Časopis pro pěstování matematiky

Zbigniew Grande

Sur les fonctions cliquish

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 110 (1985), No. 3, 225--236

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/118226`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 110 * PRAHA 30. 8. 1985 * ČÍSLO 3

SUR LES FONCTIONS CLIQUISH

ZBIGNIEW GRANDE, Bydgoszcz

(Reçu le 3 août 1983)

Soient X, Y des espaces topologiques et M un espace métrique avec la métrique d. Une fonction $f: X \to M$ est dite „cliquish" (quasi-continue au point $x \in X$) lorsqu'il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ et pour tout entourage ouvert U du point x un ensemble ouvert non-vide $G \subset U$ tel que $d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ $(d(f(x_1), f(x)) < \varepsilon$ pour tous les points $x_1, x_2 \in G$. Si une fonction $f: X \to M$ est „cliquish" (quasi-continue) en tout point $x \in X$, elle est dite „cliquish" (quasi-continue) (v. [1], [10] et [9]).

Dans l'article [4] Fudali a démontré le théorème suivant:

Théorème 0 ([4], Th. 3) *Let X be a Baire space, Y be a space such that for each point $y \in Y$ there exists an open neighbourhood which satisfies the second countability axiom and let M be a metric space with a metric d. Further let $f: X \times Y \to M$ be a function such that for each $x \in X$ the section f_x is „cliquish" and for each $y \in Y$ the section f^y is quasi-continuous. Then f is cliquish.*

Nous démontrerons le suivant:

Théorème 1. *Soient X, Y, M les mèmes espaces que ceux dans le théorème 0 et $f: X \times Y \to M$ une fonction telle que toutes les sections $f_x(y) = f(x, y)$ soient „cliquish". Pour que la fonction f soit „cliquish", il faut et il suffit qu'elle satisfasse à la condition suivante:*

(a) *l'ensemble* $A_\varepsilon = \{(x, y) \in X \times Y: x \notin \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\{t \in X: d(f(t, y), f(x, y)) < \varepsilon\})\}$ *est non-dense, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$ (*Int A et Cl A *désignent, respectivement, l'intérieur et la fermeture de l'ensemble A et $f^y(x) = f(x, y)$).*

Preuve. *Nécessité.* Si une fonction $f: X \times Y \to M$ ayant ses sections f_x „cliquish" ne satisfait pas à la condition (a), il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble A_ε est dense dans un ensemble ouvert non-vide $H \subset X \times Y$. Soit $H_1 \subset H$ un ensemble ouvert non-vide. Il existe des ensembles ouverts non-vides $S \subset X$ et $T \subset Y$ tels que $S \times T \subset H_1$. Soit (x_1, y_1) un point de l'ensemble $(S \times T) \cap A_\varepsilon$. Puisque $(x_1, y_1) \in A_\varepsilon$, on a donc $x_1 \notin \mathrm{Cl}\,\mathrm{Int}\{t \in X: d(f(t, y_1), f(x_1, y_1)) < \varepsilon\})$ et par conséquent

$S \not\subset \{t \in X: d(f(t, y_1), f(x_1, y_1)) < \varepsilon\}$. Il existe donc un point $x_2 \in S$ tel que $d(f(x_2, y_1), f(x_1, y_1)) \geqq \varepsilon$. L'ensemble ouvert H_1 étant arbitraire, il existe dans tout sous-ensemble ouvert non-vide de l'ensemble H deux points (u, v) et (s, t) tels que $d(f(u, v), f(s, t)) \geqq \varepsilon$. Il en résulte que la fonction f n'est „cliquish" en aucun point de l'ensemble H et la preuve de la nécessité est achevée.

Suffisance. La démonstration de la suffisance est une modification de la preuve du théorème de Fudali [4]. Fixons un point $(p, q) \in X \times Y$ et démontrons que la fonction f est „cliquish" au point (p, q). Soient $H \subset X \times Y$ un entourage ouvert du point (p, q) et ε un nombre positif L'ensemble $H_1 = H - \mathrm{Cl}(A_{\varepsilon/8})$ étant non-vide, il existe des ensembles ouverts non-vides $U \subset X$ et $V \subset Y$ tels que $U \times V \subset H_1$. Sans restreindre la généralité on peut supposer qu'il existe un base dénombrable d'ensembles ouvertes G_n $(n = 1, 2, \ldots)$ dans l'ensemble V. Posons, pour $n = 1, 2, \ldots$,

$$K_n = \{x \in U: d(f(x, y_1), f(x, y_2)) < \varepsilon/8 \quad \text{pour tous les points} \quad y_1, y_2 \in G_n\}.$$

Remarquons que $U = \bigcup_n K_n$. En effet, d'une part tout ensemble $K_n \subset U$ pour $n = 1, 2, \ldots$, donc $\bigcup_n K_n \subset U$. D'autre part si $x \in U$, la section f_x est „cliquish" et il existe un ensemble ourvert non-vide G_{n_0} tel que $d(f(x. y_1), f(x, y_2)) < \varepsilon/8$ pour tous les points $y_1, y_2 \in G_{n_0}$. Il en résulte que $x \in K_{n_0}$ et par conséquent $U \subset \bigcup_n K_n$.

