Časopis pro pěstování matematiky

Jeff B. Paris

O struktuře modelů omezené E_1-indukce

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 109 (1984), No. 4, 372--379

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/118206

O STRUKTUŘE MODELŮ OMEZENÉ E_1-INDUKCE

JEFF B. PARIS, Manchester

(Došlo dne 5. dubna 1983)

ÚVOD

V první části zavedeme některá označení a řekneme, proč myslíme, že IE_1 je zajímavá. V druhé části dokážeme hlavní větu.

PRVNÍ ČÁST

Označení. Budeme pracovat v jazyce aritmetiky. Budeme říkat, že formule θ je E_0 $(\theta \in E_0)$, právě když θ je bez kvantifikátorů, a θ že je $E_{n+1}(\theta \in E_{n+1})$, právě když θ má tvar

$$\exists x_1 < t_1 \, \exists x_2 < t_2 \ldots \exists x_m < t_m \neg \chi$$

kde $t_1, t_2, \ldots, t_m$ jsou termy a $\chi \in E_n$.

Dále

$$\Delta_0 = \bigcup_{n \in N} E_n$$

kde N je standardní model P.

Jako obvykle budeme užívat E_n také pro formule ekvivalentní s E_n v modelu, v němž pracujeme.

Nechť IE_n (omezená E_n-indukce) je schéma

$$\forall x[(\theta(0, x) \wedge \forall y(\theta(y, x) \to \theta(y + 1, x))) \to \forall y \theta(y, x)]$$

kde $\theta \in E_n$, plus konečný systém axiómů (viz [4]). V tomto pojednání budeme vyšetřovat IE_1.

Motivace. Připomeňme některé známé problémy z fragmentů P.

Otevřený problém 1. (Wilkie.) $I\Delta_0 \vdash \exists$ *nekonečně mnoho prvočísel*?

Víme

Věta (Wilkie [7], Shepherdson [6]) IE_0 non $\vdash \exists$ *nekonečně mnoho prvočísel.* ∎

Věříme, že odpověď je ne, proto je přirozené a zajímavé se ptát:

Problém 2. $IE_1 \vdash \exists$ *nekonečně mnoho prvočísel?*

Druhý důležitý problém je

Otevřený problém 3. $\exists n$ *tak, že v* $I\Delta_0$ *každá* Δ_0 *formule je ekvivalentní s* E_n *formulí?*

To je patrně těžký problém. Mnoho lidí věří, že odpověď je záporná. Pak bychom se měli ptát na lehčí problém.

Problém 4. $\exists n$ *tak, že v* IE_1 *každá* Δ_0 *formule je ekvivalentní s* E_n *formulí?*

Abychom odpověděli na tyto otázky, musíme, zdá se, hledat nové modely IE_1. Proto musíme nejdříve studovat strukturu těchto modelů. Na příklad se asi musíme ptát:

Problém 5. *Existují rekursivní nestandardní modely* IE_1?

Připomeňme následující věty:

Věta. (MacAloon [3].) *Nechť* $M \models I\Delta_0$, *M nestandardní a nechť universum modelu M se rovná standardním číslům. Potom* $+_M$ *a* $\cdot_M$ *nejsou rekursivní.* ∎

Zatím co:

Věta. (Shepherdson [6].) IE_0 *má rekursivní modely.* ∎

Dále se můžeme ptát na složitost modelů IE_1.

Problém 6. *Nechť* $M \models IE_1$, *M nestandardní. Je* $M \upharpoonright +$ (*tj. M restringované na plus*) *rekursivně saturované?*

Víme

Věta. (MacAloon-Wilmers-Cegielski [1].) *Nechť* $M \models I\Delta_0$, *M nestandardní. Pak* $M \upharpoonright +$ *je rekursivně saturované.* ∎

Avšak podle Shepherdsonovy věty, jak bylo uvedeno shora, existuje $M \models IE_0$, M nestandardní, ale $M \upharpoonright +$ není rekursivně saturované.

