Václav Metelka

O dvou speciálních konfiguracích $(12_4, 16_3)$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 110 (1985), No. 4, 351–355

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/118249`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 110 (1985), Praha

O DVOU SPECIÁLNÍCH KONFIGURACÍCH $(12_4, 16_3)$

VÁCLAV METELKA, Liberec

Věnováno památce profesora Karla Havlíčka

(Došlo dne 14. února 1984)

V konfiguracích $(12_4, 16_3)$ je – jak známo – dvanáct navzájem různých bodů a šestnáct navzájem různých přímek uspořádáno v projektivní rovině nad polem komplexních čísel tak, že každým z těchto bodů procházejí (právě) čtyři přímky a na každé z těchto přímek leží (právě) tři body.

Nahradíme-li v této definici slovo (právě) slovem (aspoň), nabývá pojem konfigurace obecnějšího významu a v případě, kdy konfiguračním bodem prochází více přímek, nebo kdy na konfigurační přímce leží více bodů, dostáváme tzv. *konfiguraci singulární,* s níž se v tomto článku ještě setkáme.

Pokud nebude řečen vysloveně opak, zabývejme se nadále konfiguracemi regulárními, takovými, jaké jsou definovány v prvním odstavci.

Při zkoumání konfigurací se obvykle sestaví tzv. konfigurační schéma, v němž pomocí konfiguračních bodů vypíšeme všech šestnáct konfiguračních přímek.

Tak ku příkladu schéma:

$$\begin{aligned}(\mathrm{s})\quad & M-N-O,\ M-R-U,\ M-Q-T,\ M-P-W,\ X-P-S,\ X-Q-R,\\ & X-W-T,\ X-U-V,\ N-R-S,\ N-V-W,\ N-P-Q,\ O-S-T,\\ & O-V-Q,\ O-P-U,\ R-T-V,\ S-U-W\end{aligned}$$

popisuje, jak je dvanáct konfiguračních bodů

$$M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X$$

konfiguračními přímkami spojeno.*)

K tomu je nutno poznamenat, že ne všechna náhodně sestavená schémata jsou skutečně vypsanými incidencemi realizovatelná v projektivní rovině nad polem komplexních čísel. Mnohdy totiž docházíme k základnímu sporu, kdy některé body (resp. přímky) splynou. Pak se ovšem o konfiguraci v žádném případě nemůže hovořit.

*) Schéma (s) jsem popsal již v práci [1] a je tam uvedeno na straně 26 s označením (S_3).

Schéma (s) realizovatelné je a na důkaz toho uvádíme projektivní souřadnice všech dvanácti konfiguračních bodů:

$$\text{(b)}\quad \begin{array}{llll} M = (t, s, 1), & N = (1,0,0), & O = (1, st, t), & P = (0, 1, 0), \\ Q = (1, 1, 0), & R = (1, 0, 1), & S = (0, 0, 1), & T = (1, st, -t^2), \\ U = (1, -s, t), & V = (t^2, st, -1), & W = (t, -st, 1), & X = (0, 1, -1), \end{array}$$

$$\text{kde}\quad st = 1 - t + t^2 .$$

Tyto body splňují všechny podmínky incidence v záznamu (s). Je třeba ovšem uvážit, že parametr t nesmí nabývat hodnoty $t = 0$ (viz rovnici $st = 1 - t + t^2$), ani hodnot $t = -1$, resp. $t = 1$ (kdy splyne bod M s bodem 0) a konečně pro t nesmí platit ani $1 - t + t^2 = 0$, neboť pak by splynuly body M a W. Tyto výsledky si poznamenáme:

$$(p)\qquad \text{Neplatí}\quad t\,.\,(1 - t^2)\,.\,(1 - t + t^2) = 0\,.$$

Ostatní hodnoty pro parametr t jsou již přípustné a nesplynou ani žádné dva body, ani žádné dvě přímky, což uvádím bez důkazu.

V práci [1] jsem dokázal pomocí eliptických souřadnic, že konfigurační body leží na kubické křivce bez singularit. Cílem tohoto článku je ukázat, že při speciální volbě parametru t (ovšem přípustné), může taková kubická křivka obsahovat i singulární bod a dokonce může být i rozložitelná.

