I. E. Egorov

Весовые пространства соболевского типаи вырождающиеся эллиптические уравнения

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 109 (1984), No. 1, 74--85

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/118197

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 109 (1984), Praha

ВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВСКОГО ТИПА И ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

И. Е. ЕГОРОВ, Якутск

(Поступило в редакцию 29/XII. 1982 г.)

В последние годы проведен ряд успешных исследований по теории граничных задач для общих вырождающихся эллиптических дифференциальных уравнений [1], [3], [6]–[10]. В рамках L_2-теории в этих работах изучены Φ-разрешимость граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка и получены априорные оценки в соответствующих весовых пространствах С. Л. Соболева [3]–[5], [11], [13].

В настоящей статье исследуется компактность оператора вложения весового пространства Соболева, когда весовая функция является степенью расстояния от точки области определения до ее границы. Также рассматриваются применения теорем вложения к решению спектральной и граничной задач для вырождающегося на границе области эллиптического дифференциального оператора высокого порядка.

1. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ С. Л. СОБОЛЕВА

Пусть Ω-ограниченная область в R^n с границей Γ класса C^∞, $\varrho(x) = \operatorname{dist}(x, \Gamma)$ есть расстояние от точки x до Γ. Для $1 < p < \infty$ и $m = 0, 1, 2, \ldots$ положим

$$W_\alpha^{m,p}(\Omega) = \left\{ f \mid f \in \mathscr{D}'(\Omega),\ \|f\|_{W_\alpha^{m,p}} = \left(\sum_{|i| \leqq m} \int_\Omega \varrho^\alpha(x) \left| D^i f(x) \right|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} \right\},$$

где α-действительное число. Замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ обозначим через $\mathring{W}_\alpha^{m,p}(\Omega)$, $\mathring{W}_\alpha^{0,p}(\Omega) = L_\alpha^p(\Omega)$. Отметим, что весовые пространства $W_\alpha^{m,p}$ и $\mathring{W}_\alpha^{m,p}$ подробно изучались в работах [4, 11–13]. Эль Колли [14] исследовал поперечники для операторов вложения пространств $\mathring{W}_\alpha^{m,p}(\Omega)$ при $m \geqq 1$. Данный результат при $p = 2$ имеет особый интерес, так как с их помощью нетрудно получить ряд утверждений об асимптотическом поведении собственных значений для вырождающихся эллиптических дифференциальных уравнений. Мы ниже получим удовлетворительное описание поперечников Колмогорова для пространств $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$, также будут доказаны некоторые теоремы вложения и компактности.

Лемма 1.1. *Пусть $\alpha \leqq p - 1$, $\beta > -1$. Тогда оператор вложения I пространства $W_\alpha^{1,p}(\Omega)$ в $L_\beta^p(\Omega)$ является вполне непрерывным.*

Доказателство. Пусть $\varepsilon > 0$ и для $f \in M$ выполнено

$$\|f\|_{W_\alpha{}^{1,p}} \leqq C. \tag{1.1}$$

Для числа $\delta > 0$ положим

$$\Omega_\delta = \{x : x \in \Omega,\ \varrho(x) < \delta\}.$$

В силу неравенства (1.1) и $W_\alpha^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L_{-1+\omega}^p(\Omega)$ при $\omega = \frac{1}{2}(\beta + 1)$ [13] будем иметь

$$\|f\|_{L_\beta{}^p(\Omega_\delta)} \leqq \delta^{\omega/p}\|f\|_{L^p{}_{-1+\omega}(\Omega)} \leqq C_1\delta^{\omega/p}\|f\|_{W_\alpha{}^{1,p}(\Omega)} < \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

когда δ-достаточно малое число, $f \in M$. Поскольку вложение

$$W_\alpha^{1,p}(\Omega \mid \Omega_\delta) \hookrightarrow L_\beta^p(\Omega \mid \Omega_\delta)$$

компактно для множества M существует $\frac{1}{2}\varepsilon$-сеть $f_1, f_2, \ldots, f_N$ в пространстве $L_\beta^p(\Omega \mid \Omega_\delta)$ [5]. Тогда функции

$$\tilde{f}_i(x) = \begin{cases} f_i(x), & x \in \Omega \mid \Omega_\delta, \\ 0, & x \in \Omega_\delta \end{cases}$$

образуют конечную ε-сеть для M в $L_\beta^p(\Omega)$. Лемма доказана.

Для $0 < s < \infty$ положим

$$s = [s]^- + \{s\}^+, \quad [s]^-\text{-целое число}, \quad 0 < \{s\}^+ \leqq 1.$$

Теорема 1.1. (a) *Если $\beta > -1$ при $\alpha \leqq p - 1$ и $\beta > \alpha - p$ при $\alpha > p - 1$, то оператор вложения*

$$I : W_\alpha^{m,p}(\Omega) \to W_\beta^{m-1,p}(\Omega)$$

является вполне непрерывным.

