Rudolf Zimka

Гладкое преобразование аналитической системы дифференциальных уравнений к нормальной форме

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 110 (1985), No. 1, 1--12

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/118212`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 110 * PRAHA 29. 3. 1985 * ČÍSLO 1

ГЛАДКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

RUDOLF ZIMKA (РУДОЛЬФ ЗИМКА), Banská Bystrica

(Поступило в редакцию 21/XII. 1981 г.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi}{dt} = \Xi(\xi, t)\,, \tag{1}$$

где $\Xi(\xi, t)$ – $n + 2$-мерная вещественная вектор-функция векторного аргумента ξ той же размерности и скалярного аргумента t, непрерывная 2π-периодическая по t, аналитическая в области $\|\xi\| < \alpha$, причем $\Xi(0, t) \equiv 0$. Пусть два характеристических показателя системы в вариациях относительно состояния равновесия $\xi = 0$ равны $\pm i\lambda$, λ – иррационально, а остальные $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ имеют отрицательные вещественные части (чтобы получить из системы (1), используя теорию Флоке, опять вещественную систему, предполагается при существовании отрицательных мультипликаторов π-периодичность системы по t). Предполагается, что характеристические показатели $\pm i\lambda, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ удовлетворяют условию:

$$i\lambda(k - l) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq q}}^{n} m_j\varkappa_j - \varkappa_q \tag{2}$$

не является целочисленным множителем $i(= \sqrt{-1})$ для никаких $q = 1, \ldots, n$ и никаких целых неотрицательных чисел k, l, m_j таких, что $k + l + m_1 + \ldots \ldots + m_n \geqq 2$ и $k + l \leqq N$, где N – достаточно большое натуральное число, которое будет определено позже.

Система (1) при условии (2) может быть приведена линейным неособым преобразованием к виду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= i\lambda x + X(x, y, z_1, \ldots, z_n, t) \\ \dot{y} &= -i\lambda y + Y(x, y, z_1, \ldots, z_n, t) \\ \dot{z}_l &= \varkappa_l z_l + Z_l(x, y, z_1, \ldots, z_n, t)\,, \quad l = 1, \ldots, n\,, \end{aligned} \tag{3}$$

где X, Y, Z_l – ряды по степеням $x, y, z_1, \ldots, z_n$ с непрерывными 2π-периодическим коэффициентами, сходящиеся в некоторой крестности начала координат, и не содержащие в своих разложениях членов ниже 2-го измерения.

Поскольку система (1) вещественная, то можно считать, что $y = \bar{x}$ (черта – знак комплексной сопряженности) и Y – комплексно сопряженное к X, т. е. $Y = \bar{X}$.

С помощью метода неопределенных коэффициентов доказывается

Лемма 1. *Существует формальное преобразование*

$$
\begin{aligned}
(4)\qquad x &= u + \varphi(u, v, w_1, \ldots, w_n, t) \\
y &= v + \bar{\varphi}(u, v, w_1, \ldots, w_n, t) \\
z_l &= w_l + \psi_l(u, v, w_1, \ldots, w_n, t)\,, \quad l = 1, \ldots, n\,,
\end{aligned}
$$

где φ, ψ_l – формальные ряды по степеням $u, v, w_1, \ldots, w_n$ с 2π – периодическими коэффициентами по t без свободных и линейных членов, приводящее систему (3) *к виду*

$$
\begin{aligned}
(5)\qquad \dot{u} &= \mathrm{i}\lambda u + u\, H(u, v) \\
\dot{v} &= -\mathrm{i}\lambda v + v\, \bar{H}(u, v) \\
\dot{w}_l &= \varkappa_l w_l + \Theta_l(u, v, w_1, \ldots, w_n, t)\,, \quad l = 1, \ldots, n\,,
\end{aligned}
$$

где H – ряд относительно u, v с постоянными коэффициентами, Θ_l – ряды относительно $u, v, w_1, \ldots, w_n$ (относительно $w_1, \ldots, w_n$ – полиномы) с 2π – периодическими коэффициентами, $\Theta_l(u, v, 0, \ldots, 0, t) \equiv 0$.

Система (5) называется нормальной формой и преобразование (4) нормализующим преобразованием.

В работе рассматривается алгебраический случай, т. е. случай удовлетворяющий условию $\operatorname{Re} H = g(uv)^k + \ldots$, $g \neq 0$.

В. В. Басов в [1] показал, что в алгебраическом случае преобразования типа (4) расходятся. Для комплексных аналитических систем расходимость нормализующих преобразований была показана А. Д. Брюноом в [4].

В настоящей работе будет показано, что гладкое преобразование системы (3) к нормальной форме существует.

Система (1) была рассмотрена также в работах [2], [5–6]. В [2] показано существование гладкого преобразования системы (3) к нормальной форме на инвариантой поверхности. В работах [5–6] показано существование гладкого преобразования системы (3) к квазинормальной форме. В упомянутых работах не требовалось выполнение условия (2).