Puisque X est un espace de Baire, l'ensemble U est de deuxième catégorie et par conséquent il existe un indice naturel n_0 tel que l'ensemble K_{n_0} est de deuxième catégorie. Soit $U_1 \subset U$ un ensemble ouvert non-vide dans lequel l'ensemble $K_{n_0} \cap U_1$ est dense. Fixons un point $(a, b) \in U_1 \times G_{n_0}$. Puisque $A_{\varepsilon/8} \cap (U \times V) = 0$, il existe un ensemble ouvert non-vide $U_2 \subset U_1$ tel que $d(f(x_1, b), f(x_2, b)) < \varepsilon/8$ pour tous les points $x_1, x_2 \in U_2$. Fixons un point $(s, t) \in (U_2 \times \{b\}) \cup ((K_{n_0} \cap U_2) \times G_{n_0}) = T$ et un point $(x, y) \in U_2 \times G_{n_0}$. Puisque $A_{\varepsilon/8} \cap (U \times V) = 0$, il existe un ensemble ouvert non-vide $U_y \subset U_2$ tel que $d(f(x, y), f(x_1, y)) < \varepsilon/8$ pour tout point $x_1 \in U_y$. Mais l'ensemble $K_{n_0} \cap U_2$ est dense dans U_2, il existe donc un point $x_0 \in U_2 \cap K_{n_0}$. Il en résulte que

$$d(f(x, y), f(s, t)) \leqq d(f(x, y), f(x_0, y)) + d(f(x_0, y), f(x_0, b)) +$$
$$d(f(x_0, b), f(s, b)) + d(f(s, b), f(s, t)) < \varepsilon/8 + \varepsilon/8 + \varepsilon/8 + \varepsilon/8 = \varepsilon/2$$

et par conséquent, quels que soient les points (x, y), $(x', y') \in U_2 \times G_{n_0}$, on a

$$d(f(x', y'), f(x, y)) \leqq d(f(x', y'), f(s, t)) + d(f(s, t), f(x, y)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

L'ensemble ouvert non-vide $U_2 \times G_{n_0} \subset U \times V \subset H_1 \subset H$, la fonction f est donc „cliquish" au point (p, q) et la preuve est achevée.

Remarque 1. Le théorème 0 résulte directement du théorème 1. On a alors $A = 0$, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$.

Remarque 2. Il existe une fonction réelle $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ayant toutes ses sections f_x et f^y „cliquish", qui n'est pas „cliquish" elle-même, mais telle que l'ensemble

$$B(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon \text{la section } f^y \text{ n'est pas quasi-continue au point } x\}$$

est de première catégorie. Telle est, par exemple, la fonction indicatrice d'un ensemble dénombrable et dense $A \subset \mathbb{R}^2$ dont toutes les sections $A_x = \{y \in \mathbb{R}\colon (x, y) \in A\}$ et $A^y = \{x \in \mathbb{R}\colon (x, y) \in A\}$ ne contiennet qu'un point au plus.

Maintenant démontrons encore quelques conditions suffisantes pour qu'une fonction $f\colon X \times Y \to M$ soit „cliquish".

Définition 1. Soient S un ensemble d'indices et $f_s\colon X \to M$ $(s \in S)$ une famille de fonctions. On dit que les fonctions f_s $(s \in S)$ sont *„équicliquish" au point* $x \in X$, lorsqu'il existe pour tout entourage ouvert non-vide $U \subset X$ du point x et pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un ensemble ouvert non-vide $G \subset U$ tel que $d(f_s(x_1), f_s(x_2)) < \varepsilon$ pour tous les points $x_1, x_2 \in G$, quel que soit l'indice $s \in S$. Si les fonctions f_s $(s \in S)$ sont „équicliquish" en tout point $x \in X$, elles sont dites „équicliquish".

Théorème 2. *Si toutes les sections f_x d'une fonction $f\colon X \times Y \to M$ sont „équicliquish" et si toutes les sections f^y sont „cliquish", la fonction f est „cliquish".*

Preuve. Fixons un point $(p, q) \in X \times Y$, un entourage ouvert $U \subset X \times Y$ du point (p, q) et un nombre $\varepsilon > 0$. Il existe des ensembles ouverts $S \subset X$ et $T \subset Y$ tels que $p \in S$, $q \in T$ et $S \times T \subset U$. Les sections f_x étant „équicliquish", il existe un ensemble ouvert non-vide $T_1 \subset T$ tel que $d(f(x, y_1), f(x, y_2)) < \varepsilon/4$ pour tous les points (x, y), (x, y_2), où $x \in X$ et $y_1, y_2 \in T_1$. Fixons un point $y \in V$. La section f^y étant „cliquish", il existe un ensemble ouvert non-vide $S_1 \subset S$ tel que $d(f(x_1, y), f(x_2, y_1)) < \varepsilon/4$ pour tous les points $x_1, x_2 \in S_1$. Soient (u, v), (u_1, v_1) des points de l'ensemble ouvert $S_1 \times T_1$. On a

$$d(f(u, v), f(u_1, v_1)) \leqq d(f(u, v), f(u, y)) + d(f(u, y), f(u_1, y)) +$$
$$+ d(f(u_1, y), f(u_1, v_1)) < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 < \varepsilon\,.$$

Puisque $S_1 \times T_1 \subset U$, la preuve est achevée.