(b) *Если $-1 < \alpha \leqq mp - 1$ и $\beta > -1$, то*

$$I : W_\alpha^{m,p}(\Omega) \to L_\beta^p(\Omega)$$

будет вполне непрерывным отображением.

Доказательство. Утверждение (a) теоремы 1.1 непосредственно следует из леммы 1.1 при $\alpha \leqq p - 1$, а при $\alpha > p - 1$ из результатов работы [11].

Пусть $-1 < \alpha \leqq mp - 1$ и $\beta > -1$. В силу известного неравенства [11], [13]

$$\|f\|_{L^p{}_{\gamma-p}(\Omega)} \leqq C\|f\|_{W_\gamma{}^{1,p}(\Omega)}, \quad \gamma > p - 1$$

будем иметь

$$W_\alpha^{m,p}(\Omega) \subset W_{\alpha-p[(\alpha+1)/p]^-}^{m-[(\alpha+1)/p]^-}(\Omega) \subset W_{\sigma-p[(\alpha+1)/p]^-}^{1,p}(\Omega)\,.$$

Тогда с учетом $\alpha - p[(\alpha+1)/p]^- \leqq p-1$ утверждение (b) теоремы 1.1 вытекает снова из леммы 1.1.

Лемма 1.2. *Пусть выполнено условие* $-1 < \alpha \leqq mp - 1$. *Тогда нормы*

$$\|f\|^{(1)}_{W_\alpha{}^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|i|=m} \|\mathscr{D}^i f\|^p_{L_\alpha{}^p(\Omega)} + \|f\|^p_{L_\alpha{}^p(\Omega)}\Big)^{1/p}, \tag{1.2}$$

$$\|f\|^{(2)}_{W_\alpha{}^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|i|=m} \|\mathscr{D}^i f\|^p_{L_\alpha{}^p(\Omega)}\Big)^{1/p} + \sum_{|i|\leqq m-1} \left|\int_\Omega \varrho^{\alpha/p}\mathscr{D}^i f\,\mathrm{d}x\right| \tag{1.3}$$

являются эквивалетными нормами в пространстве $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$.

Доказательство. Сначала докажем эквивалентость нормы (1.2). Допустим противное, тогда найдется такая последовательность функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ из $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$, что

$$\sum_{1\leqq|i|\leqq m-1} \|D^i f_k\|_{L_\alpha{}^p} = 1\,, \quad \|f_k\|_{L_\alpha{}^p} + \sum_{|i|=m} \|D^i f_k\|_{L_\alpha{}^p} < \frac{1}{k}\,. \tag{1.4}$$

Отсюда вытекает, что $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ ограничена в $W_\sigma^{m,p}(\Omega)$ и в силу пункта (a) теоремы 1.1 эта последовательность предкомпактна в $W_\alpha^{m-1,p}(\Omega)$. Вторая част (1.4) означает, что искомая последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ предкомпактна и в $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$. Без ограничения общности будем считать, что f_k сходится к f в $W_\sigma^{m,p}$. Тогда из второй части (1.4) следует, что $f = 0$, а это противоречит первой части (1.4).

Переходим к доказательству второй части леммы 1.2.

Согласно (1.2) достаточно показать справедливость неравенства

$$\|f\|_{L_\alpha{}^p(\Omega)} \leqq C\|f\|^{(2)}_{W_\alpha{}^{m,p}(\Omega)}$$

для любой функции f из $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$. Допустим, что такого числа c нет. Тогда существует последовательност $\{f_k(x)\}_{k=1}^\infty$ из $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ для которой

$$\|f_k\|_{L_\alpha{}^p(\Omega)} = 1\,, \quad \|f_k\|^{(2)}_{W_\alpha{}^{m,p}(\Omega)} < \frac{1}{k}\,. \tag{1.5}$$

Из (1.2) и (1.5) следует, что последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ предкомпактна в $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$. Далее, как и в первой части доказательства данной леммы, приходим к противоречию. Тем самым эквивалентость норм (1.2), (1.3) доказана.

Для дальнейшего нам понадобится одна теорема о следах функций из $W_\alpha^{1,p}(\Omega)$ на границе области. Пусть $f(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ и положим $Tf = f$ на границе области Ω. В [11] установлено, что T является линейным непрерывным отображением из $W_\alpha^{1,p}(\Omega)$ в $L^p(\Gamma)$ при $0 \leqq \alpha < p-1$.

Теорема 1.2. *Пусть* $-1 < \alpha < p - 1$. *Тогда*

$$T : W_\alpha^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Gamma)$$

является вполне непрерывным отображением.