Лемма 2. *Пусть N — натуральное число, которое выступает в условии* (2). *Существует преобразование*

$$x = u + \varphi(u, v, w_1, \ldots, w_n, t)$$
$$y = v + \bar{\varphi}(u, v, w_1, \ldots, w_n, t) \tag{6}$$
$$z_l = w_l + \psi_l(u, v, w_1, \ldots, w_n, t), \quad l = 1, \ldots, n,$$

где φ, ψ_l — ряды по степеням $u, v, w_1, \ldots, w_n$ с непрерывными 2π — периодическими коэффициентами без свободных и линейных членов, сходящиеся в некоторой окрестности начала, причем их разложения по u, v не содержат членов выше $2N$-го измерения, переводящее систему (3) *в систему*

$$\dot{u} = \mathrm{i}\lambda u + u\, H(u, v) + U(u, v, w_1, \ldots, w_n, t)$$
$$\dot{v} = -\mathrm{i}\lambda v + v\, \bar{H}(u, v) + \bar{U}(u, v, w_1, \ldots, w_n, t) \tag{7}$$
$$\dot{w}_l = \varkappa_l w_l + \Theta_l(u, v, w_l) + W_l(u, v, w_1, \ldots, w_n, t), \quad l = 1, \ldots, n,$$

где $H = \sum_{\sigma=1}^{N-1} \eta_\sigma (uv)^\sigma$, $\Theta_l = w_l \sum_{\sigma=1}^{N-1} \vartheta_\sigma^{(l)} (uv)^\sigma$, $\eta_\sigma, \vartheta_\sigma^{(l)}$ — *постоянные коэфициенты, U, W_l — ряды относительно $u, v, w_1, \ldots, w_n$ с непрерывными 2π — периодическими коэффициентами, причем их разложения по u, v не содержат членов ниже $2N + 1$ -го измерения.*

Существование формального преобразования (6) доказывается стандартным построением метода неопределенных коэффициентов, сходимость рядов φ, ψ_l — методом мажорант Коши. Применение упомянутых методов при доказательстве утверждения аналогичного типа можно найти напр. в книге [3] (Теорема 1 в Дополнении 2). Доказательство леммы 2 полностью проведено в [7].

Выполним теперь в системе (3) преобразование (6). Тогда из (7) при замене $u = r_0 \exp\{\mathrm{i}\varphi_0\}$, $v = r_0 \exp\{-\mathrm{i}\varphi_0\}$, $w_j = w_{j0}$ $(j = 1, \ldots, n)$ получим систему

$$\dot{r}_0 = Q(r_0) + R_0(r_0, \varphi_0, w_{10}, \ldots, w_{n0}, t)$$
$$\dot{\varphi}_0 = P(r_0) + \Phi_0(r_0, \varphi_0, w_{10}, \ldots, w_{n0}, t) \tag{8}$$
$$\dot{w}_{l0} = \varkappa_l w_{l0} + Q_l(r_0, w_{l0}) + \Psi_{l0}(r_0, \varphi_0, w_{10}, \ldots, w_{n0}, t), \quad l = 1, \ldots, n,$$

где $Q = g r_0^k + \ldots$ $(3 \leqq k \leqq 2N - 1)$, $P = \lambda + a_l r_0^l + \ldots$ $(2 \leqq l \leqq 2N - 2)$ — полиномы с постоянными вещественными коэффициентами, $Q_l = q_l(r_0)\, w_{l0}$, $q_l(r_0) = a_m^{(l)} r_0^m + \ldots$ — полиномы с постоянными коэффициентами $(2 \leqq m \leqq \leqq 2N - 2)$, R_0, Φ_0, Ψ_{l0} — 2π-периодические по t, φ_0 функции, непрерывные по t, аналитические в области $\mathscr{B}_0$:

$$|r_0| < \Delta, \quad |w_{j0}| < \Delta \ (j = 1, \ldots, n), \quad |\mathrm{Im}\, \varphi_0| < \Omega \ (\Delta > 0, \ \Omega > 0),$$

причем в своих разложениях по r_0 не содержат членов ниже $2N$-го измерения.

Считаем, что ряды R_0, Φ_0, Ψ_{l0} ($l = 1, \ldots, n$) сходятся при $|r_0| \leqq 1$ и при таких r_0

$$|R_0|, |\Phi_0|, |\Psi_{l0}| < 1, \quad l = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Выполнения условия (9) всегда можно добится линейной заменой переменной r_0.

Дополнительно предположим, что R_0, Φ_0, Ψ_{l0} ($l = 1, \ldots, n$) также аналитичны по переменной t в области $|\mathrm{Im}\, t| < \Omega$.

Всюду в дальнейшем рассматриваются только вещественные аналитические функции с одним и тем же периодом 2π по угловой переменной φ и времени t.

Теорема. *Существует непрерывно дифференцируемое по* r_0, *аналитическое по* $\varphi_0, w_{10}, \ldots, w_{n0}, t$ *в области* $\mathscr{B}$:

$$0 \leqq r_0 < \gamma, \ |w_{j0}| < \gamma \ (j = 1, \ldots, n), \quad |\mathrm{Im}\, \varphi_0| < \delta, \ |\mathrm{Im}\, t| < \delta \ (\gamma > 0, \ \delta > 0)$$