V podobném směru se můžeme ptát:

Problém 7. *Nechť* $M \models IE_1$, *M nestandardní. Existuje I tak, že* $I \subseteq_e M$ (*I je řez v M*), *I nestandardní a* $I \models P$?

To zase není pravda pro IE_0 (to podle Shepherdsonovy věty), zatím co

Věta. (MacAloon [3]) *Nechť* $M \models I\Delta_0$, *M nestandardní. Pak existuje I tak, že* $I \subseteq_e M$, *I nestandardní a* $I \models P$. ∎

Nemůžeme odpovědět na druhý a čtvrtý problém, zůstávají otevřené. Avšak Wilmers [8] ukázal, že odpověď na problém pět je negativní. Wilmers ukázal, že $+_M$ není rekursivní a my jsme ukázali, že $\cdot_M$ není rekursivní.

Dále Wilmers ukázal, že odpověď na problém šest je kladná, a my jsme ukázali, že odpověď na problém sedm je také kladná.

Proto vidíme, že modely IE_1 už jsou velmi komplikované, možná tak komplikované jako modely P. To není dobré, chceme-li budovat modely, aby zodpověděly problémy dva a čtyři.

DRUHÁ ČÁST

V této části dokážeme, že odpověď na problém sedm je kladná. To je

Hlavní věta. *Nechť $M \models IE_1$, M nestandardní. Pak existuje $I \subseteq_e M$, I nestandardní a $I \models P$.*

Odložíme důkaz, protože nejdříve potřebujeme některé jiné věty a definice. Avšak vzhledem k MacAloonově větě stačí ukázat, že extistuje I, $I \subseteq_e M$, I nestandardní a $I \models I\Delta_0$, (protože takové I bude mít řez J, který je nestandardní a $J \models P$).

Následující tři lemmata plynou z Wilmersova článku [8].

Lemma 1. (Wilmers [8].)

$$LU_1 \Rightarrow LE_1 \Leftrightarrow IE_1 \Leftrightarrow IU_1\,,$$

kde U_1 je množina $\{\neg\theta \mid \theta \in E_1\}$ a IE_1 je princip E_1-nejmenšího čísla, to je schéma

$$\forall x[\exists y \theta(y, x) \to \exists y(\theta(y, x) \land \forall z < y \neg\theta(z, x))]$$

kde $\theta \in E_1$. ■

Dokázat toto lemma je lehké. Otevřený problém je, zda IU_1 implikuje LU_1. Věříme, že to není pravda. Evidentně to není pravda, dodáme-li nový unární relační symbol.

Lemma 2. (Wilmers [8])

$$IE_1 \vdash \forall x\,,\ y(1 < y < x \to \exists!\, z\, \exists!\, r(z < x \land r < y \land x = yz + r))$$

— *to je Euklidův algoritmus*

$$IE_1 \vdash \forall x\,,\ y((x, y) = 1 \to \exists s < x,\ sy = 1 \bmod x)$$

— *to je Bézoutova věta.* ■

Vzhledem k těmto větám relace $x = y \bmod z$, $x \mid y$, $(x, y) = 1$ jsou E_1 a U_1 v IE_1. Dále pomocí těchto relací můžeme ukázat, že dvojice

$$x, y \mapsto \langle x, y\rangle = \tfrac{1}{2}(x + y)(x + y + 1) + x$$

a Gödelova β-funkce

$$\beta, i \mapsto \beta_i = \text{nejmenší } x \text{ tak, že}$$

$$b_0 = x \bmod b_1(i+1) + 1\,, \quad \text{kde} \quad \beta = \langle b_0, b_1 \rangle$$

existují a jsou také E_1 a U_1 v IE_1.