Доказателство. Пусть M-ограниченное множество в $W_\alpha^{1,p}(\Omega)$, а M_Γ-множество следов на Γ функций из M. Рассмотрим функцию $f(x)$ из $C^\infty(\bar{\Omega})$. Тогда в локальной системе координат (x_i', x_{in}) имеет место равенство

$$f(x_i', a_i(x_i')) = f(x_i', \eta) - \int_{a_i(x_i')}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x_{in}}(x_i', \xi)\, d\xi ,$$

где $a_i(x_i') \leqq \eta \leqq a_i(x_i') + \delta \leqq a_i(x_i') + \beta$, $x_i' \in \Delta_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Из которого следует

$$|f(x', a_i(x_i'))|^p \leqq c\left[|f(x', \eta)|^p + \delta^{p-1-\alpha} \int_{a_i(x_i')}^{a_i(x_i')+\beta} \left|\frac{\partial u}{\partial x_{in}}(x', \xi)\right|^p (\xi - a_i(x_i'))^\alpha\, d\xi\right].$$

Проинтегрируем последнее неравенство по η от $a_i(x_i')$ до $a_i(x_i') + \delta$, тогда получим

$$|f(x', a_i(x_i'))|^p \leqq$$

$$\leqq c\left[\frac{1}{\delta}\int_{a_i(x_i')}^{a_i(x_i')+\delta} |f(x', \eta)|^p\, d\eta + \delta^{p-1-\alpha} \int_{a_i(x_i')}^{a_i(x_i')+\beta} \left|\frac{\partial u}{\partial x_{in}}(x', \xi)\right|^p (\xi - a_i(x_i'))^\alpha\, d\xi\right].$$

Затем полученное неравенство проинтегрируем по Δ_i, суммируя по i, получим

$$\|f\|^p_{L^p(\Gamma)} \leqq \frac{c_1}{\delta}\|f\|^p_{L^p(\Omega)} + c_2\delta^{p-1-\alpha}\|f\|^p_{W_\alpha^{1,p}(\Omega)} \tag{1.6}$$

где $c_k > 0$ и не зависит от f. Множество $C^\infty(\bar{\Omega})$ является плотным в пространстве $W_\alpha^{1,p}(\Omega)$ при $\alpha > -1$ [12]. Следовательно, неравенство (1.6) справедливо для любой функции f из $W_\alpha^{1,p}(\Omega)$.

В силу леммы 1.1 множество M предкомпактно в $L^p(\Omega)$. Отсюда и из оценки (1.6) следует, что множество M_Γ предкомпактно в $L^p(\Gamma)$. Теорема доказана.

Следствие 1.1. *Пусть* $-1 < \alpha < mp - 1$. *Тогда оператор* R, *определенный равенством*

$$Rf = \{D_j f/\Gamma \quad |j| \leqq m_\alpha\}, \quad m_\alpha = \left[m - \frac{\alpha+1}{p}\right]^- ,$$

есть вполне непрерывное отображение $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ *в* $[L^p(\Gamma)]^{n_\alpha}$, *где* n_α-*есть число мультииндексов* j *с* $|j| \leqq m_\alpha$.

Доказательство. Для мультииндекса j, $|j| \leqq m_\alpha$, будем иметь

$$D^j f \in W_\alpha^{m-|j|,p}(\Omega) \subsetneq W^{m-[(\alpha+1)/p]^- - |j|,p}_{\alpha-p[(\alpha+1)/p]^-}(\Omega) \subsetneq W^{k,p}_{\alpha-p[(\alpha+1)/p]^-}(\Omega),$$

где $k = 1$ при $(\alpha + 1)/p \notin N$, $k = 2$ при $(\alpha + 1)/p \in N$, а функция $f(x)$ принадлежит $W^{m,p}_\alpha(\Omega)$. При $k = 1$ число $\alpha - p[(\alpha + 1)/p]^- < p - 1$, и утверждение следствия 1.1 следует из теоремы 1.2. Если $k = 2$, то справедливо вложение

$$W^{2,p}_{p-1}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega).$$

Отсюда следует, что снова R является вполне непрерывным оператором.

Пусть E-банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_E$. Обозначим через $L_n(E)$ множество всех линейных подпространств размерности не больше n данного пространства Е. Для множества $A \subset E$ числа

$$d_n(A, E) = \inf_{E_n \in L_n(E)} \sup_{x \in A} \inf_{y \in E_n} \|x - y\|_E, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

называются поперечниками по Колмогорову [3], [14].

Через SE будем обозначать единичный шар банахова пространства E. Для двух последовательностей положительных чисел $\{a_j\}_{j=1}^\infty$ и $\{b_j\}_{j=1}^\infty$ запись $a_j \sim b_j$ означает, что существуют положительные числа c_1 и c_2 такие, что

$$c_1 b_j \leqq a_j \leqq c_2 b_j, \quad j = 1, 2, \dots.$$

Теорема 1.3. *Пусть* $-1 < \alpha \leqq mp - 1, \beta > -1$.