преобразование $T: (r_0, \varphi_0, w_{10}, \ldots, w_{n0}) \to (r, \varphi, w_1, \ldots, w_n)$, *приводящее систему* (8) *к нормальной форме*

$$\begin{aligned} \dot{r} &= Q(r) \\ \dot{\varphi} &= P(r) \\ \dot{w}_l &= \varkappa_l w_l + Q_l(r, w_l), \quad l = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Доказательство. При конструкции искомого преобразования T используется метод последовательных приближений. Этот метод применялся также в работах [2], [5–6]. В качестве нулевого приближения примем систему (8), Предположим, что уже проделано s преобразований S_i ($i = 0, 1, \ldots, s-1$). результатом которых является преобразование $T_s = S_0 S_1 \ldots S_{s-1}$ (T_0 — тождественное преобразование):

$$\begin{aligned} r_s &= r_0 + F_s(r_0, \varphi_0, w_{10}, \ldots, w_{n0}, t) \\ \varphi_s &= \varphi_0 + G_s(r_0, \varphi_0, w_{10}, \ldots, w_{n0}, t) \\ w_{ls} &= w_{l0} + H_{ls}(r_0, \varphi_0, w_{10}, \ldots, w_{n0}, t), \quad l = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{10}$$

переводящее систему (8) в систему

$$\begin{aligned} \dot{r}_s &= Q(r_s) + R_s(r_s, \varphi_s, w_{1s}, \ldots, w_{ns}, t) \\ \dot{\varphi}_s &= P(r_s) + \Phi_s(r_s, \varphi_s, w_{1s}, \ldots, w_{ns}, t) \\ \dot{w}_{ls} &= \varkappa_l w_{ls} + Q_l(r_s, w_{ls}) + \Psi_{ls}(r_s, \varphi_s, w_{1s}, \ldots, w_{ns}, t), \quad l = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{11_s}$$

В дальнейшем используются следующие последовательности чисел и областей:

$$N_s = 2N_{s-1}, \ s = 1, 2, \ldots \ (N_0 = N)$$

$$\mathfrak{M}_s^{(p)} = \{(r_s = x_s + \mathrm{i} y_s, \varphi_s, w_{1s}, \ldots, w_{ns}, t) : 0 < x_s < \Delta_s^{(0)},$$

$$|y_s| < x_s^{1/2N_s}, \ |w_{js}| < \Delta_s^{(p)} \ (j = 1, \ldots, n), \quad |\mathrm{Im}\, \varphi_s| < \Omega_s^{(p)}, \ |\mathrm{Im}\, t| < \Omega_s^{(p)}\},$$

$$\Delta_s^{(p)} = \frac{\Delta}{4}\left(2 + \frac{1}{s+1} - \frac{p}{4(s+1)(s+2)}\right), \quad \Omega_s^{(p)} = \frac{\Omega}{4}\left(2 + \frac{1}{s+1} - \right.$$

$$\left. - \frac{p}{4(s+1)(s+2)}\right),$$

$$p = 0, 1, 2, 3\,; \quad s = 0, 1, 2, \ldots .$$

Предположим, что для преобразования T_s и функций R_s, Φ_s, Ψ_{ls} в системе (11_s) имеет место:

I_s: Функции F_s, G_s, H_{ls} ($s \geqq 1$) аналитичны в некоторой области $\mathscr{B}_s \subset \mathfrak{M}_0^{(0)} \subset \mathscr{B}_0$. Преобразование T_s имеет обратное на $\mathfrak{M}_s^{(0)}$, причем $T_s^{-1}\mathfrak{M}_s^{(0)} \subset \mathscr{B}_s$. В области $\mathscr{B}_s$ справедливы неравенства:

$$(12_s) \qquad |F_s|, |G_s|, |H_{ls}|, \left|\frac{\partial F_s}{\partial r_0}\right|, \left|\frac{\partial G_s}{\partial r_0}\right|, \left|\frac{\partial H_{ls}}{\partial r_0}\right| < \sum_{i=0}^{s-1} \Delta^{N_i}, \quad l = 1, \ldots, n.$$

II_s: Функции R_s, Φ_s, Ψ_{ls} ($s \geqq 0$) аналитичны в $\mathfrak{M}_s^{(0)}$, где справедливы неравенства:

$$(13_s) \qquad |R_s|, |\Phi_s|, |\Psi_{ls}| < |r_s|^{N_s[1 + 1/(s+1)]}, \quad l = 1, \ldots, n.$$

В доказательстве теоремы используется следующая индуктивная лемма.

Лемма 3. *Если выполняются условия* $\mathrm{I}_s - \mathrm{II}_s$, *то существует преобразование*

$$\begin{aligned} r_{s+1} &= r_0 + F_{s+1}(r_0, \varphi_0, w_{10}, \ldots, w_{n0}, t) \\ \varphi_{s+1} &= \varphi_0 + G_{s+1}(r_0, \varphi_0, w_{10}, \ldots, w_{n0}, t) \\ w_{l,s+1} &= w_{l0} + H_{l,s+1}(r_0, \varphi_0, w_{10}, \ldots, w_{n0}, t), \quad l = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

приводящее систему (8) *к виду*

$$(14_{s+1}) \qquad \begin{aligned} \dot r_{s+1} &= Q(r_{s+1}) + R_{s+1}(r_{s+1}, \varphi_{s+1}, w_{1,s+1}, \ldots, w_{n,s+1}, t) \\ \dot\varphi_{s+1} &= P(r_{s+1}) + \Phi_{s+1}(r_{s+1}, \varphi_{s+1}, w_{1,s+1}, \ldots, w_{n,s+1}, t) \\ \dot w_{l,s+1} &= \varkappa_l w_{l,s+1} + Q_l(r_{s+1}, w_{l,s+1}) + \Psi_{l,s+1}(r_{s+1}, \varphi_{s+1}, w_{1,s+1}, \ldots \\ &\quad \ldots, w_{n,s+1}, t), \quad l = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

причем выполняются условия $\mathrm{I}_{s+1} - \mathrm{II}_{s+1}$.

