozvoji matematiky jako vědní discipliny, vedou malé děti i mládež v mnoha případech k formálním postupům, které jsou neracionální přinejmenším stejně jako starý systém výuky. Prof. Kurzweil těmto otázkám věnoval nemálo času a energie. Jeho věcná kritika a konstruktivní návrhy vedly a postupně vedou k dalšímu zlepšení práce s dětmi ve školách v hodinách matematiky. Jde přitom o rozsáhlou práci, mnohé hodiny diskusí s autory učebnic a recenzní činnost s cílem využít rozumového potenciálu dětí a tím zlepšit a zefektivnit způsob jejich matematického vzdělávání.

Aktivní vědecká činnost prof. J. Kurzweila trvá zhruba 35 let. Během této doby vytvořil úctyhodné vědecké dílo, které výrazně poznamenalo československou matematiku a v neobvykle široké části spektra obohatilo současné matematické poznání. Je ve světě uznávaným odborníkem, svojí prací a jejími výsledky znamenitě přispívá k dobrému jménu Československa.

Všichni, kdo prof. Jaroslava Kurzweila znají, vědí, že je to dobrý a moudrý člověk, kterému nechybí humor, který má rád lidi se všemi jejich klady i nedostatky, a mají jej proto také rádi.

Přejeme Jaroslavu Kurzweilovi do dalších let hodně úspěchů a pevné zdraví, aby naše matematika ještě dlouho mohla čerpat síly z příznivého vědeckého klimatu, které kolem sebe vytváří.

SEZNAM PUBLIKACÍ JAROSLAVA KURZWEILA

A. *Vědecké publikace v časopisech*

[1] A Contribution to the Metric Theory of Diophantine Approximations. Czechoslovak Math. Journal *1* (76) 1951, 149—178; totéž v ruštině: Czechoslovak Math. Journal *1* (76) 1951, 173—203.

[2] O jednoznačnosti řešení modifikované Dirichletovy úlohy. Čas. pěst. mat. *78* (1953), 213—214.

[3] A Characterization of Analytic Operations in Real Banach Spaces. Studia mathematica XIV (1953), 82—83.

[4] On Approximation in Real Banach Spaces. Studia mathematica XIV (1954), 214—231.

[5] On the Metric Theory of Inhomogeneous Diophantine Approximations. Studia mathematica XV (1955), 84—112.

[6] К теории колебаний автономной квазилинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Czechoslovak Math. Journal *5* (*80*) 1955, 517—531.

[7] О периодических и почти периодических решениях системы обыкновенных дифференциальных уравнений (s *O. Vejvodou*). Czechoslovak Math. Journal *5* (*80*) 1955, 362—370.

[8] К обращению первой теоремы Ляпунова об устойчивости движения. Czechoslovak Math. Journal *5* (*80*) 1955, 382—398.

[9] Об обращении второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения. Czechoslovak Math. Journal *6* (*81*) 1956, 217—260, 455—485.

[10] Об обращении теоремы Ляпунова об устойчивости и теоремы Персидского о равномерной устойчивости (s *I. Vrkočem*). Czechoslovak Math. Journal *7* (*82*) 1957, 254—272.

[11] On Approximation in Real Banach Spaces by Analytic Operations. Studia mathematica XVI (1957), 124—129.

[12] О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра (s *Z. Vorlem*). Czechoslovak Math. Journal *7* (*82*) 1957, 568—583.

[13] Generalized Ordinary Differential Equations and Continuous Dependence on a Parameter. Czechoslovak Math. Journal *7* (*82*) 1957, 418—449.

[14] Generalized Ordinary Differential Equations. Czechoslovak Math. Journal *8* (*83*) 1958, 360—388.

[15] Unicity of Solutions of Generalized Differential Equations. Czechoslovak Math. Journal *8* (*83*) 1958, 502—509.