(a) *При* $-1 < \beta < \alpha - mp/n$

$$d_j(SW^{m,p}_\alpha(\Omega), L^p_\beta(\Omega)) \sim j^{-(mp-\alpha+\beta)/p(n-1)}.$$

(b) *При* $\beta = \alpha - mp/n$

$$d_j(SW^{m,p}_\alpha(\Omega), L^p_\beta(\Omega)) \leqq C(j/\ln)^{-m/n}.$$

(c) *При* $\alpha - mp/n < \beta$

$$d_j(SW^{m,p}_\sigma(\Omega), L^p_\beta(\Omega)) \sim j^{-m/n}.$$

Доказательство. 1. При выполнении условий теоремы имеет место

$$\mathring{W}^{m,p}_\alpha(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}_\alpha(\Omega) \hookrightarrow L^p_\beta(\Omega).$$

Отсюда следует неравенство

$$d_j(S\mathring{W}^{m,p}_\alpha(\Omega), L^p_\beta(\Omega)) \leqq d_j(SW^{m,p}_\alpha(\Omega), L^p_\beta(\Omega)). \tag{1.7}$$

В [14] установлено, что

$$d_j(S\mathring{W}^{m,p}_\alpha(\Omega), L^p_\beta(\Omega)) \sim j^{-(mp-\alpha+\beta)/p(n-1)} \quad \text{при} \quad \alpha - mp < \beta < \alpha - \frac{mp}{n},$$

$$d_j(S\mathring{W}^{m,p}_\alpha(\Omega), L^p_\beta(\Omega)) \sim j^{-m/n} \quad \text{при} \quad \alpha - \frac{mp}{n} < \beta.$$

Поэтому, из (1.7) вытекает оценка снизу для (a) и (c). 11. Достаточно показать оценки сверху, когда Ω есть куб $y =]0, 1[^n$, $x_n = t$.

1. Пусть $\alpha \geqq 0$ и $\beta \leqq 0$. Возмем число $0 < \delta < 1$ и будем апроксимировать $f(x)$ нулем на $y' \times]0, \delta[$. В силу теоремы 1.1 имеет место

$$W_\alpha^{m,p}(y) \subset L^p_{-1+\omega}(y)\,, \quad \omega = \frac{\beta + 1}{2}\,.$$

Тогда получим

$$(1.8) \qquad \int_{y'} \mathrm{d}x' \int_0^\delta t^\beta |f(x)|^p \,\mathrm{d}t \leqq \delta^\omega \int_{y'} \mathrm{d}x' \int_0^1 t^{-1+\omega} |f(x)|^p \,\mathrm{d}t \leqq c\delta^\omega \|f\|^p_{W_\alpha^{m,p}(y)}\,.$$

Для $0 < \varepsilon < 1$ положим $c\delta^\omega = \varepsilon^p$. На отрезке $]\delta, 1[$ выберем точки $t_0 = \delta < t_1 < \ldots < t_h = 1$; $l_k = t_k - t_{k-1}$. Область $y' \times]t_{k-1}, t_k[$ разобьем на кубы Δ со сторонами l_k. Для каждого куба Δ подберем многочлен $P_\Delta f(x)$ степени, не превыщающей $m - 1$, для которого выполняется равенство

$$\int_\Delta (D^i f - D^i P_\Delta f)\,\mathrm{d}x = 0\,, \quad |i| \leqq m - 1\,.$$

Коэффициенты многочленов $P_\Delta f$ линейно зависят от f. Тогда имеем

(1.9)

$$\int_\Delta |f(x) - P_\Delta f(x)|^p \, t^\beta \,\mathrm{d}x \leqq t_{k-1}^{-\beta} \int_\Delta |f - P_\Delta f|^p \,\mathrm{d}x \leqq c t_{k-1}^{-\alpha+\beta} l_k^{mp} \int_\Delta t^\alpha \sum_{|i|=m} |D^i f|^p \,\mathrm{d}x\,.$$

Допустим, что числа l_k определены так чтобы

$$c t_{k-1}^{-\alpha+\beta} l_k^{mp} \leqq \varepsilon^p\,, \quad \forall k\,.$$

Положим

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} P_\Delta f(x)\,, & x \in \Delta\,, \\ 0\,, & t < \delta\,. \end{cases}$$

Тогда из неравенств (1.8) следует

$$(1.10) \qquad \|f - \tilde{f}\|_{L_\beta^p(y)} \leqq C\,\varepsilon \|f\|_{W_\alpha^{m,p}(y)}\,.$$

Поскольку $p/\omega \geqq \sigma = p/(mp - \alpha + \beta)$ справедливо неравенство

$$\sum_{s=1}^k l_s < t_k = \delta + \sum_{s=1}^k l_s \leqq c_1 \varepsilon^\sigma + \sum_{s=1}^k l_s\,.$$