Доказательство леммы 3. В системе (11_s) сделаем замену S_s:

$$(15) \qquad \begin{aligned} r_{s+1} &= r_s + f_s(r_s, \varphi_s, w_{1s}, \ldots, w_{ns}, t) \\ \varphi_{s+1} &= \varphi_s + g_s(r_s, \varphi_s, w_{1s}, \ldots, w_{ns}, t) \\ w_{l,s+1} &= w_{ls} + h_{ls}(r_s, \varphi_s, w_{1s}, \ldots, w_{ns}, t), \quad l = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

с целью получить систему (14_{s+1}). Пусть функции f_s, g_s, h_{ls} ($l = 1, \ldots, n$) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \frac{\partial f_s}{\partial r_s} Q + \frac{\partial f_s}{\partial \varphi_s} P + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_s}{\partial w_{js}} (\varkappa_j w_{js} + Q_j) = Q' f_s - R_s \tag{16}$$

$$\frac{\partial g_s}{\partial t} + \frac{\partial g_s}{\partial r_s} Q + \frac{\partial g_s}{\partial \varphi_s} P + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_s}{\partial w_{js}} (\varkappa_j w_{js} + Q_j) = P' f_s - \Phi_s$$

$$\frac{\partial h_{ls}}{\partial t} + \frac{\partial h_{ls}}{\partial r_s} Q + \frac{\partial h_{ls}}{\partial \varphi_s} P + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_{ls}}{\partial w_{js}} (\varkappa_j w_{js} + Q_j) = \varkappa_l h_{ls} +$$

$$+ \frac{\partial Q_l}{\partial r_s} f_s + \frac{\partial Q_l}{\partial w_{ls}} h_{ls} - \Psi_{ls}, \quad l = 1, \ldots, n .$$

Тогда функции R_{s+1}, Φ_{s+1}, $\Psi_{l,s+1}$ в системе (14_{s+1}) определяются уравнениями:

$$R_{s+1}(r_s + f_s, \varphi_s + g_s, w_{1s} + h_{1s}, \ldots, w_{ns} + h_{ns}, t) = \tag{17}$$

$$= Q(r_s) - Q(r_s + f_s) + Q'(r_s) f_s + \frac{\partial f_s}{\partial r_s} R_s + \frac{\partial f_s}{\partial \varphi_s} \Phi_s + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_s}{\partial w_{js}} \Psi_{js},$$

$$\Phi_{s+1}(r_s + f_s, \varphi_s + g_s, w_{1s} + h_{1s}, \ldots, w_{ns} + h_{ns}, t) =$$

$$= P(r_s) - P(r_s + f_s) + P'(r_s) f_s + \frac{\partial g_s}{\partial r_s} R_s + \frac{\partial g_s}{\partial \varphi_s} \Phi_s + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_s}{\partial w_{js}} \Psi_{js},$$

$$\Psi_{l,s+1}(r_s + f_s, \varphi_s + g_s, w_{1s} + h_{1s}, \ldots, w_{ns} + h_{ns}, t) =$$

$$= Q_l(r_s, w_{ls}) - Q_l(r_s + f_s, w_{ls} + h_{ls}) + \frac{\partial Q_l(r_s, w_{ls})}{\partial r_s} f_s +$$

$$+ \frac{\partial Q_l(r_s, w_{ls})}{\partial w_{ls}} h_{ls} + \frac{\partial h_{ls}}{\partial r_s} R_s + \frac{\partial h_{ls}}{\partial \varphi_s} \Phi_s + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_{ls}}{\partial w_{js}} \Psi_{js}, \quad l = 1, \ldots, n .$$

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая соответствует первому уравнению (16), можно в области $\mathfrak{M}_s^{(0)}$ для достаточно малого Δ представить в виде:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r_s} = \frac{1}{Q} \tag{18}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_s}{\mathrm{d}r_s} = \frac{P}{Q}$$

$$\frac{\mathrm{d}w_{js}}{\mathrm{d}r_s} = \frac{\varkappa_j}{Q} w_{js} + \frac{Q_j}{Q}$$

$$\frac{\mathrm{d}f_s}{\mathrm{d}r_s} = \frac{Q'}{Q} f_s - \frac{R_s}{Q}, \quad j = 1, \ldots, n .$$

Общее решение первых $n + 2$ уравнений в (18) запишем в виде:

$$t(r_s) = \int \frac{1}{Q} \mathrm{d}r_s + c_t = u(r_s) + c_t$$

$$\varphi_s(r_s) = \int \frac{P}{Q} \mathrm{d}r_s + c_\varphi = v(r_s) + c_\varphi$$

$$w_{js}(r_s) = c_j \exp\left\{\int \frac{\varkappa_j + q_j}{Q} \mathrm{d}r_s\right\}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Рассмотрим сначала случай, когда состояние равновесия $x = y = z_1 = \ldots$ $\ldots = z_n = 0$ в системе (3) асимптотически устойчивое, т. е. когда $g < 0$. Тогда последнему уравнению в (18) удовлетворяет функция

(19) $$f_s(r_s, \varphi_s(r_s), w_{1s}(r_s), \ldots, w_{ns}(r_s), t(r_s)) =$$
$$= -Q(r_s) \int_0^{r_s} \frac{R_s(z, \varphi_s(z), w_{1s}(z), \ldots, w_{ns}(z), t(z))}{Q^2(z)} \mathrm{d}z.$$

Если вместо $\varphi_s(z)$, $t(z)$, $w_{1s}(z), \ldots, w_{ns}(z)$ в (19) подставим выражения

(20) $$\varphi_s(z) = \varphi_s + v(z) - v(r_s)$$
$$t(z) = t + u(z) - u(r_s)$$
$$w_{js}(z) = w_{js} \exp\left\{\int_{r_s}^{z} \frac{\varkappa_j + q_j}{Q} \mathrm{d}\varrho\right\}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

то функция f_s будет удовлетворять системе (16).