Théorème 3. *Supposons que l'espace topologique X soit tel qu'il existe pour tout point $x \in X$ un entourage ouvert satisfaisant au deuxième axiome de dénombrabilité. Toute fonction réelle $f\colon X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ayant toutes les sections f_x croissantes et toutes les sections f^y „cliquish" est „cliquish".*

Preuve. Fixons un point $(p, q) \in X \times \mathbb{R}$ et un nombre $\varepsilon > 0$. Soit $U \subset X \times \mathbb{R}$ un entourage ouvert du point (p, q). Il existe des ensembles ouverts $S \subset X$ et $T \subset \mathbb{R}$ tels que $p \in S$, $q \in T$ et $S \times T \subset U$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer qu'il existe dans l'ensemble S une base dénombrable d'ensembles ouverts G_n $(n =$

$= 1, 2, \ldots$). Toutes les sections f^y étant „cliquish", il existe pour tout $y \in T$ un ensemble $G_{n(y)} \subset S$ tel que $|f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \varepsilon/8$ pour tous les points $x_1, x_2 \in G_{n(y)}$. La famille $\{G_{n(y)}: y \in T\}$ étant dénombrable, il existe un indice naturel n_0 tel que l'ensemble $K = \{y \in T: n(y) = n_0\}$ est de deuxième catégorie. Soit $I \subset T$ un intervalle ouvert non-vide dans lequel l'ensemble $K \cap I$ est dense. Fixons un point $u_0 \in G_{n_0}$. La section f_{u_0} étant „cliquish", il existe un intervalle ouvert non-vide $J \subset I$ tel que $|f(u_0, y_1) - f(u_0, y_2)| < \varepsilon/8$ pour tous les points $y_1, y_2 \in J$. L'ensemble $G_{n_0} \times J \subset U$ est ouvert et, quels que soient les points (u, v), $(u_1, v_1) \in G_{n_0} \times J$ $(v \leqq v_1)$, il existe les nombres $z, z_1 \in J \cap K$ tels que $z \leqq v$ et $z_1 \geqq v_1$. Si $f(u_1, v_1) \geqq f(u, v)$, on a

$$\begin{aligned} |f(u_1, v_1) - f(u, v)| &= f(u_1, v_1) - f(u, v) \leqq f(u_1, z_1) - f(u, z) \leqq \\ &\leqq |f(u_1, z_1) - f(u_0, z_1)| + |f(u_0, z_1) - f(u_0, z)| + \\ &+ |f(u_0, z) - f(u, z)| < \varepsilon/8 + \varepsilon/8 + \varepsilon/8 < \varepsilon . \end{aligned}$$

Dans le cas contraire, si $f(u_1, v_1) < f(u, v)$, on a

$$\begin{aligned} |f(u_1, v_1) - f(u, v)| &= f(u, v) - f(u_1, v_1) \leqq f(u, z_1) - f(u_1, z) \leqq \\ &\leqq |f(u, z_1) - f(u_0, z_1)| + |f(u_0, z_1) - f(u_0, z)| + \\ &+ |f(u_0, z) - f(u_1, z)| < \varepsilon/8 + \varepsilon/8 + \varepsilon/8 < \varepsilon . \end{aligned}$$

Il en résulte que la fonction f est „cliquish" au point (p, q) et la preuve est achevée.

Exemple 1. Soient $X = Y = M = \mathbb{R}$ et T_d la topologie de densité. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ayant toutes ses sections A_x et A^y vides ou composées d'un élément et tel que la mesure intérieure de son complémentaire $\mathbb{R}^2 - A$ est égale à zéro (v. [12]). Admettons l'axiome de Martin et rangeons tous les nombres réels en une suite transfinie