Отсюда нетрудно видеть, что

$$l_k = a\varepsilon^\sigma k^\gamma\,, \quad t_k \sim \varepsilon^\sigma k^{m\sigma}\,, \quad \gamma = \frac{\alpha - \beta}{mp - \alpha + \beta}\,.$$

Из условия $t_h = 1$ следует, что $\varepsilon \sim h^{-m}$. Обозначим через L число линейно независимых многочленов степени, не превыщающей $m - 1$. Тогда, заключаем на основании (1.10), что существуют такие функции $\tilde{f}(x)$, принадлежащие $j = Lj'$ — мерному подпространству $L^p_\beta(y)$, что

(1.11) $$\|f - \tilde{f}\|_{L_\beta{}^p(y)} \leqq c\varepsilon\,, \quad f \in SW^{m,p}_\alpha(y)\,,$$

где

$$j' \sim \sum_{k=1}^{h} \frac{1}{l_k^{n-1}}\,.$$

Функции $\tilde{f}$ линейно зависят от f. При $\beta < \alpha - mp/n$ имеем

$$j = Lj' \sim \varepsilon^{-p(n-1)/(mp-\alpha+\beta)}\,.$$

Отсюда и из (1.11) следует (a). При $\beta = \alpha - mp/n$ справедливо

$$j \sim \varepsilon^{-p(n-1)/(mp-\alpha+\beta)} \log h\,, \quad \varepsilon \sim (j/\ln j)^{-m/n}\,.$$

Вместе с (1.11) это дает (b). Наконец, при $\beta > \alpha - mp/n$ имеем

$$j \sim \varepsilon^{-p(n-1)/(mp-\alpha+p)}\, h^{-(\alpha-\beta)(n-1)/(mp-\alpha+\beta)+1} = \varepsilon^{-n/m}\,.$$

Отсюда и из (1.11) следует (c).

2. Когда $\alpha \geqq 0$ и $\beta > 0$ вместо (1.9) будет справедливо неравенство

$$\int_\Delta |f(x) - P_\Delta f(x)|^p\, t^\beta\, \mathrm{d}x \leqq c t_k^\beta t_{k-1}^{-\alpha} l_k^{mp} \int_\Delta t^\alpha \sum_{|i|=m} |D^i f|^p\, \mathrm{d}x\,.$$

Будем иметь

$$l_k t_k^{\beta/mp} t_{k-1}^{-\alpha/mp} \sim \varepsilon^{1/m}\,, \quad l_k = a\varepsilon^\sigma k^\gamma\,.$$

Тогда справедливость (a)–(c) выводятся аналогично первой части 11 доказателства теоремы 1.3.

3. Пусть $\alpha < 0$, $\beta \leqq 0$. В силу теоремы 1.1 имеем

$$W^{m,p}_\alpha(y) \subset W^{m,p}(y) \subset L^p_\beta(y)\,.$$

Тогда

$$d_j(SW^{m,p}_\alpha(y), L^p_\beta(y)) \leqq d_j(SW^{m,p}(y), L^p_\beta(y))\,.$$

Следовательно, утверждение теоремы следует из пункта 1.

4. Если $\alpha < 0$ и $\beta > 0$, то имеем

$$W^{m,p}_\alpha(y) \subset W^{m,p}(y) \subset L^p(y) \subset L^p_\beta(y)\,.$$

Отсюда вытекает, что

$$d_j(SW^{m,p}_\alpha, L^p_\beta) \leqq d_j(SW^{m,p}, L^p_\beta) \leqq d_j(SW^{m,p}, L^p) \leqq cj^{-m/n}\,.$$

Теорема доказана полностью.

Замечание 1.1. По-видимому, можно таким же образом изучить аналогичные вопросы для весов более общего типа [4], [11], [13].

2. АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ БИЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ

Для $-1 < \alpha < 2m$ введем V_α-замкнутое подпространство $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$, содержащее $\mathring{W}_\alpha^{m,p}(\Omega)$. Пусть

$$a_{ij} \in L^\infty(\Omega)\,, \quad a_{ij} = \bar{a}_{ji}\,, \quad |i| = |j| = m\,. \tag{2.1}$$

Предположим, что существует $c_0 > 0$ такая, что

$$\sum_{|i|=|j|=m} a_{ij}(x)\,\xi_i\bar{\xi}_j \geqq c_0 \sum_{|i|=m} |\xi_i|^2 \tag{2.2}$$

для всех $\xi_i \in C$ и почти всех x из Ω.

Рассмотрим билинейную форму

$$a_\alpha(u, v) = \int_\Omega \varrho^\alpha \Big[\sum_{|i|=|j|=m} a_{ij} D^i u D^j \bar{v} + u\bar{v} \Big]\,dx\,,$$

для $u, v \in W_\alpha^{m,p}(\Omega)$.