Системе (16) удовлетворяет также функция

(21) $$g_s = \int_0^{r_s} [P'(z) f_s(z, \varphi_s(z), w_{1s}(z), \ldots, w_{ns}(z), t(z)) -$$
$$- \Phi_s(z, \varphi_s(z), w_{1s}(z), \ldots, w_{ns}(z), t(z))] \frac{1}{Q} \mathrm{d}z.$$

Функции h_{ls} $(l = 1, \ldots, n)$ должны удовлетворять системе

$$Q \frac{\mathrm{d}h_{ls}}{\mathrm{d}r_s} = \varkappa_l h_{ls} + \frac{\partial Q_l}{\partial r_s} f_s + \frac{\partial Q_l}{\partial w_{ls}} h_{ls} - \Psi_{ls}, \quad l = 1, \ldots, n,$$

которую, учитывая характер Q_l, запишем в виде

$$\frac{\mathrm{d}h_{ls}}{\mathrm{d}r_s} = \frac{\varkappa_l + q_l}{Q} h_{ls} + \frac{\Psi_{ls}^{(*)}}{Q},$$

где

$$\Psi_{ls}^{(*)} = \frac{\partial Q_l}{\partial r_s} f_s - \Psi_{ls}, \quad l = 1, \ldots, n.$$

Представим функции $\Psi_{ls}^{(*)}$ в виде

$$\Psi_{ls}^{(*)} = \sum_{m_1,\ldots,m_n} \Psi_{ls}^{(m_1,\ldots,m_n)}(r_s, \varphi_s, t)\, w_{1s}^{m_1} \ldots w_{ns}^{m_n} = \Psi_{ls}^{(1)} + \Psi_{ls}^{(2)}, \tag{22}$$

где $\Psi_{ls}^{(1)}$ состоит из членов разложения (22) измерения $m_1 + \ldots + m_n$, которые удовлетворяют одному из следующих двух условий:

а) $\sum_{i=1}^{n} m_i \operatorname{Re} \varkappa_i > \operatorname{Re} \varkappa_l$,

б) $\sum_{i=1}^{n} m_i \operatorname{Re} \varkappa_i = \operatorname{Re} \varkappa_l$, причем полином

$$q_l(r) - \sum_{i=1}^{n} m_i\, q_i(r) = c_m r^m + c_{m+1} r^{m+1} + \ldots \quad (2 \leqq m \leqq 2N - 2) \tag{23}$$

имеет коэффициент с отличной от нуля вещественной частью и для первого из таких коэффициентов c_p справедливо: $\operatorname{Re} c_p < 0$, $p < k - 1$, где k-наименьшая степень полинома

$$Q = g r^k + \ldots .$$

Функции h_{ls} $(l = 1, \ldots, n)$ возьмем в виде $h_{ls} = h_{ls}^{(1)} + h_{ls}^{(2)}$, где $h_{ls}^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ – решение уравнения

$$\frac{\mathrm{d}h_{ls}^{(i)}}{\mathrm{d}r_s} = \frac{\varkappa_l + q_l}{Q} h_{ls}^{(i)} + \frac{\Psi_{ls}^{(i)}}{Q}.$$

Последним уравнениям удовлетворяют функции

$$h_{ls}^{(1)} = \int_{\Delta_s(0)}^{r_s} \exp\left(\int_z^{r_s} \frac{\varkappa_l + q_l}{Q} \mathrm{d}\varrho\right) \frac{\Psi_{ls}^{(1)}(z, \varphi_s(z), w_{1s}(z), \ldots, w_{ns}(z), t(z))}{Q} \mathrm{d}z,$$

$$h_{ls}^{(2)} = \int_0^{r_s} \exp\left(\int_z^{r_s} \frac{\varkappa_l + q_l}{Q} \mathrm{d}\varrho\right) \frac{\Psi_{ls}^{(2)}(z, \varphi_s(z), w_{1s}(z), \ldots, w_{ns}(z), t(z))}{Q} \mathrm{d}z. \tag{24}$$

Если состояние равновесия $x = y = z_1 = \ldots = z_n = 0$ в системе (3) неустойчивое, что соответствует наличию положительной постоянной g, то решение $f_s, g_s, h_{1s}, \ldots, h_{ns}$ системы (16) возьмем в виде

$$f_s = f_s^{(1)} + f_s^{(2)}, \quad g_s = g_s^{(1)} + g_s^{(2)}, \quad h_{ls} = h_{ls}^{(1)} + h_{ls}^{(2)}, \quad l = 1, \ldots, n,$$