[16] O Diracově funkci v nelineárních diferenciálních rovnicích (s *V. Doležalem* a *Z. Vorlem*). Aplikace matematiky *3* (1958), 348—359.

[17] Об обобщенных обыкновенных дифференциальных уравнениях обладающих разрывными решениями. Прикл. мат. и мех. XXII (1958), 27—45.

[18] On Integration by Parts. Czechoslovak Math. Journal *8* (*83*) 1958, 356—359.

[19] O některých vlastnostech lineárních diferenciálních rovnic (s *V. Doležalem*). Aplikace matematiky *4* (1959), 163—176.

[20] Addition to My Paper "Generalized Ordinary Differential Equations and Continuous Dependence on a Parameter". Czechoslovak Math. Journal *9* (*84*) 1959, 564—573.

[21] Linear Differential Equations with Distributions as Coefficients. Bull. de l'academie polonaise des sciences, Ser. des sci. math., astr. et phys., VII (1959), 557—560.
[22] Заметка по колеблющимся решениям уравнения $y'' + f(x)\, y^{2n-1} = 0$. Čas. pěst. mat. *85* (1960), 357—358.
[23] On Linear Control Systems (s *Z. Vorlem*). Bul. Inst. Polit. Iaşi VI (X) 1960, 13—19.
[24] On Continuous Dependence on a Parameter (s *J. Jarníkem*). Contributions to the theory of nonlinear oscillations 5, 25—35, Princeton 1960.
[25] O spektrálním rozkladu hermitovského operátoru. Čas. pěst. mat. *86* (1961), 90—92.
[26] К аналитическому конструированию регуляторов. Автоматика и телемеханика XXII (1961), 688—695.
[27] О принципе усреднения в некоторых специальных случаях краевых задач для уравнения в частных производных. Čas. pěst. mat. *88* (1963), 444—456.
[28] The Averaging Principle and Its Applications in Partial Differential Equations. Nonlinear Vibration Problems, 1963, 142—148.
[29] Problems which Lead to a Generalization of the Concept of an Ordinary Nonlinear Differential Equation. Proc. of Conf. Equadiff, Academia Praha, 1963, 65—76.
[30] Об одной системе третьего порядка, описивающей движение материальной точки с учетом внутренного трения. Труды Международ. симп. по нелинейным колебаниям, Kiev 1963, 220—222.
[31] К линейной теории оптимального управления. Čas. pěst. mat. *89* (1964), 90—101.
[32] Об одном неравенстве для собственных значений интегральных уравнений. Čas. pěst. mat. *89* (1964), 205—210.
[33] Über die asymptotische Methode in der Theorie der nichtlinearen Differentialgleichungen. III. Konferenz über nichtlineare Schwingungen, Abhandlungen der Deutschen Akad. der Wiss., Klasse Math., Phys., Astr., 1965, 1—9.
[34] Exponentially Stable Integral Manifolds, Averaging Principle and Continuous Dependence on a Parameter. Czechoslovak Math. Journal *16* (*91*) 1966, 380—423, 463—492.
[35] Invariant Manifolds for Differential Systems. Atti VIII Congr. UMI, Trieste, 1967, 291—292.
[36] Van der Pol Perturbation of the Equation for a Vibrating String. Czechoslovak Math. Journal *17* (*92*) 1967, 558—608.
[37] Invariant Manifolds for Flows. Acta Fac. Rerum Nat. U. Comenianae, Proc. Equadiff Bratislava, 1966, Mathematica XVII (1967), 89—92.
[38] Invariant Manifolds of Differential Systems. Proc. of Fourth Conf. on Nonlinear Oscillations. Academia Praha, 1968, 41—49.
[39] Invariant Manifolds of a Class of Linear Functional Differential Equations. Revue Roum. Math. Pures et Appl. XIII (1968), 1113—1120.
[40] A Theory of Invariant Manifolds for Flows (s *A. Halanayem*) Revue Roum. Math. Pures et Appl. XIII (1968), 1079—1087.
[41] Инвариантные множества дифференциальных систем. Дифференциальные уравнения IV (1968), 785—797.
[42] Invariant Manifolds for Flows, Differential Equations and Dyn. Systems. Proc. Int. Symp. Mayaguez 1967, Academic Press, 431—468.
[43] Invariant Manifolds of Differential Systems. ZAMM *49* (1969), 11—14.
[44] On Invariant Sets and Invariant Manifolds of Differential Systems (s *J. Jarníkem*). Journal of Diff. Eq. *6* (1969), 247—263.
[45] Global Solutions of Functional Differential Equations. Seminar on Diff. Equations and Dynamical Systems 11, Lecture Notes in Math. 144, Springer Verlag 1970, 134—139.
[46] Uniqueness and Differentiability of Solutions of Ordinary Differential Equations and Total Differential Equations. Math. Inst. Univ. of Warwick, preprint 1969, 1—26.