В силу теоремы 1.1 $V_\alpha \hookrightarrow L^2(\Omega)$, а из леммы 1.2 и (2.1), (2.2) следует, что форма $a_\alpha(u, v)$ на V_α определяет норму

$$\|u\|_{V_\alpha} = \sqrt{(a_\alpha(u, u))}\,,$$

которая является эквивалентной норме пространства $W_\alpha^{m,2}(\Omega)$. Тогда существует самосопряженный неограниченный положительный оператор A_α в $L^2(\Omega)$ такой, что $\mathscr{D}(A_\alpha^{1/2}) = V_\alpha$. С другой стороны, имеем

$$d_j(S\mathring{W}_\alpha^{m,2}(\Omega), L^2(\Omega)) \leqq d_j(SV_\alpha, L^2(\Omega)) \leqq d_j(SW_\alpha^{m,2}(\Omega), L^2(\Omega))\,.$$

Отсюда и из теоремы 1.3, [14] получим

Теорема 2.1. *Пусть* $-1 < \alpha < 2m$ *и выполнены условия* (2.1), (2.2). *Тогда оператор A_α имеет чисто точечный спектр и справедливо*

$$\lambda_j \sim j^{(2m-\alpha)/(n-1)} \quad \textit{при} \quad \frac{2m}{n} < \alpha < 2m\,, \tag{a}$$

$$\lambda_j \geqq c(j/\ln j)^{2m/n} \quad \textit{при} \quad \alpha = \frac{2m}{n}\,, \tag{b}$$

$$\lambda_j \sim j^{2m/n} \quad \textit{при} \quad -1 < \alpha < \frac{2m}{n}\,. \tag{c}$$

Положим

$$N_{A_\alpha}(\lambda) = \sum_{|\lambda_j| \leqq \lambda} 1 .$$

Тогда из теоремы 2.1 *и* [3] *следует*

$$(2.3) \qquad N_{A_\alpha}(\lambda) + 1 \sim \begin{cases} \lambda^{(n-1)/(2m-\alpha)} + 1 , & \dfrac{2m}{n} < \alpha < 2m , \\ \lambda^{n/2m} + 1 , & -1 < \alpha < \dfrac{2m}{n} \end{cases}$$

и соответствующая оценка при $\alpha = 2m/n$. *Отметим, что впервые формулы* (2.3) *были получены в* [2], *когда* $V_\alpha = \mathring{W}_\alpha^{m,2}(\Omega)$ *или* $W_\alpha^{m,2}(\Omega)$ *и* $0 \leqq \alpha < 2m$.

Замечание 2.1. Вместо $a_\alpha(u, v)$ можно рассмотреть более обшую билинейную форму, которая определяет скалярное произведение эквивалентное искомому скалярному произведению гильбертова пространства $W_\alpha^{m,2}(\Omega)$. Кроме того, мы выше воспользовались тем, что

$$W_\alpha^{m,2}(\Omega) = \mathring{W}_\alpha^{m,2}(\Omega) , \quad \alpha > 2m - 1 .$$

3. НЕЛИНЕЙНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

В дальнейшем мы рассмотрим вещественные функции, определенные вобласти.

Пусть функции $a_{ij}(x)$ удовлетворяют условиям (2.1) и (2.2) при $|i|, |j| \leqq m$, $\xi_i \in R^1$. Введем

$$(3.1) \qquad b_{ij} \in L^\infty(\Gamma) ; \quad b_{ij} = b_{ji} ; \quad |i|, |j| \leqq m - 1 .$$

1. Для $|\alpha| < 1$ рассмотрим билинейную форму

$$(3.2) \qquad \mathscr{X}(u, v) = \sum_{|i|,|j| \leqq m} \int_\Omega \varrho^{\alpha_{ij}} a_{ij} D^i u D^i v \, dx + \sum_{|i|,|j| \leqq m-1} \int_\Gamma b_{ij} D^i u D_j v \, d\Gamma$$

для $u, v \in W_\alpha^{m,2}(\Omega)$, где

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \alpha , & |i| = |j| = m , \\ \frac{1}{2}\alpha , & |i| = m , \quad |j| \leqq m - 1 , \\ 0 , & |i|, |j| \leqq m - 1 . \end{cases}$$

Предположим, что выполнены:

(3.3) $g_i(x, \xi)$-вещественная непрерывная функция,

$$x \in \Omega , \quad \xi = \{\xi_j : |j| \leqq m - 1\} , \quad |i| \leqq m - 1 ;$$

(3.4) $$f \in L^2_\alpha(\Omega)\,, \quad \Phi \in W^{m,2}_\alpha(\Omega)\,;$$

(3.5) $$h \in V_\alpha \quad \text{такой, что} \quad \langle h, u\rangle_{W_\alpha{}^{m,2}(\Omega)} = 0 \quad \forall u \in \mathring{W}^{m,2}_\alpha(\Omega)\,.$$

Пусть существуют $c_1 > 0$ и $\delta \in [0, 1)$ такие, что

(3.6) $$|g_i(x, \xi)| \leqq c_1(1 + \sum_{|i| \leqq m-1} |\xi_i|^\delta)\,,$$

для всех $x \in \Omega$, $\xi = \{\xi_j : |j| \leqq m - 1\}$; $|i| \leqq m - 1$.