где функции $f_s^{(1)}, f_s^{(2)}, g_s^{(1)}, g_s^{(2)}, h_{ls}^{(1)}, h_{ls}^{(2)}$ определены отношениями (25):

$$f_s^{(1)} = -Q(r_s) \int_0^{r_s} \frac{R_s(z, \varphi_s(z), 0, \ldots, 0, t(z))}{Q^2} \mathrm{d}z,$$

$$f_s^{(2)} = -Q(r_s) \int_{\Delta_s(0)}^{r_s} \frac{R_s^{(*)}(z, \varphi_s(z), w_{1s}(z), \ldots, w_{ns}(z), t(z))}{Q^2} \mathrm{d}z,$$

$$g_s^{(1)} = \int_0^{r_s} [P'(z) f_s(z, \varphi_s(z), 0, \ldots, 0, t(z)) - \Phi_s(z, \varphi_s(z), 0, \ldots, 0, t(z))] \frac{1}{Q} \mathrm{d}z\,,$$

$$g_s^{(2)} = \int_{\Delta_s(0)}^{r_s} [P'(z) f_s^{(*)} (z, \varphi_s(z), w_{1s}(z_1), \ldots, w_{ns}(z), t(z)) -$$

$$- \Phi_s^{(*)}(z, \varphi_s(z), w_{1s}(z), \ldots, w_{ns}(z), t(z))] \frac{1}{Q} \mathrm{d}z\,,$$

$$h_{ls}^{(1)} = \int_{\Delta_s(0)}^{r_s} \exp\left(\int_z^{r_s} \frac{\varkappa_l + q_l}{Q} \mathrm{d}\varrho\right) \frac{\Psi_{ls}^{(1)}(z, \varphi_s(z), w_{1s}(z), \ldots, w_{ns}(z), t(z))}{Q} \mathrm{d}z\,,$$

$$h_{ls}^{(2)} = \int_0^{r_s} \exp\left(\int_z^{r_s} \frac{\varkappa_l + q_l}{Q} \mathrm{d}\varrho\right) \frac{\Psi_{ls}^{(2)}(z, \varphi_s(z), w_{1s}(z), \ldots, w_{ns}(z), t(z))}{Q} \mathrm{d}z\,,$$

где $\varphi^{(*)} = \varphi(z, \varphi_s(z), w_{1s}(z), \ldots, w_{ns}(z), t(z)) - \varphi(z, \varphi_s(z), 0, \ldots, 0, t(z))$ $(\varphi = R_s, f_s, \Phi_s)$, $\Psi_{ls}^{(1)}$ состоит из членов разложения (22) измерения $m_1 + \ldots + m_n$, которые удовлетворяют одному из следующих двух условий:

а) $\sum_{i=1}^{n} m_i \operatorname{Re} \varkappa_i < \operatorname{Re} \varkappa_l$,

б) $\sum_{i=1}^{n} m_i \operatorname{Re} \varkappa_i = \operatorname{Re} \varkappa_l$, причем полином (23) имеет коэффициент с отличной от нуля вещественной частью и для первого из таких коэффициентов c_p справедливо: $\operatorname{Re} c_p > 0$, $p < k - 1$.

Можно показать (учитывая, что Δ в случае необходимости можно уменьшить), что аргументные функции $\varphi_s(z), t(z), w_{1s}(z), \ldots, w_{ns}(z)$, определенные отношениями (20), которые используются в отношениях (19), (21), (24)–(25), не выходят из области $\mathfrak{M}_s^{(i)}$ при $(r_s, \varphi_s, w_{1s}, \ldots, w_{ns}, t) \in \mathfrak{M}_s^{(i+1)}$, $i = 0, 1$. Это нам дает возможность применить при оценке функций $f_s, g_s, h_{1s}, \ldots, h_{ns}$ неравенства (13_s). Из (19), (21), (24)–(25) получим, что в $\mathfrak{M}_s^{(2)}$

$$|f_s|, |g_s|, |h_{ls}| < a_1 N_s^2 |r_s|^{N_s[1+1/(s+1)]-m_1}\,, \quad l = 1, \ldots, n\,, \tag{26}$$

причем положительные постоянные a_1, m_1 не зависят от шага s. В дальнейшем постоянные от шага s независящие будем обозначать буквами a_i, m_i $(i = 2, 3,4)$.

Используя неравенство Коши и оценку (26), получим, что в $\mathfrak{M}_s^{(3)}$

$$\left|\frac{\partial f_s}{\partial \varphi_s}\right|, \left|\frac{\partial f_s}{\partial w_{js}}\right|, \left|\frac{\partial f_s}{\partial t}\right|, \left|\frac{\partial g_s}{\partial \varphi_s}\right|, \left|\frac{\partial g_s}{\partial w_{js}}\right|, \left|\frac{\partial g_s}{\partial t}\right|, \left|\frac{\partial h_{ls}}{\partial \varphi_s}\right|, \left|\frac{\partial h_{ls}}{\partial w_{js}}\right|, \left|\frac{\partial h_{ls}}{\partial t}\right| < \tag{27}$$

$$< a_2(s+1)(s+2) N_s^2 |r_s|^{N_s[1+1/(s+1)]-m_2}\,, \quad j, l = 1, \ldots, n\,.$$