$$x_1, x_2, \ldots, x_\alpha, \ldots, \quad \alpha < \Omega ,$$

où Ω désigne le prémier nombre ordinal indénombrable, $x_\beta \neq x_\alpha$ pour $\beta \neq \alpha$, $\alpha, \beta < \Omega$ et tous les ensembles $B_\alpha = \{x_\beta: \beta < \alpha\}$ sont de mesure zéro. Étant fixé $\alpha < \Omega$, il existe un ensemble $C_\alpha \supset B_\alpha$ du type G_δ et de mesure zéro. Il existe pour tout $\alpha < \Omega$ une fonction $g_\alpha: \mathbb{R} \to [0, 1]$ approximativement continue et telle que $g_\alpha(x) = 0$ pour $x \in C_\alpha - A^{x_\alpha}$ et $g_\alpha(x) > 0$ pour $x \notin C_\alpha - A^{x_\alpha}$. (v. [14]). Si $A^{x_\alpha} = \{t_\alpha\}$, posons $h_\alpha(x) = g_\alpha(x)/g_\alpha(t_\alpha)$ $(x \in \mathbb{R})$ et si $A^{x_\alpha} = 0$, posons $h_\alpha(x) = g_\alpha(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Soit $f(x, y) = h_\alpha(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $y = x_\alpha$. Toutes les sections f^y sont approximativement continues, donc continues par rapport à la topologie T_d et toutes les sections f_x sont „cliquish" relativement à la topologie T_d, puisque elles sont égales à zéro presque partout. Démontrons encore que la fonction f n'est „cliquish" par rapport à la topologie produit $T_d \times T_d$ en aucun point, En effet, fixons un ensemble $D \times E \neq 0$, oû $D, E \in T_d$. D'une part $A \cap (D \times E) \neq 0$, il existe donc un point $(u, v) \in D \times E$ tel que $f(u, v) = 1$ et d'autre part, il existe $w \in E$ tel que $f(u, w) = 0$.

Remarque 3. Si toutes les sections f_x d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont semi-équicontinues supérieurement en tout point $y \in \mathbb{R}$ (c'est-à-dire, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un nombre $\delta > 0$ tel que $f_x(t) - f_x(y) < \varepsilon$ pour tout $t \in (y - \delta, y + \delta)$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$) et si toutes les sections f^y sont „cliquish", la fonction f est aussi „cliquish". (v. [5] et [4]).

Exemple 2. Soient $X = Y = M = \mathbb{R}$ et T la topologie de tous les ensembles dans $\mathbb{R}$ de la forme $U - V$, où $U \subset \mathbb{R}$ est un ensemble ouvert et $V \subset R$ est un ensemble dénombrable. L'hypothèse du continu implique qu'il existe une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ telle que toutes les sections f_x sont semi-équicontinues supérieurement par rapport à la topologie T en tout point $y \in \mathbb{R}$ (c'est-à-dire, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un entourage ouvert $V_y \subset T$ du point y tel que $f_x(t) - f_x(y) < \varepsilon$ pour tout $t \in V_y$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$) et égales à zéro à l'exception d'ensemble dénombrable et toutes les sections f^y sont égales à 1 à l'exception d'ensemble dénombrable (v. [6]). On voit facilement que toutes les sections f^y sont „cliquish" par rapport à la topologie T. Remarquons encore que la fonction f n'est „cliquish" par rapport à la topologie $T \times T$ en aucun point. En effet, si $U \times V \subset T \times T$ et $U \times V \neq 0$ et $(x, y) \in U \times V$, il existe un point $v \in V$ et un point $u \in U$ tels que $f(x, v) = 0$ et $f(u, y) = 1$. Par conséquent, $(x, v) \in U \times V$, $(u, y) \in U \times V$ et $|f(x, v) - f(u, y)| = 1 > 1/2 = \varepsilon$.

Remarque 4. La famille de toutes les fonctions „cliquish" $f\colon R \to R$ par rapport à la topologie euclidienne est une algèbre de fonctions contenant toutes les fonctions quasi-continues.

Dans la preuve du théorème 4 nous profitons du lemme suivant:

Lemme. *Soit $m\colon R \to \mathbb{R}$ une fonction „cliquish" et telle que l'ensemble $m^{-1}(0)$ est dense et m soit continue en tout point x tel que $m(x) = 0$. Dans ces hypothèses, la fonction m est la somme de deux fonctions quasi-continues $h, k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Preuve. Désignons par A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}\colon \operatorname{osc} m(x) \geqq 2^{-n}\}$ et remarquons que tous les ensembles A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sont non-denses et fermés.

Rangeons tous les intervalles ouverts d'extrémités rationnelles en une suite $(I_n^1)_{n=1}^{\infty}$. Il existe une famille dénombrable $(J_n^{11k})_{k,n=1}^{\infty}$ d'intervalles fermés telle que:

les extrémités des intervalles J_n^{11k} $(k, n = 1, 2, \ldots)$ n'appartiennent pas à $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$;

$J_n^{11k} \cap J_s^{11r} = 0$ lorsque $n \neq s$ ou bien $k \neq r$;

$J_n^{11k} \cap A_1 = 0$ pour tous les indices $k, n = 1, 2, \ldots$;

étant fixé k, la suite d'intervalles (J_n^{11k}) est convergente vers l'ensemble A_1 (c'est-à-dire $\mathrm{Cl}(\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n^{11k}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n^{11k} \cup A_1)$ et si une sous-suite $(J_{n_i}^{11k})_i$ est convergente (dans la métrique de Hausdorff) vers un point x, on a $x \in A_1$;

$$\limsup_{k\to\infty} \{\varrho(x, A_1): x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n^{11k}\} = 0 .$$

Soit $g_1: R \to R$ une fonction continue en tout point $x \notin A_1$ et telle que $g_1(J_n^{11k}) = \mathrm{Cl}\, I_k^1$ pour $k, n = 1, 2, \ldots$ et $g_1(x) = m(x)$ lorsque $x \in A_1$.