Для $u, v \in V_\alpha$ положим

$$\mathscr{S}(u, v) = \sum_{|i| \leqq m-1} \int_\Omega g_i(x, \nabla_{m-1} u + \nabla_{m-1} \Phi)\, D^i V \,\mathrm{d}x + \\ + \langle h, v\rangle_{W_\alpha{}^{m,2}(\Omega)} + \int_\Omega \varrho^\alpha f v \,\mathrm{d}x - \mathscr{L}(\Phi, v)\,.$$

В пространстве V_α введем скалярное произведение

$$\langle u, v\rangle_{V_\alpha} = \int_\Omega \varrho^\alpha [\sum_{|i|=|j|=m} a_{ij} D^j u D^i v + uv]\,\mathrm{d}x\,.$$

Имеет место при $|\alpha| < 1$ вложение

(3.7) $$W^{m,2}_\alpha(\Omega) \hookrightarrow W^{m-1,2}(\Omega)\,.$$

Тогда для фиксированного $u \in V_\alpha$ отображения

$$v \to \mathscr{L}(u, v)\,, \quad v \to \mathscr{S}(u, v)$$

являются линейными непрерывными функционалами на V_α. По теореме Рисса будем иметь соотношения

$$\langle Lu, v\rangle_{V_\alpha} = \mathscr{L}(u, v)\,, \quad \langle Su, v\rangle_{V_\alpha} = \mathscr{S}(u, v)\,, \quad u, v \in V_\alpha\,,$$

где L и S-ограниченные операторы в V_α. Для оператора $B = I - L$ справедливо представление

(3.8) $$\langle Bu, v\rangle_{V_\alpha} = - \sum_{\substack{|i|,|j| \leqq m \\ |i|+|j| < 2m}} \int_\Omega \varrho^{\alpha_{ij}} a_{ij} D^i u D^j v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \varrho^\alpha uv \,\mathrm{d}x - \\ - \int_\Gamma \sum_{|i|,|j| \leqq m-1} b_{ij} D^i u D^j v \,\mathrm{d}\Gamma\,.$$

Лемма 3.1. *Пусть* $|\alpha| < 1$ *и выполнены условия* (2.1), (3.1). *Тогда оператор* B *является вполне непрерывным в* V_α.

Доказательство. Пусть последовательность $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ слабо сходится к u в V_α. Ввиду ограниченности B последовательность $\{Bu_k\}$ слабо сходится к Bu в пространстве V_α. Кроме того, в силу компактности вложения (3.7) последовательности $\{u_k\}$ и $\{Bu_k\}$ сходятся сильно в $W^{m-1,2}(\Omega)$ к $u(x)$ и Bu соответственно. Также в силу теоремы 1.1 и следствия 1.1 имеем $\|u_k - u\|_{L_\alpha^2(\Omega)} \to 0$ и $D^i u_k/\Gamma$ сходится к $D^i u/\Gamma$ для всех $|i| \leqq m - 1$. Из (3.8) следует оценка

$$\|Bu_k - Bu\|_{V_\alpha}^2 \leqq c\big[\|u_k - u\|_{W^{m-1,2}(\Omega)} + \|Bu_k - Bu\|_{W^{m-1,2}(\Omega)} + \\ + \|u_k - u\|_{L_\alpha^2(\Omega)} + \sum_{|i| \leqq m-1} \|D^i u_k - D^i u\|_{L^2(\Gamma)}\big] .$$

Следовательно, $\{Bu_k\}_{k=1}^\infty$ действительно есть сильно сходящаяся в V_α последовательность. Значит, B является вполне непрерывным оператором.

Таким образом, для оператора L справедлива альтернатива Фредгольма. Из компактности (3.7) заключаем, что отображение $S : V_\alpha \to V_\alpha$ будет вполне непрерывным. Условие (3.6) означает, что существуют постоянные $\gamma \geqq 0$ и $\beta \geqq 0$ такие, что

$$\|Su\|_{V_\alpha} \leqq \gamma + \beta \|u\|_{V_\alpha}^\delta , \quad u \in V_\alpha .$$

С помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке [15] можно установить следующий результат.