Из (16) имеем, используя (13_s), (26) и (27), что в $\mathfrak{M}_s^{(3)}$

$$(28)\qquad \left|\frac{\partial f_s}{\partial r_s}\right|,\ \left|\frac{\partial g_s}{\partial r_s}\right|,\ \left|\frac{\partial h_{ls}}{\partial r_s}\right| < a_3(s+1)(s+2)\,N_s^2|r_s|^{N_s[1+1/(s+1)]-m_3}\,,$$

$$l = 1, \ldots, n\,.$$

Так как величины справа в (26) сколь угодно малы по сравнению с расстояниями между границами $\mathfrak{M}_s^{(3)}$ и $\mathfrak{M}_{s+1}^{(0)}$, то

$$(29)\qquad \mathfrak{M}_{s+1}^{(0)} \subset S_s\mathfrak{M}_s^{(3)}\,.$$

Используя формулу Тейлора, оценку Коши и неравенства (13_s), (26)–(28) получим из (17), что в $\mathfrak{M}_{s+1}^{(0)}$

$$(30)\qquad |R_{s+1}|,\ |\Phi_{s+1}|,\ |\Psi_{l,s+1}| < a_4(s+1)(s+2)\,N_s^2|r_s|^{2N_s[1+1/(s+1)]-m_4}\,,$$

$$l = 1, \ldots, n\,.$$

Поскольку якобиан преобразования S_s в силу (27)–(28) отличен в $\mathfrak{M}_s^{(3)}$ от нуля, то из (29) следует, что обратное преобразование S_s^{-1}:

$$(31)\qquad \begin{aligned} r_s &= r_{s+1} + U_s(r_{s+1}, \varphi_{s+1}, w_{1,s+1}, \ldots, w_{n,s+1}, t)\\ \varphi_s &= \varphi_{s+1} + V_s(r_{s+1}, \varphi_{s+1}, w_{1,s+1}, \ldots, w_{n,s+1}, t)\\ w_{ls} &= w_{l,s+1} + W_{ls}(r_{s+1}, \varphi_{s+1}, w_{1,s+1}, \ldots, w_{n,s+1}, t)\end{aligned}$$

$$l = 1, \ldots, n\,,$$

определено и аналитично в $\mathfrak{M}_{s+1}^{(0)}$. В $\mathfrak{M}_s^{(3)}$

$$f_s(r_s\, \varphi_s, w_{1s}, \ldots, w_{ns}, t) + U_s(r_s + f_s,\ \varphi_s + g_s,\ w_{1s} + h_{1s}, \ldots, w_{ns} + h_{ns}, t) \equiv 0\,.$$

Отсюда в силу (26) и (29) имеем, что в $\mathfrak{M}_{s+1}^{(0)}$

$$(32)\qquad |U_s| < a_1N_s^2|r_s|^{N_s[1+1/(s+1)]-m_1}\,.$$

Из (30) получаем, используя (26), (31)–(32), что в $\mathfrak{M}_{s+1}^{(0)}$

$$|R_{s+1}| < |r_{s+1}|^{N_{s+1}[1+1/(s+2)]}\,.$$

Тем самым доказано первое неравенство (13_{s+1}). Остальные неравенства (13_{s+1}) доказываются аналогично.

Положим теперь $T_{s+1} = T_sS_s$, т. е.

$$(33)\qquad \begin{aligned} F_{s+1} &= F_s + f_s(r_0 + F_s,\ \varphi_0 + G_s,\ w_{10} + H_{1s}, \ldots, w_{n0} + H_{ns}, t)\\ G_{s+1} &= G_s + g_s(r_0 + F_s,\ \varphi_0 + G_s,\ w_{10} + H_{1s}, \ldots, w_{n0} + H_{ns}, t)\\ H_{l,s+1} &= H_{ls} + h_{ls}(r_0 + F_s,\ \varphi_0 + G_s,\ w_{10} + H_{1s}, \ldots, w_{n0} + H_{ns}, t)\,,\end{aligned}$$

$$l = 1, \ldots, n\,.$$

Пусть далее

$$(34)\qquad \mathscr{B}_{s+1} = T_s^{-1}\mathfrak{M}_s^{(3)}\,.$$

Так как в силу (29) $S_s^{-1}\mathfrak{M}_{s+1}^{(0)} \subset \mathfrak{M}_s^{(3)} \subset \mathfrak{M}_s^{(0)}$, а по I_s $T_s^{-1}\mathfrak{M}_s^{(0)} \subset \mathscr{B}_s$, то $T_{s+1}^{-1}\mathfrak{M}_{s+1}^{(0)} \subset T_s^{-1}\mathfrak{M}_s^{(3)} = \mathscr{B}_{s+1} \subset T_s^{-1}\mathfrak{M}_s^{(0)} \subset \mathscr{B}_s$. В области $\mathscr{B}_{s+1}$ в силу (26) и (34)

$$(35) \qquad \left|f_s(r_0 + F_s,\ \varphi_0 + G_s,\ w_{10} + H_{1s}, \ldots, w_{n0} + H_{ns}, t)\right| < \\ < a_1 N_s^2 \left|r_0 + F_s\right|^{N_s[1+1/(s+1)]-m_1} .$$

Поскольку $\mathscr{B}_{s+1} \supset \mathfrak{M}_0^{(0)}$ и в $\mathfrak{M}_0^{(0)}$ $|r_0| < \frac{7}{8}\Delta$, то из (35) в силу ($12_s$) имеем

$$\left|f_s(r_0 + F_s,\ \varphi_0 + G_s,\ w_{10} + H_{1s}, \ldots, w_{n0} + H_{ns}, t)\right| < \Delta^{N_s} .$$

Следовательно, из (33) имеем, что в $\mathscr{B}_{s+1}$ в силу (12_s) и последней оценки

$$\left|F_{s+1}\right| \leqq \left|F_s\right| + \left|f_s\right| < \sum_{i=0}^{s} \Delta^{N_i} .$$

Полученная оценка – первое неравенство (12_{s+1}). Остальные неравенства (12_{s+1}) доказываются аналогично. Тем самым доказано выполнение условия I_{s+1}, и, значит, вся лемма 3.