L'ensemble $A_2 - A_1$ étant du type F_σ et de première catégorie, on a $A_2 - A_1 = \bigcup_k B_k^2$, où tous les ensembles B_k^2 sont fermés et disjoints deux à deux (v. [13]). Sans restreindre la généralité on peut supposer que $B_k^2 \subset \mathrm{Int}\, J_n^{11l}$ lorsque $B_k^2 \cap J_n^{11l} \neq 0$ $(k, l, n = 1, 2, \ldots)$. Il existe de nouveau une famille dénombrable $(J_n^{2lk})_{k,l,n=1}^{\infty}$ d'intervalles fermés telle que:

les extrémités des intervalles J_n^{2lk} $(k, l, n = 1, 2, \ldots)$ n'appartiennent pas à $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$;

$J_n^{2lk} \cap J_q^{2rs} = 0$ lorsque $l \neq r$ ou bien $k \neq s$ ou bien $n \neq q$;

$J_n^{2lk} \cap A_2 = 0$ pour tous les indices $k, l, n = 1, 2, \ldots$; étant fixés l et k, la suite d'intervalles $(J_n^{2lk})_{n=1}^{\infty}$ est convergente vers l'ensemble B_l^2;

si $B_l^2 \subset J_s^{11r}$, on a $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n^{2lk} \subset \mathrm{Int}\, J_s^{11r} (l, r, s = 1, 2, \ldots)$;

si $B_l^2 \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} J_n^{11k} = 0$, on a $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n^{2lk} \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n^{11k} = 0$;

étant fixé l, $\limsup_{k\to\infty} \{\varrho(x, A_2): x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n^{2lk}\} = 0$.

Rangeons tous les intervalles ouverts non-vides d'extrémités rationnelles contenus dans $(-1/2, 1/2)$ en une suite $(I_k^2)_{k=1}^{\infty}$. Soit $g_2: R \to [-1/2, 1/2]$ une fonction continue en tout point $x \notin A_2$ et telle que $g_2(J_n^{2lk}) = \mathrm{Cl}(I_k^2)$ pour $k, l, n = 1, 2, \ldots$, $g_2(x) = m(x)$ lorsque $x \in A_2 - A_1$ et $g_2(x) = 0$ lorsuqe $x \in A_1 \cup (R - \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Int}\, J_n^{2lk})$.

En général dans le r-ème pas $(r > 2)$ on a $A_r - A_{r-1} = \bigcup_k B_k^r$, où tous les ensembles B_k^r sont fermés et disjoints deux à deux et tels que $B_k^r \subset \mathrm{Int}\, J_n^{lst}$ lorsque $B_k^r \cap J_n^{stl} \neq 0$ $(l < r$ et $k, n, s, t = 1, 2, \ldots)$ et, par conséquent, il existe une famille dénombrable d'intervalles fermés telle que:

les extrémités des intervalles J_n^{rlk} $(k, l, n = 1, 2, \ldots)$ n'appartiennent pas à $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$;

$J_n^{rlk} \cap J_q^{rps} = 0$ lorsque $l \neq p$ ou bien $k \neq s$ ou bien $n \neq q$;

$J_n^{rlk} \cap A_r = 0$ pour tous les indices $k, l, n = 1, 2, \dots$;
étant fixé l et k, la suite d'intervalles $(J_n^{rlk})_{n=1}^{\infty}$ est convergente vers l'ensemble B_l^r;
étant fixé l, $\limsup_{k \to \infty} \{\varrho(x, A_r) : x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n^{rlk}\} = 0$; si $B_l^r \subset J_q^{tsp}$, on a $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n^{rlk} \subset$ $\subset \operatorname{Int} J_q^{tsp}$ $(t < r$ et $q, l, p, s = 1, 2, \dots)$;
si $B_l^r \cap \bigcup_{s=1}^{r-1} \bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n^{spk} = 0$, on a $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n^{rlk} \cap \bigcup_{s=1}^{\infty} \bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n^{spk} = 0$.