Konfigurační body zřejmě splňují podmínku:

$$\text{(K)}\qquad (x_1 - x_2)\,.\,(x_1 - x_3)\,.\,(x_2 + x_3) + x_1x_3\,.\,(x_2 + x_3 - x_1)\,.\,(1 - s^2) = 0\,.$$

Vzhledem k podmínce (p) již snadno zjistíme, že kubika (K) má singulární body jen když je

$$\text{buď A)}\, s = -1\,,\quad \text{nebo}\quad \text{B)}\, s = 3\,.$$

V případě A), tedy $s = -1$, čili $t^2 + 1 = 0$ se kubika skládá ze tří přímek ($x_1 - x_2 = 0$, $x_1 - x_3 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$). Na první z nich leží body $Q-S-U-W$, na druhé body $V-T-P-R$ a zbývající čtveřice konfiguračních bodů $M-N-O-X$ leží na přímce třetí.

Je to případ konfigurace singulární, jak jsem se o ní zmínil v druhém odstavci tohoto článku, kdy na třech prímkách konfiguračních $S-U-W$, $R-T-V$, $M-N-O$ (viz schéma (s)) leží čtyři konfigurační body a kdy třemi body P, Q, X prochází pět konfiguračních přímek. Nad tělesem reálných čísel – bohužel – tuto zajímavou konfiguraci nelze nakreslit.

Neméně zajímavý je případ B. Víme, že nyní je $s = 3$, tedy $t^2 - 4t + 1 = 0$.

Pro usnadnění výpočtů je výhodné zavést nejprve substituci $t = v + 2$, čili $v^2 = 3$ a pak transformaci souřadnic:

$$x_1 = y_1 + v\,.\,y_2 + y_3\,,\quad x_2 = 3\,.\,y_3\,,\quad x_3 = 2\,.\,y_1 - y_3\,,\quad (v^2 = 3)$$

kterou kubika (K) přejde na tvar

$$(k) \qquad y_3 \cdot (y_1^2 + y_2^2) + y_1 \cdot (y_1^2 - 3y_2^2) = 0$$

a nové souřadnice konfiguračních bodů (b) jsou

$$M = (1, 1, 1), \quad N = (0, 1, 0), \quad O = (1, -1, 1); \quad P = (1, -v, 2),$$
$$Q = (1, v, 2), \quad R = (v, 1, 0), \quad S = (-v, 1, 0),$$
$$U = (1, 2 - v, 1 - v), \quad V = (1, v + 2, v + 1), \quad W = (1, -v - 2, v + 1),$$
$$T = (1, v - 2, 1 - v),$$
$$X = (1, 0, -1),$$
$$\text{kde ovšem} \quad v^2 = 3.$$

Z rovnice kubiky (k) je okamžitě patrno, že jediný singulární bod $I = (0, 0, 1)$ je uzel s imaginárními tečnami

$$y_1 + i \cdot y_2 = 0, \quad y_1 - i \cdot y_2 = 0$$

a po kratší námaze též zjistíme, že inflexní body jsou S, R, N.

Transformaci jsme prováděli také proto, abychom ukázali na velmi zajímavou vlastnost této kubiky v relaci s konfiguračními body.

Úmluva. *Nechť A, B jsou dva (nikoliv nutně navzájem různé) konfigurační body na kubice (k). Přímka AB protne kubiku (k) ještě v bodě C, což stručně zapíšeme $AB = C$. Jestliže body A, B splynou, pak AB nechť je tečna ke kubice v bodě A a C je bod tečnový (stručně $AA = C$). Jen v případě, že bod A je inflexní platí $AA = A$.*