Для системы (8) условие I_0 тривиально,а условие II_0 выполняется в силу свойства функций R_0, Φ_0, Ψ_{l0} и предположения (9). Это дает нам в лемме (3) базу для индукции по s. Устремим s к бесконечности. Неравенства ($12s$) обеспечивают равномерную сходимость функций F_s, G_s, H_{ls} и их производных по r_0 на множестве $\mathscr{B}_\infty = \lim\limits_{s\to\infty} \mathscr{B}_s$. Переходя в (34) к пределу, получим $T_\infty \mathscr{B}_\infty = \mathfrak{M}_\infty$, где

$$\mathfrak{M}_\infty = \left\{(r_\infty, \varphi_\infty, w_{1\infty}, \ldots, w_{n\infty}, t) : 0 < r_\infty < \frac{\Delta}{2}, \right.$$
$$\left. \left|w_{j\infty}\right| < \frac{\Delta}{2}\ (j = 1, \ldots, n),\ \left|\operatorname{Im} \varphi_\infty\right| < \frac{\Omega}{2},\ \left|\operatorname{Im} t\right| < \frac{\Omega}{2}\right\} .$$

Если положим

$$F_\infty = \lim_{s\to\infty} F_s , \quad G_\infty = \lim_{s\to\infty} G_s , \quad H_{l\infty} = \lim_{s\to\infty} H_{ls} , \quad l = 1, \ldots, n ,$$

то преобразование T_∞ задается формулами

$$\begin{aligned} r_\infty &= r_0 + F_\infty(r_0, \varphi_0, w_{10}, \ldots, w_{n0}, t) \\ \varphi_\infty &= \varphi_0 + G_\infty(r_0, \varphi_0, w_{10}, \ldots, w_{n0}, t) \\ w_{l\infty} &= w_{l0} + H_{l\infty}(r_0, \varphi_0, w_{10}, \ldots, w_{n0}, t) , \quad l = 1, \ldots, n , \end{aligned}$$

где функции F_∞, G_∞, $H_{l\infty}$ непрерывно дифференцируемы по r_0 и аналитичны по $\varphi_0, w_{10}, \ldots, w_{n0}, t$ в области $\mathscr{B}_\infty$. Характер функций F_∞, G_∞, $H_{l\infty}$ позволяет нам доопределить их в точке $r_0 = 0$ следующим образом:

$$F_\infty(r_0 = 0) = G_\infty(r_0 = 0) = H_{l\infty}(r_0 = 0) \equiv 0 , \quad l = 1, \ldots, n .$$

Тогда на множестве $\mathscr{B}' = \mathscr{B}_\infty \cup \{r_0 = 0\}$ преобразование T_∞ в силу (13_s) и свойства функции R_0, Φ_0, Ψ_{l0} в точке $r_0 = 0$ приводит систему (8) к виду

$$\begin{aligned} \dot{r}_\infty &= Q(r_\infty) \\ \dot{\varphi}_\infty &= P(r_\infty) \\ \dot{w}_{l\infty} &= \varkappa_l w_{l\infty} + Q_l(r_\infty, w_{l\infty}), \quad l = 1, \ldots, n . \end{aligned}$$

Множество $\mathscr{B}$, требуемое в теореме, содержится в множестве $\mathscr{B}'$. Теорема, таким образом, доказана.

Замечание. Требование иррациональности λ, существенное только для леммы 2, можно ослабить, потребовав лишь

$$q\lambda + p \neq 0$$

при q, p — целых, $0 < q \leqq 2N + 1$, при этом в автономном случае λ может быть любым вещественным числом.

Литература

[1] *В. В. Басов:* Формальная и аналитическая эквивалентность вещественных систем дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения, т. *13*, № 6, 1977, 981—991.

[2] *Ю. Н. Бибиков:* Об одном критическом случае в теории устойчивости движения. Дифференциальные уравнения, т. *9*, № 12, 1973, 2123—2135.

[3] *Ю. Н. Бибиков:* Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений, Ленинград, 1981.

[4] *А. Д. Брюно:* Аналитическая форма дифференциальных уравнений. Труды Моск. матем. об—ва, т. *25*, 1971; т. *26*, 1972.

[5] *Р. Зимка:* О существовании гладкого преобразования системы дифференциальных уравнений к квазинормальной форме. Вестник Ленинградского университета, № 19, 1977, 22—27.

[6] *Р. Зимка:* Гладкое преобразование аналитической системы дифференциальных уравнений к квазинормальной форме. Mathematica Slovaca (в печати).

[7] *Р. Зимка:* О существовании гладких преобразований к нормальным формам. Кандидатская диссертация, Ленинград, 1975.

Адрес автора: 974 00 Banská Bystrica, Tajovského 8 (VŠE, FESCR).