Rangeons tous les intervalles ouverts non-vides d'extrémités rationnelles contenus dans $(-2^{1-r}, 2^{1-r})$ en une suite $(I_k^r)_{k=1}^{\infty}$. Soit $g_r : R \to [-2^{1-r}, 2^{1-r}]$ une fonction continue en tout point $x \notin A_r$ et telle que $g_r(J_n^{rlk}) = \operatorname{Cl} I_k^r$ pour $k, l, n = 1, 2, \dots$, $g_r(x) = m(x)$ lorsque $x \in A_r - A_{r-1}$ et $g_r(x) = 0$ lorsque $x \in A_{r-1} \cup$ $\cup (R - \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Int} J_n^{rlk})$. Posons

$$h(x) = \sum_{r=1}^{\infty} g_r(x) \quad \text{pour} \quad x \in R\,.$$

La fonction h est continue en tout point $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, comme la somme de série uniformément convergent, de fonctions continues en ce point x. Démontrons que la fonction h est quasi-continue en tout point $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Fixons un point $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, un nombre $\varepsilon > 0$ et un entourage ouvert U du point x. Soit N le premier nombre naturel tel que $x \in A_N$ et $p > N$ un nombre naturel tel que $\sum_{k=p+1}^{\infty} 2^{1-k} < \varepsilon/4$. On a pour $t \in R$

$$h(t) = \sum_{k=1}^{N-1} g_k(t) + \sum_{k=N}^{p} g_k(t) + \sum_{k=p+1}^{\infty} g_k(t)\,.$$

Les fonctions g_k $(k = 1, \dots, N-1)$ étant continues au point x, il existe un entourage ouvert $V \subset U$ du point x tel que

$$\sum_{k=1}^{N-1} |g_k(t) - g_k(x)| < \varepsilon/8 \quad \text{pour tout} \quad t \in V\,.$$

On a aussi, pour tout $t \in R$,

$$\Big|\sum_{k=p+1}^{\infty} g_k(t)\Big| \leqq \sum_{k=p+1}^{\infty} |g_k(t)| \leqq \sum_{k=p+1}^{\infty} 2^{1-k} < \varepsilon/8\,.$$

Il existe un intervalle $I_K^N \subset (g_N(x) - \varepsilon/8,\ g_N(x) + \varepsilon/8)$ et un intervalle $J_s^{NLK} \subset V$ et tels que $g_N(J_s^{NLK}) = \operatorname{Cl} I_K^N$. Remarquons que $J_s^{NLK} - \bigcup_{t=N+1}^{p} \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n^{tlk}$ contient un intervalle ouvert non-vide W et que $g_k(t) = 0$ pour tout $t \in W \cup \{x\}$ et $k =$ $= N + 1, \dots, p$. On a donc pour $t \in W$

$$|h(t) - h(x)| = |\sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) - \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)| = |\sum_{k=1}^{\infty} (g_k(t) - g_k(x))| \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(t) - g_k(x)| = \sum_{k=1}^{N-1} |g_k(t) - g_k(x)| + |g_N(t) - g_N(x)| +$$

$$+ \sum_{k=N+1}^{p} |g_k(t) - g_k(x)| + \sum_{k=p+1}^{\infty} |g_k(t) - g_k(x)| \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{N-1} |g_k(t) - g_k(x)| + |g_N(t) - g_N(x)| + \sum_{k=N+1}^{p} |g_k(t) - g_k(x)| +$$

$$+ \sum_{k=p+1}^{\infty} |g_k(t)| + \sum_{k=p+1}^{\infty} |g_k(x)| < \varepsilon/8 + \varepsilon/8 + 0 + \varepsilon/8 + \varepsilon/8 = \varepsilon/2 < \varepsilon .$$

La fonction h est donc quasi-continue. De même on démontre que la fonction $k = m - h$ est quasi-continue et la preuve est achevée.

Théorème 4. *Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction „cliquish“ telle qu'il existe pour tout point de discontinuité x de la fonction f une suite (x_n) de ses points de continuité convergente vers x pour laquelle il existe une limite finite $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$, que nous désignons par $a(x)$. Dans ces hypothèses, la fonction f est la somme de trois fonctions quasi-continues $g, h, k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Preuve. Posons

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{lorsque } x \text{ est un point de continuité de } f \\ a(x) & \text{lorsque } x \text{ est un point de discontinuité de } f \end{cases}$$

(étant donné $x \in \mathbb{R}$, il peut exister beaucoup de nombres $a(x)$. Nous prenons l'un d'eux.)

Puisque la fonction f est „cliquish“, l'ensemble des points de continuité de la fonction f est résiduel. Il en résulte que la fonction g est quasi-continue. Comme, de plus, la fonction $m(x) = f(x) - g(x)$ est la somme de deux fonctions quasi continues $h, k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d'après le lemme, la preuve est donc achevée.