Nejdůležitější věty pro studium IE_1 jsou:

Lemma 3. (Wilmers [8].) *Nechť $M \models IE_1$, M nestandardní. Potom:*

Slabé E_1-přetečení: když $\theta(x) \in E_1$ a $\forall n \in N$, $M \models \theta(n)$, pak $\forall \alpha \in M - N \,\exists N < < \beta < \alpha$, $M \models \theta(\beta)$.

Silné U_1-přetečení: když $\theta(x) \in U_1$ a $\forall n \in N, M \models \theta(n)$, pak $\exists N < \alpha$, $M \models \forall x < < \alpha$, $\theta(x)$. ■

Tyto věty jsou lehko dokazatelné, když užijeme IE_1 a LE_1.

Důkaz hlavní věty. Nechť $\mathscr{L}$ je LA, kde $+$, $\cdot$ jsou relace.

Rádi bychom zjednodušili důkaz, proto často ztotožníme formule s kódy formulí. Idea důkazu je, že najdeme $a, b, c \in M$ tak, že $c > a^N$ a pro všechny formule $\theta(x)$ v $\mathscr{L}$ takové, že $\bar{e} < a$ a $\theta(\bar{e}) < c$ (to je kód $\theta(\bar{e})$ menší než c), platí

$$\theta(\bar{e}) \in b \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \models \theta(\bar{e})$$

kde $\boldsymbol{a}$ je substruktura v M pro $\mathscr{L}$, která má universum $\{x \in M \mid x < a\}$. Zde $x \in b$ znamená $b_x = 0$, ve smyslu Gödelovy β-funkce. S užitím této „relace pravdy" pro b a IE_1 dokážeme, že $a^N \models I\Delta_0$ kde a^N je substruktura v M, která má universum $\{x \in M \mid \exists n \in N,\ x < a^n\}$.

Nejdříve musíme najít jednoduchý kód pro $\theta(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Proto zavedeme dvojice

$$[x, y] = 2\langle x, y \rangle + 2$$

$$(x, y) = 2\langle x, y \rangle + 1$$

a píšeme $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ místo

$$(x_1, (x_2, (x_3, \ldots, (x_{n-1}, x_n) \ldots)))\,.$$

Potom nechť kód pro $\theta(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ je dvojice,

$$\langle \theta(x_1, \ldots, x_n), \; (([x_i, e_i], [x_{i-1}, e_{i-1}], \ldots, [x_1, e_1]), \; ([x_{i+1}, e_{i+1}], [x_{i+2}, e_{i+2}], \ldots, [x_n, e_n], s))\rangle$$

kde kód pro $\theta(x_1, \ldots, x_n)$ je standardní k-tice. Užíváme tuto neobvyklou druhou souřadnici, protože někdy musíme permutovat tato $[x_i, e_i]$ a také zvětšit s. Všimněte si, že existuje mnoho různých kódů pro $\theta(e)$. S užitím Matijasevičovy věty najdeme polynom f takový, že v standardním modelu $\exists z\, f(a, b, c, z) = 0$ je ekvivalentní s větou

$$„\forall\alpha, \beta, \gamma, i, j, k, l, l_1, l_2, t, s < c\, \forall e_1, e_2, e_3, n, m < a\,,$$

$$\text{(i)}\ \alpha = \langle x_i + x_j = x_k, (([x_i, e_1], [x_j, e_2], [x_k, e_3]), l)\rangle \to (\alpha \in \beta \leftrightarrow e_1 + e_2 = e_3),$$

$$\text{(ii)}\ \alpha = \langle x_i + x_j \neq x_k, (([x_i, e_1], [x_j, e_2], [x_k, e_3]), l)\rangle \to$$
$$\to (\alpha \in \beta \leftrightarrow e_1 + e_2 \neq e_3),$$

a tak dále s $x_i \,.\, x_j = x_k$, $x_i \,.\, x_j \neq x_k, \ldots$,

$$\text{(iii)}\ \alpha = \langle s, l\rangle \wedge \beta = \langle \neg s, l\rangle \to (\alpha \in b \leftrightarrow \beta \notin b),$$