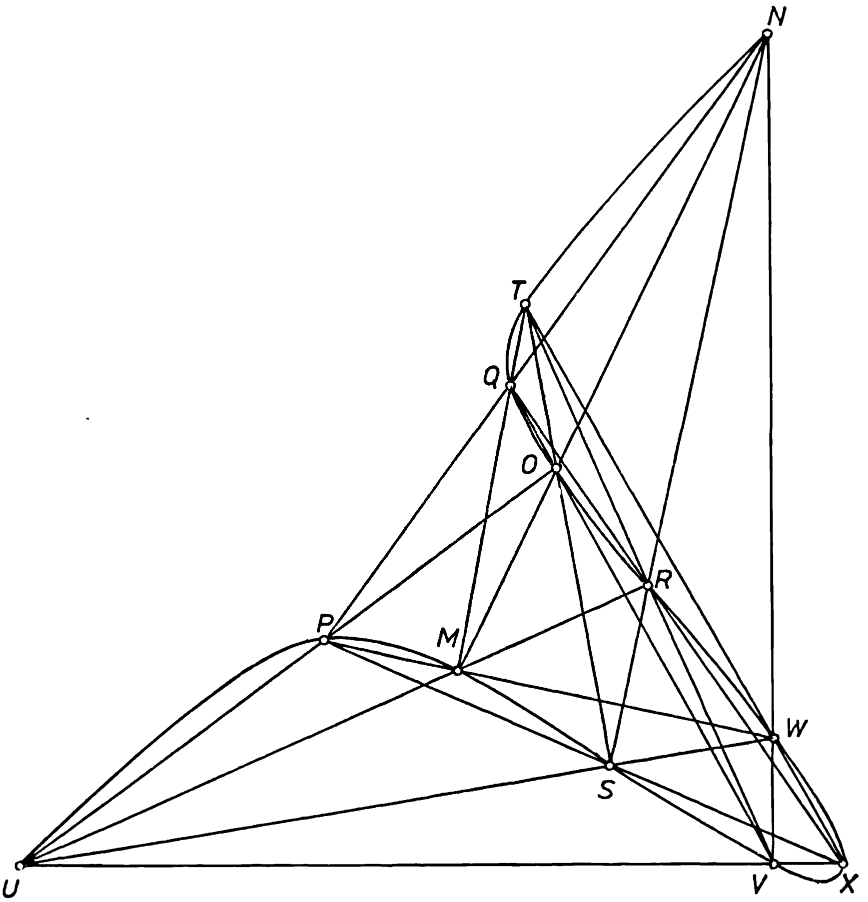
Tvrzení. *Bod C z předchozí úmluvy je vždy konfigurační.*

Důkaz: Z relace $AB = C$ plyne pochopitelně také $BC = A$ a $AC = B$. Rovnice kubiky (k) a její parciální derivace spolu se souřadnicemi dvanácti konfiguračních bodů nám snadno umožňují dokázat relace:

$$MM = X, \quad NN = N, \quad OO = X, \quad PP = R, \quad QQ = S, \quad RR = R,$$
$$SS = S, \quad TT = P, \quad UU = Q, \quad VV = P, \quad WW = Q, \quad XX = N,$$
$$MS = V, \quad NT = U, \quad RO = W.$$

K těmto patnácti relacím ovšem nutno ještě analogicky připojit relace mezi šestnácti konfiguračními přímkami. Z toho je patrno, že tímto způsobem je každý konfigurační bod spojen (ať již konfigurační, nebo nekonfigurační přímkou, nebo tečnou) se zbývajícími jedenácti body a na kubice je tak vytvořen grupoid.

Závěrem této práce ještě uvádím obrázek, na němž je tato konfigurace zachycena spolu s kubikou. Tři „cizí" přímky ($M-S-V$, $N-T-U$, $R-O-W$) ani dvanáct tečen v konfiguračních bodech jsem z důvodů přehlednosti úmyslně do tohoto obrázku nezakreslil.



Obr. 1

Literatura

[1] *V. Metelka:* Über gewisse ebene Konfigurationen $(12_4, 16_3)$, die auf den irreduziblen Kurven dritter Ordnung endliche Gruppoide bilden ... Čas. pěst. mat. *95* (1970), Praha, str. 23 a násl.
[2] *V. Metelka:* Über ebene Konfigurationen $(12_4, 16_3)$, die mit einer irreduziblen Kurve dritter Ordnung inzidieren. Čas. pěst. mat. *91*, 1966, str. 261 a násl.

Adresa autora: 461 17 Liberec, Hálkova 6 (Katedra matematiky VŠST).

Zusamenfassung

ÜBER ZWEI SPEZIELLE KONFIGURATIONEN $(12_4, 16_3)$

VÁCLAV METELKA, Liberec

Diese Arbeit ist eine natürliche Fortsetzung des Artikels [1], der den regulären Konfigurationen auf den kubischen Kurven ohne Singulärpunkte gewidmet ist.

In der vorliegenden Arbeit zeigt man, dass auch mindenstens eine spezielle Konfiguration existiert, die mit der reduziblen Kurve dritter Ordnung inzidiert. Es haldelt sich natürlich nicht um eine reguläre Konfiguration. Einen neuen interessanten Fall zeigt die gewisse reguläre Konfiguration, die auf der kubischen Kurve mit einem Singulärpunkt den endlichen Gruppoid mit zwölf Elementen bildet.