Théorème 5. *Toute fonction „cliquish“ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la somme de quatre fonctions quasi-continues $g, h, k, m: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Preuve. Soit A l'ensemble de tous les points $x \in \mathbb{R}$ tels que, quelle que soit la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de points de continuité de la fonction f convergente vers x et telle qu'il existe $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$, on a $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$ ou bien $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$. Il existe une suite d'intervalles fermés I_n dont les extrémités sont des points de continuité de la fonction f, disjoints deux à deux et tels que la fonction f est bornée sur tout intervalle I_n

$(n = 1, 2, \ldots)$ et l'union $\bigcup_n I_n$ est dense et l'ensemble $\mathbb{R} - \bigcup_n \operatorname{Int} I_n$ est parfait $(\operatorname{Int} I_n \neq 0$ pour $n = 1, 2, \ldots)$. Fixons dans tout ensemble $\operatorname{Int} I_n$ un point x_n qui est un point de continuité de la fonction f. Soit $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en tout point $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Int} I_n$ et telle que $g(x_n) = -f(x_n)$ et $g(\operatorname{Int} I_n) = \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Remarquons que $A \subset \mathbb{R} - \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. On a $f(x) = -g(x) + (f(x) + g(x))$. La fonction $-g$ est quasi-continue. La fonction $f + g$ satisfait à toutes les hypothèses du théorème 4. En effet, elle est continue en tout point de continuité de la fonction f appartenant à l'ensemble $\bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Int} I_n$, comme la somme de deux fonctions continues en ce point. Cela signifie que la fonction $f + g$ est „cliquish". De plus, $f(x_n) + g(x_n) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et f est bornée sur tout intervalle I_n $(n = 1, 2, \ldots)$, il existe donc pour tout point x qui est un point de discontinuité de la fonction $f + g$, une suite (y_n) de points de continuité de la fonction $f + g$ convergente vers x et telle que $\lim_{n \to \infty} f(y_n)$ existe et est finie. D'après le théorème 4 on a $f + g = h + k + m$, où les fonctions h, k, m sont quasi-continues. Cela termine la preuve.

Remarque 5. Il existe une fonction „cliquish" $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (même de première classe de Baire) qui n'est le produit d'aucun nombre fini de fonctions quasi-continues. En effet, posons.

$$f(x) = \begin{cases} q^{-1} & \text{lorsque } x \text{ est rationnel, } x = p/q \text{ et } (p, q) = 1 \\ 0 & \text{lorsque } x \text{ est irrationnel.} \end{cases}$$

Si $f = f_1 . f_2 \ldots f_n$, il existe un indice $k \leqq n$ tel que l'ensemble $\{x: f_k(x) = 0\}$ est de deuxième catégorie. Soient I un intervalle ouvert $(\neq 0)$ dans lequel l'ensemble $\{x: f_k(x) = 0\}$ est résiduel et $x \in I$ un nombre rationnel. Puisque $f_k(x) \neq 0$, la fonction f_k n'est pas quasi-continue au point x.

Remarque 6. Toute dérivée f' de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction „cliquish" en tant qu'une fonction de première classe de Baire. De même toute dérivée partielle f'_x ou bien f'_y d'une function continue $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction „cliquish". La dérivée partielle f'_x d'une fonction discontinue peut déjà ne pas être „cliquish". Par exemple, si la fonction $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas „cliquish", la dérivée partielle f'_x de la fonction $f(x, y) = x\, g(y)$ n'est pas „cliquish". Dans l'article [3] Davies a démontré que la dérivée partielle f''_{xy} d'une fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est toujours de deuxième classe de Baire et qu'il existe une dérivée $f''_{xy} = f''_{yx}$ d'une fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui n'est pas de première classe de Baire.

Il existe également une dérivée partielle $f''_{xy} = f''_{yx}$ d'une fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui n'est „cliquish" en aucun point. Telle est, par exemple, la fonction $g: \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ construite dans l'article [8], discontinue en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et telle que

$$g(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)\, g_n(y)\,, \quad \text{pour} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

où toutes les fonctions $g_n\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ sont approximativement continues et leurs supports sont disjoints deux à deux. On a

$$g(u, v) = f''_{xy}(u, v) = f''_{yx}(u, v)\,, \quad \text{où} \quad f(x, y) = \int_0^x \int_0^y g(u, v)\, du\, dv$$

(v. [3]) et la fonction g n'est „cliquish" en aucun point, car elle est discontinue en tout point. Cependant, toute fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dont toutes les sections f_x et f^y sont approximativement continues et continues presque partout est déjà „cliquish", puisque elle est ponctuellement discontinue (v. [8]).

En finissant, nous donnons une réponse partielle à la question suivante de Petruska:

Problème ([11], Problem 2). Is there a function f such that f'_y and f''_{xy} exist everywhere while f''_{yx} does not exist at any point?

Théorème 6. *Si une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est telle que les dérivées partielles f'_y et f''_{xy} existent partout et la dérivée parteille f''_{xy} est bornée dans un certain intervalle fermé $[a, b] \times [c, d]$, la dérivée partielle f''_{yx} existe et est égale à f''_{xy} presque partout dans l'intervalle $[a, b] \times [c, d]$.*

Preuve. En désignant par $I_{hk}(x, y)$ l'intervalle fermé $[x, x + h] \times [y, y + k]$ $(h, k \neq 0)$ on a pour presque tous les points $(x, y) \in (a, b) \times (c, d)$,

$$\text{(1)} \qquad \lim_{h,k\to 0} \int_{I_{hk}} \int_{(x,y)} f''_{xy}(u, v)\, du\, dv / m_2(I_{hk}(x, y)) = f''_{xy}(x, y)\,,$$

où m_2 désigne la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2$ (v. [2]). Soit A l'ensemble de tous les points $(x, y) \in (a, b) \times (c, d)$ auxquels l'égalité (1) est satisfaite. On a $m_2(A) = m_2([a, b] \times [c, d])$. Si $(x_0, y_0) \in A$, on a