$$\text{(iv)}\ \alpha = \langle s, l\rangle \wedge \beta = \langle t, l\rangle \wedge \gamma = \langle (s \wedge t), l\rangle \to (\alpha, \beta \in b \leftrightarrow \gamma \in b),$$

$$\text{(v)}\ \left.\begin{array}{l} \alpha = \langle \exists x_i \leqq x_j s, (([x_j, e_1]), l)\rangle \\ \beta = \langle s, (([x_i, e_1 + 1]), l)\rangle \\ \gamma = \langle \exists x_i \leqq x_j s, (([x_j, e_1 + 1]), l)\rangle \\ \text{a } x_j > x_i, s \text{ (pro jejich kódy)} \end{array}\right\} \to (\alpha, \beta \notin b \leftrightarrow \gamma \notin b),$$

$$\text{(vi)}\ \left.\begin{array}{l} \alpha = \langle \exists x_i \leqq x_j s, (([x_j, 0]), l)\rangle \\ \beta = \langle s, (([x_i, 0]), l)\rangle \\ \text{a } x_j > x_i, s \end{array}\right\} \to (\alpha \in b \leftrightarrow \beta \in b)$$

$$\text{(vii)}\ \left.\begin{array}{l} \alpha = \langle \exists x_i \leqq x_j s, (([x_j, a - 1]), l)\rangle \\ \beta = \langle \exists x_i s, l\rangle \\ \text{a } x_j > x_i, s \end{array}\right\} \to (\alpha \in b \leftrightarrow \beta \in b)$$

a tak dále s $(s \vee t)$, $(s \to t), \ldots$,

$$\text{(viii)}\ \left.\begin{array}{l} \alpha = \langle s, (([x_i, e_1], l_1), l_2)\rangle \\ \beta = \langle s, (l_1, ([x_i, e_1], l_2))\rangle \end{array}\right\} \to (\alpha \in b \leftrightarrow \beta \in b)$$

$$\text{(ix)}\ \left.\begin{array}{l} \alpha = \langle s, (([x_i, e_1], l_1), ([x_j, e_2], l_2))\rangle \\ \beta = \langle s, (([x_j, e_2], l_1), ([x_i, e_1], l_2))\rangle \\ i \neq j \end{array}\right\} \to (\alpha \in b \leftrightarrow \beta \in b)$$

$$\text{(x)}\ c_0 = 1 \wedge c_{n+1} = ac_n \wedge (n < m \to c_n < c_m)\text{“}.$$

Důvod pro (i)–(vii) je jasný. V (v) potřebujeme, že $x_j > x_i, s$ aby se nesmělo x_j vyskytnout v s. Všimněte si, že nepředpokládáme, že s a t jsou (kódy pro) formule. Máme (viii) a (ix), protože chceme-li, aby (i)–(vii) fungovalo, musíme smět permutovat parametry. V (x) užíváme Gödelovu β-funkci. Dále (x) zajistí, že c je značně větší než a.

Teď uvažme U_1-formuli

$$\forall a, b, c < \delta[\exists \bar{z} < \delta, f(a, b, c, \bar{z}) =$$
$$= 0 \to \forall\alpha, \ldots, s < c\, \forall e_1, \ldots, m < a\{(\text{i}) \wedge (\text{ii}) \wedge \ldots \wedge (\text{x})\}]\,.$$

Je to pravda, když $\delta \in N$. Proto s užitím silného U_1-přetečení v M je to pravda pro některé $\delta > N$. Vezměme takové δ. Potom pro všechna $n \in N$,

$$M \models \exists n < a, b, c < \delta\ \exists \tilde{z} < \delta, f(a, b, c, \tilde{z}) = 0\,,$$

takže s užitím slabého E_1-přetečení existují taková a, b, $c > N$. Pro tato a, b, c,

$$M \models \forall \alpha, \ldots, s < c\ \forall e_1, \ldots, m < a\{(\mathrm{i}) \wedge (\mathrm{ii}) \wedge \ldots \wedge (\mathrm{ix})\}\,.$$

S užitím (x), $c_n = a^n$ pro $n \in N$, a proto $a^N < c_a \leqq c$.