[47] Global Solutions of Functional Differential Equations. Univ. of Maryland, The Inst. for Fluid Dynamics and Applied Math., Technical Note BN629, 1969.
[48] Small Delays Don't Matter. Math. Inst. Univ. of Warwick, preprint 1969, 1—17.
[49] Invariant Manifolds I. CMUC *11* (1970), 309—336.
[50] Existence of Global Solutions of Delayed Differential Equations on Compact Manifolds. Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste, vol. II, fasc. II. (1970), 106—108.
[51] On Solutions of Nonautonomous Linear Delayed Differential Equations which are Defined and Bounded for $t \to -\infty$. CMUC *12* (1971), 69—72.
[52] On Solutions of Nonautonomous Linear Delayed Differential Equations which are Exponentially Bounded for $t \to -\infty$. Čas. pěst. mat. *96* (1971), 229—238.
[53] Solutions of Linear Nonautonomous Functional Differential Equations which are Exponentially Bounded for $t \to -\infty$. Journal of Diff. Eq. *11* (1972), 376—384.
[54] On a System of Operator Equations. Journal of Diff. Eq. *11* (1972), 364—375.
[55] On Submultiplicative Nonnegative Functionals on Linear Maps of Linear Finitedimensional Normed Spaces. Czechoslovak Math. Journal *22* (*97*) 1972, 454—461.
[56] On the Maximum Value of a Class of Determinants. Matem. časopis *23* (1973), 40—42.
[57] On Fubini Theorem for General Perron Integral. Czechoslovak Math. Journal *29* (*98*) 1973, 286—297.
[58] On Multiplication of Perron-integrable Functions. Czechoslovak Math. Journal *23* (*98*) 1973, 542—566.
[59] Ryabov's Special Solutions of Functional Differential Equations (s *J. Jarníkem*). Boll. U.M.I. (4) 11, Suppl. Fasc. *3* (1975), 198—208.
[60] On Ryabov's Special Solutions of Functional Differential Equations (s *J. Jarníkem*). Colloquia Math. Soc. J. Bolyai 15, Differential Equations, Keszthely Hungary (1975), 303—307.
[61] Right-hand Sides of Differential Inclusions which Cannot be Reduced (s *J. Jarníkem*). Проблемы асымптотической теории нелинейных колебаний. Naukova Dumka, Kiev 1977, 122—132.
[62] Reducing Differential Inclusions (s *J. Jarníkem*). Abh. der Akad. der Wissenschaften der DDR, Abt. Mathematik, Naturwissenschaften, Technik No 3 (1977), 477—479.
[63] On Differential Relations and on Filippov's Concept of Differential Equations. Proc. Uppsala 1977 Int. Conf. on Diff. Eq., Uppsala 1977, 109—113.
[64] On Conditions on Right Hand Sides of Differential Relations (s *J. Jarníkem*). Čas. pěst. mat. *102* (1977), 334—349.
[65] Extension of a Scorza-Dragoni Theorem to Differential Relations and Functional Differential Relations (s *J. Jarníkem*). Comm. math. spec. in honour of W. Orlicz 1978, 147—158.
[66] On Differential Relations. Proc. VIII$^{\text{th}}$ Int. Conf. on Nonlin. Osc., Praha 1978, 39—49.
[67] Kneser's Theorem for Multivalued Differential Delay Equations (s *P. Krbcem*). Čas. pěst. mat. *104* (1979), 1—8.
[68] Sets of Solutions of Differential Relations (s *J. Jarníkem*). Čas. pěst. mat. *106* (1981), 554—568.
[69] Nonautonomous Differential Relations and Their Connections with Differential Equations the Right Hand Side of which is Discontinuous with Respect to Space Variables. Proc. of the Second Conference Rousse 81, Rousse 1982.
[70] Integral of Multivalued Mappings and its Connection with Differential Relations (s *J. Jarníkem*). Čas. pěst. mat. *108* (1983), 8—28.
[71] On a Problem in the Theory of Linear Differential Equations with Quasi-periodic Coefficients (s *A. Vencovskou*). Proc. of the 9$^{\text{th}}$ Int. Conf. on Nonlin. Osc., Kiev 1981, Vol. 1, Kiev 1984, 214—217.