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = \lim_{h,k\to 0} \int_{I_{hk}} \int_{(x_0,y_0)} f''_{xy}(u, v)\, du\, dv / m_2(I_{hk}(x_0, y_0)) =$$

$$= \lim_{h,k\to 0} \int_{x_0}^{x_0+h} \int_{y_0}^{y_0+k} f''_{xy}(u, v)\, du\, dv / hk =$$

$$= \lim_{h,k\to 0} \int_{x_0}^{x_0+h} \left[\int_{y_0}^{y_0+k} f''_{xy}(u, v)\, dv \right] du / hk = \lim_{h,k\to 0} \int_{x_0}^{x_0+h} (f'_x(u, y_0 + k) -$$

$$- f'_x(u, y_0))\, du / hk = \lim_{h,k\to 0} (f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) +$$

$$+ f(x_0 + h, y) + f(x_0, y_0))/hk = \lim_{h\to 0} h^{-1} [\lim_{k\to 0} (f(x_0 + h, y_0 + k) -$$

$$- f(x_0 + h, y_0))/k - \lim_{k\to 0} (f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0))/k] =$$

$$= \lim_{h\to 0} (f'_y(x_0 + h, y_0) - f'_y(x_0, y_0))/h\,.$$

Il en résulte que

$$\lim_{h\to 0} (f'_y(x_0 + h, y_0) - f'_y(x_0, y_0))/h$$

existe et est égale à $f''_{xy}(x_0, y_0)$, d'où il vient que $f''_{yx}(x_0, y_0)$ existe et est égale à $f''_{xy}(x_0, y_0)$ et la preuve est achevée.

Exemple 3. Posons

$$f(x, y) = \begin{cases} xy(x^2 \sin x^{-1} + y^2)/(x^2 + y^2) & \text{lorsque} \quad x \neq 0\,, \\ 0 \quad \text{lorsque} \quad x = 0\,. \end{cases}$$

Les dérivées partielles f''_{xy} et f''_{yx} existent en tout point (x, y) tel que $x \neq 0$. On a, de plus,

$$f'_x(0, y) = \lim_{x\to 0} (f(x, y) - f(0, y))/x = y$$

et

$$f'_y(x, 0) = \lim_{y\to 0} (f(x, y) - f(x, 0))/y = \begin{cases} x \sin x^{-1} & \text{lorsque} \quad x \neq 0\,, \\ 0 & \text{lorsque} \quad x = 0\,. \end{cases}$$

Il en résulte que $f''_{xy}(0, y) = 1$ et $f''_{yx}(0, 0)$ n'existe pas.

Ouvrages cités

[1] *W. W. Bledsoe:* Neighbourly functions. Proc. Amer. Math. Math. Soc. *3* (1952), 114—115.

[2] *A. M. Bruckner:* Differentiation of integrals. Amer. Math. Monthly *78* (1971), 1—51.

[3] *R. O. Davies:* On the Baire class of a mixed second derivative. Real Analys. Exchange *6* Nr 2 (1980—81).

[4] *Ł. A. Fudali:* On cliquish functions on product spaces. Math. Slovaca *33* (1983), 53—58.

[5] *Z. Grande:* Sur les classes de Baire des fonctions de deux variables. Fund. Math. *115* (1983), 119—125.

[6] *Z. Grande:* Semiéquicontinuité approximative et mesurabilité. Colloq. Math. *45* (1981), 133—135.

[7] *Z. Grande:* Sur la *r*-continuité des fonctions de deux variables. Demonstratio Math. *11* (1978), 937—945.

[8] *Z. Grande:* Sur les fonctions dont les sections sont approximativement continues. Zeszyty Naukowe WSP w Bydgoszczy, Problemy Matematyczne Nr 2 (1980), 7—15.

[9] *N. F. G Martin:* Quasi-continuos functions. Duke Math. J. *28* (1961), 39—43.

[10] *A. Neubrunová:* On quasicontinuous and cliquish functions. Časop. pěst. mat. *99* (1974), 109—114.

[11] *G. Petruska:* On a problem of M. Laczkovich. Real Analys. Exchange *6* (1979—80), 267—273.

[12] *Sierpiński:* Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement. Fund. Math. *1* (1920), 112—115.
[13] *W. Sierpiński:* Sur une propriété des ensembles F_6 linéaires. Fund. Math. *14* (1929), 216—220.
[14] *Z. Zahorski:* Sur la première dérivée. Trans. Amer. Math. Soc., *69* (1950), 1—54.

Adresse de l'auteur: Institut de Mathématiques, Université Pédagogique, Bydgoszcz, Pologne.