Teď nechť $\theta(z_1, \ldots, z_k)$ je formule z $\mathscr{L}$ taková, že každý kvantifikátor v θ je neomezený nebo omezený jedním z_i.

Potom, s užitím transformace

$$\exists x \leqq y\psi(x, y) \mapsto \exists x \leqq y_1\psi(x, y_2)\,,$$

kde (pro kódy) $y_2 > y_1 > \exists x \leqq y\psi(x, y)$, najdeme formuli $\theta'(x_1, \ldots, x_n)$ a $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, k\}$ tak, že:

(1) Pro všechna $e_1, \ldots, e_k < a$ $\boldsymbol{a} \models \theta(e_1, \ldots, e_k) \leftrightarrow \theta'(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})$.

(2) Když se $\forall y \leqq x_i$ vyskytne v θ', pak x_i se nevyskytne jinde v θ'.

S užitím vlastností (i)–(x) dokážeme indukcí podle θ', že $\langle \theta'(\vec{x}), (([x_1, e_1], \ldots, [x_n, e_n]), l)\rangle \in b \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \models \theta'(e_1, \ldots, e_n)$ pro všechna $e_1, \ldots, e_n < a$ a $l < a^N$.

Teď ukážeme, že $\boldsymbol{a}$ je model principu nejmenšího čísla pro $\mathscr{L}$. To stačí, protože když $\boldsymbol{a}$ je model principu nejmenšího čísla pro $\mathscr{L}$, pak a^N je model $I\Delta_0$. (Viz Paris-Dimitracopoulos [5].)

Předpokládejme $\boldsymbol{a} \models \exists z_1\theta(z_1, e_2, \ldots, e_k)$, kde $e_2, \ldots, e_k < a$ a θ je jako nahoře. Pak existuje $e_1 < a$ takové, že

$$\boldsymbol{a} \models \theta(e_1, e_2, \ldots, e_k)\,.$$

Proto $\langle \theta'(x_1, x_2, \ldots, x_n), (([x_1, e_{i_1}], \ldots, [x_n, e_{i_n}]), 0)\rangle \in b$. Předpokládejme $1 = i_1 = i_2 = \ldots = i_t < i_{t+1} \leqq \ldots \leqq i_n$. Proto $\langle \theta'(x), (([x_1, e_1], \ldots, [x_t, e_1], [x_{t+1}, e_{i_{t+1}}], \ldots, [x_n, e_{i_n}]), 0)\rangle \in b$.

Nechť r je nejmenší takové, že

$$\langle \theta'(x), (([x_1, r], \ldots, [x_t, r], [x_{t+1}, e_{i_{t+1}}], \ldots, [x_n, e_{i_n}]), 0)\rangle \in b\,.$$

S užitím LE_1 takové r existuje. Potom pro $s < r$,

$$\langle \neg\theta'(x), (([x_1, s], \ldots, [x_t, s]\ [x_{t+1}, e_{i_{t+1}}], \ldots, [x_n, e_{i_n}]), 0)\rangle \in b\,.$$

Proto $\boldsymbol{a} \models \theta(r, e_2, \ldots, e_k) \wedge \neg\, \theta(s, e_2, \ldots, e_k)$ pro všechna $s < r$, a dále

$$\boldsymbol{a} \models \exists z_1[\theta(z_1, e_2, \ldots, e_k) \wedge \forall y < z_1 \neg\, \theta(y, e_2, \ldots, e_k)]\,,$$

jak jsme potřebovali. ∎

Všimněte si, že b redukuje $I\Delta_0$ na IE_1.