[72] On Linear Differential Equations with Almost Periodic Coefficients and the Property that the Unit Sphere is Invariant (s *A. Vencovskou*). Proc. Int. Conf. Equadiff 82, Lecture Notes in Math. 1017, Springer Verlag 1983, 364—368.
[73] On Mawhin's Approach to Multiple Nonabsolutely Convergent Integrals (s *J. Jarníkem* a *Š. Schwabikem*). Čas. pěst. mat. *108* (1983), 356—380.
[74] The Integral as a Limit of Integral Sums. Jahrbuch Überblicke Mathematik 1984, Bibliographisches Inst. AG 1984, 105—136.
[75] A Non-absolutely Convergent Integral which Admits C^1-transformations (s *J. Jarníkem*). Čas. pěst. mat. *109* (1984), 157—167.
[76] A Non-absolutely Convergent Integral which Admits Transformation and Can be Used for Integration on Manifold (s *J. Jarníkem*). Czechoslovak Math. Journal *35* (*110*) (1985), 116—139.
[77] On Regularization of Right Hand Sides of Differential Relations (s *J. Jarníkem*). Proc. Royal Soc. Edinburgh, *97A* (1984), 151—159.
[78] A New and More Powerful Concept of the PU-Integral (s *J. Jarníkem*). Czechoslovak Math. Journal (v tisku).

B. *Knižní publikace*

[1] Integrální rovnice. SPN, Praha 1963.
[2] Diferenciální rovnice (Obyčejné diferenciální rovnice v reálném oboru). SPN, Praha 1968.
[3] Obyčejné diferenciální rovnice v reálném oboru. SPN, Praha 1970.
[4] Obyčejné diferenciální rovnice. TKI, SNTL Praha 1978.
[5] Nichtabsolut konvergente Integrale. Teubner Texte zur Mathematik, Bd. 25, Teubner Verlag Leipzig 1980.
[6] Appendix A: The Perron-Ward Integral and Related Concepts v monografii K. Jacobs: Mesure and Integral. Academic Press 1978, 515—533.
[7] Ordinary Differential Equations. SNTL Praha.