Теорема 3.1. *Пусть* $|\alpha| < 1$ *и выполнены условия* (2.1), (2.2) *и* (3.1)–(3.6), $\operatorname{Ker} L = \emptyset$. *Тогда уравнение*

$$Lu = Su$$

имеет по крайней мере одно решение и из V_α.

2. Для целого $\alpha = 0, 1, \ldots, 2m - 1$ введем пространство

$$V_\alpha = \left\{ u : u \in W_\alpha^{m,2}(\Omega) , \quad \frac{\partial^k u}{\partial n^k}\bigg|_\Gamma = 0 , \quad k = 0, 1, \ldots, m - 1 - \alpha \right\} ,$$

при $\alpha = 0, 1, \ldots, m - 1$;

$$V_\alpha = W_\alpha^{m,2}(\Omega) \quad \text{при} \quad \alpha = m, m + 1, \ldots, 2m - 1 .$$

Рассмотрим формы

$$\mathscr{L}(u, v) = \sum_{|i|,|j| \leqq m} \int_\Omega \varrho^\alpha a_{ij} D^i u D^j v \, \mathrm{d}x ,$$

$$\mathscr{S}(u, v) = \sum_{|i| \leqq m-1} \int_\Omega \varrho^{\alpha/2} g_i(x, \varrho^{\alpha/2} \nabla_{m-1} u) \, D^i v \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \varrho^\alpha f v \, \mathrm{d}x$$

для $u, v \in V_\alpha$ и $f \in L_\alpha^2(\Omega)$. Справедливо компактное вложение

$$W_\alpha^{m,2}(\Omega) \hookrightarrow W_\alpha^{m-1,2}(\Omega) .$$

Аналогично пункту 1 определяются операторы L, S и B в пространстве V_α, причем S и B являются вполне непрерывными операторами.

Теорема 3.2. *Пусть* $\alpha = 0, 1, \ldots, 2m - 1$ *и выполнены условия* (2.1), (2.2), (3.3), (3.6) *и* $\operatorname{Ker} L = \emptyset$. *Тогда для любой* $f \in L^2_\alpha(\Omega)$ *уравнение*

$$Lu = Su \quad .$$

имеет хотя бы одно решение из V_α.

Здесь мы привели некоторые приложения теорем вложения для весовых пространств С. Л. Соболева к граничным задачам для вырождающихся эллиптических уравнений, когда уравнения вырождаются равномерно по всем координатным направлениям.

Литература

[1] *М. И. Вишик, В. В. Грушин:* Краевые задачи для эллиптических уравнений вырождающихся на границе области. Матем. сб. *80*, 1969, с. 455—491.

[2] *И. А. Соломещ:* Об асимптотике собственных значений билинейных форм, связанных с некоторыми вырождающимися на границе эллиптическими уравнениями. Докл. АН СССР, *144*, 1962, с. 727—729.

[3] *Х. Трибель:* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М. Изд.-во „Мир", 1980.

[4] *П. И. Лизоркин, М. Отелбаев:* Теоремы вложения и компактности для пространств соболевского типа с весами. Матем. сб. *112* (*154*), 1980, № 1, с. 56—85.

[5] *С. Л. Соболев:* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд.-во СО АН СССР, 1962.

[6] *В. А. Брюханов:* Об одном классе вырождающихся эллиптических уравнений. — Республиканский симпозиум по дифф. уравнениям (Тезисы докладов), Ашхабад, 1978.

[7] *В. П. Глушко, А. Д. Баев:* Об однозначной разрешимости краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка. В кн.: Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики, Новосибирск, 1980.

[8] *В. В. Катрахов:* Общие краевые задачи для одного класса сингулярных и вырождающихся эллиптических уравнений. Докл. АН СССР, 1980, *251*, № 6. с. 1296—1300.

[9] *N. Shimykura:* Problems aux limites generaux du type elliptique degeneres. J. Math. Kyoto Univ. *9*, 1969, p. 275—335.

[10] *P.Bolley, J. Camus:* Sur une class d'opérateurs elliptiques et dégénérés a plusieurs variables. Bull. Soc. Math. France, Suppl. Mem. *34*, 1973, p. 55—140.

[11] *J. Nečas:* Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine de la variationnelle. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa *16*, 1962, p. 305—326.

[12] *O. V. Besov, A. Kufner:* The density of smooth functions in weight spaces. Czechoslovak Math. J. *18* (*93*), 1968, p. 178—188.

[13] *A. Kufner:* Weighted Sobolev Spaces. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1980.

[14] *A. Al Kolli:* *n*-ième Épaisseur dans les Espaces de Sobolev. J. Approximation Theory *10*, 1974, p. 268—294.

[15] *S. Fučík, J. Nečas, V. Souček:* Spéctral analysis of nonlinear operators. Lecture Notes in Mathematics, 346, Springer-Verlag, 1973.

Адрес автора: Кафедра вычислительной математики, Якутский государственный университет, 677007, Якутск, СССР.