Tato věta má několik důsledků.

Důsledek. (Wilmers-Paris, viz [8].) *Nechť $M \models IE_1$, M nestandardní a nechť M má universum N. Potom $+_M$, $\cdot_M$ nejsou rekursivní.*

Důkaz. Nechť $I \subseteq_e M$, I nestandardní a $I \models P$. Původní Tennenbaumův důkaz (viz [2]) dokazuje, že existuje $a \in I$ takové, že v I

$$A = \{n \in N | p_n | a\} \quad \text{není rekursivní} ,$$

kde p_n je n-té prvočíslo.

Ale to platí také v M. Proto

$$A = \{n \in N \mid \exists y \in M,\ M \models \underbrace{y + y + \ldots + y}_{p_n \text{ krát}} = a\} =$$

$$= \{n \in N \mid \neg \exists y \in M \, \exists 0 < i < p_n ,$$

$$M \models \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{i \text{ krát}} + \underbrace{y + y + \ldots + y}_{p_n \text{ krát}} = a\} .$$

Proto $A \leq_T M \upharpoonright +$ a $M \upharpoonright +$ není rekursivní.

Důkaz, že $M \upharpoonright \cdot$ není rekursivní, je podobný.

Užitím podobných metod dokážeme následující

Důsledek. Nechť $M \models IE_1$, M nestandardní. Pak

(i) (Wilmers [8].) Každá rekursivní množina je kódována v M.

(ii) Nechť $A \subseteq N$ a předpokládejme, že pro všechna $\alpha \in M - N$ existuje Δ_0 formule θ a $\bar{e} < \alpha$ tak, že pro všechna $n \in N$

$$n \in A \Leftrightarrow M \models \theta(n, \bar{e}) .$$

Pak A je kódováno v M.

(iii) (Wilmers-Paris). Existuje $\beta \in M - N$ tak, že M splňuje silné Δ_0 — přetečení, pokud všechny parametry jsou menší než β.

Poznámky. V [8] Wilmers dokazuje přímo důsledek (i). Dále s užitím jeho věty umíme dokázat hlavní větu bez zavádění komplikovýnch kódů. Avšak důkaz není lehčí.

Dále můžeme užít hlavní větu, abychom zkrátili Wilmersův důkaz, že $M \upharpoonright +$ je rekursivně saturovaný, ale zkrácený důkaz je ještě těžký.

Literatura

[1] *P. Cegielski, K. MacAloon, G. Wilmers:* Modèles récursivement saturés de l'addition et de la multiplication des entiers naturels. Logic Colloquium '80, red. D. van Dalen et alii, North Holland.

[2] *P. Cohen:* Set Theory and the Continuum Hypothesis. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1966.
[3] *K. MacAloon:* On the complexity of models of arithmetic. Journal of Symbolic Logic, *47* č.2.
[4] *J. Paris:* Note on an induction axiom. Journal of Symbolic Logic, *43* č. 1.
[5] *J. Paris, C. Dimitracopoulos:* Truth definitions for Δ_0 formulae. Logic and Algorithm, Monographie No. 30 de L'Enseignement Mathématique.
[6] *J. Shepherdson:* Non-standard models for fragments of number theory. Theory of Models, North Holland, 1965.
[7] *A. Wilkie:* Some results and problems on weak systems of arithmetic. Logic Colloquium '77, North Holland, 1978.
[8] *G. Wilmers:* Bounded Existential Induction. Journal of Symbolic Logic (v tisku).

Adresa autora: University of Manchester, Department of Mathematics, Manchester, Great Britain.

Summary

ON THE STRUCTURE OF MODELS OF BOUNDED E_1-INDUCTION

JEFF B. PARIS, Manchester

It is proved that in every nonstandard model of bounded E_1-induction there exists a nonstandard cut which is a model of Peano axioms.