C. *Popularizační a příležitostné články*

[1] Mikusińského operátorový počet (s *V. Doležalem*) Slabopr. obzor *16* (1955), 582—592.
[2] Seventieth Birthday of Professor Vojtěch Jarník. Czechoslovak Math. Journal *17* (*92*) (1967), 624—627.
[3] Sedmdesátiny akademika Vojtěcha Jarníka. Čas. pěst. mat. *92* (1967), 488—489.
[4] Zemřel prof. Vojtěch Jarník (s *Bř. Novákem*). Čas. pěst. mat. *96* (1971), 307—337.
[5] Professor Vojtěch Jarník ist gestorben (s *Bř. Novákem*). Czechoslovak Math. Journal *21* (*96*) (1971), 493—524.
[6] Zemřel prof. Vojtěch Jarník (s *Bř. Novákem*). Apl. mat. *16* (1971), 391—394.
[7] O životě a díle člena korespondenta ČSAV prof. Vladimíra Knichala. Apl. mat. *20* (1975), 306—310.
[8] O životě a díle člena korespondenta ČSAV prof. Vladimíra Knichala. Čas. pěst. mat. *100* (1975), 314—324.
[9] In memoriam of Professor Vladimír Knichal. Czechoslovak Math. Journal *25* (*100*) (1975), 503—509.
[10] To the Sixtieth Anniversary of Birthday of Professor Marko Švec, DrSc. Czechoslovak Math. Journal *30* (*105*) (1980), 163—170.
[11] K šedesátinám prof. Marka Švece, DrSc. Čas. pěst. mat. *105* (1980), 102—108.
[12] To the Sixtieth Anniversary of Birthday of Professor Otto Vejvoda (s *Vl. Lovicarem*). Czechoslovak Math. Journal *32* (*107*) (1982), 504—510.

[13] K šedesátým narozeninám doc. RNDr. Otto Vejvody, DrSc. (s *Vl. Lovicarem*). Čas. pěst. mat. *107* (1982), 326—332.

[14] K šedesátým narozeninám doc. RNDr. Otto Vejvody, DrSc. (s *Vl. Lovicarem*). Apl. mat. *27* (1982), 311—312.

[15] Vzpomínka na začátky Matematického ústavu ČSAV (s *O. Vejvodou*). Čas. pěst. mat. *107* (1982), 442—443.

[16] A Tribute to Bernard Bolzano. In: Proc. Conf. Equadiff 5, Teubner, Leipzig 1982, 212—217.

26. MMO

Dvacátá šestá mezinárodní matematická olympiáda (MMO) se konala ve dnech 29. června — 11. července 1985 ve Finsku za účasti 209 soutěžících z 39 zemí celého světa. V mezinárodní porotě, jíž předsedal prof. Ilpo Laine z helsinské university, byly zastoupeny tyto státy: Alžírsko, Austrálie, Belgie, Brazílie, Bulharsko, Československo, Čína, Finsko, Francie, Island, Itálie, Izrael, Jugoslávie, Kanada, Kolumbie, Kuba, Kuvajt, Kypr, Maďarsko, Maroko, Mongolsko, NDR, Nizozemí, Norsko, NSR, Polsko, Rakousko, Rumunsko, Řecko, SSSR, Španělsko, Švédsko, Tunis, Turecko, USA, Velká Británie a Vietnam. Na MMO byla též přítomna pozorovatelka z Indie.

Vlastní soutěž proběhla ve dnech 4. a 5. července v malém městečku Joutsa. Po zhodnocení výsledků se mezinárodní porota rozhodla udělit 14 prvních, 35 druhých a 52 třetích cen. Na předních místech se přitom umístili žáci z Rumunska, USA, Maďarska a Bulharska.

Československo reprezentovala na 26. MMO šestice žáků gymnázií; nejúspěšnějším z nich byl Marcel Polakovič z Bratislavy: za své výkony byl odměněn jednou z druhých cen. Druhé ceny dostali také Jarmila Ranošová z gymnázia v Bílovci a Adam Obdržálek z Prahy; třetí cenu získal Ján Šefčík z Bratislavy. V neoficiálním pořadí družstev podle součtů bodů bylo Československo na 12.—13. místě (spolu s Kanadou).

Příští, 27. MMO se má konat v červenci 1986 ve Varšavě.

František Zítek, Praha