Milada Kočandrlová

Isoperimetrische Ungleichung für geschlossene Raumsechsecke

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 108 (1983), No. 3, 248--257

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/118172`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 108 (1983), Praha

# ISOPERIMETRISCHE UNGLEICHUNG FÜR GESCHLOSSENE RAUMSECHSECKE

MILADA KOČANDRLOVÁ, Praha

(Eingegangen 31. Mai 1982)

## 1. EINLEITUNG

Im dreidimensionalen euklidischen Raum $E_3$ werden wir die isoperimetrische Ungleichung für geschlossene Raumsechsecke suchen, welche die Abhängigkeit zwischen der Länge des geschlossenen Raumsechseckes und dem Rauminhalt dessen konvexer Hülle angibt.

Bezeichnen wir mit $V$ den Rauminhalt und mit $L$ die Länge des geschlossenen Raumsechseckes $\mathscr{A}$. Die Aufgabe lösen wir durch die Auffindung der isoperimetrischen Konstante $k$ — der oberen Grenze der Werte $V/L^3$ (obere Grenze über alle geschlossenen Raumsechsecke $\mathscr{A}$). Die isoperimetrische Ungleichung wird dann folgende Form haben

$$V \leqq kL^3 . \tag{1}$$

Zugleich werden wir diejenigen geschlossenen Raumsechsecke suchen, für die in der Beziehung (1) das Gleichheitszeichen gilt. Wir beweisen, daß $k = 1/(2^2 \,.\, 3^4)$ ist und daß ein regelmäßiges Sechseck, für das $V = kL^3$ gilt, existiert, wobei seine zwei gegenüberliegenden Seiten immer parallel und zwei verschiedene, nicht gegenüberliegende Seiten immer aufeinander senkrecht sind.

Die zur Lösung bestimmte Aufgabe ist ein Teilergebnis bei der Lösung des Problems, das im Jahre 1934 von T. Bonnesen und W. Fenchel in [1] formuliert wurde: „Zwischen allen geschlossenen rektifizierbaren Kurven von gegebener Länge ist diejenige zu bestimmen, die den maximalen Rauminhalt ihrer konvexen Hülle hat.“ Diese Aufgabe kann man sowohl für geschlossene als auch für offene Kurven in $E_n$ lösen. In Hinsicht auf die Parität der Raumdimension erhalten wir dann vier isoperimetrische Aufgaben: $n$ ist gerade und die Kurve ist geschlossen; $n$ ist gerade und die Kurve ist offen; $n$ ist ungerade und die Kurve ist offen; $n$ ist ungerade und die Kurve ist geschlossen. Die erste Aufgabe löste in der Klasse der geschlossenen konvexen Kurven I. J. Schoenberg im Jahre 1954 in [11] und in der Klasse der geschlossenen konvexen $N$-Ecken, $N \geqq n + 1$, A. A. Nudel'man im Jahre 1975 in [10]. Die zweite Aufgabe in der Klasse der konvexen Kurven löste A. A. Nudel'man im Jahre

1975 in [10]. Die dritte Aufgabe in der Klasse der konvexen Kurven in $E_3$ löste E. Egervary im Jahre 1949 in [2]. Das Ergebnis von Egervary verallgemeinerten M. G. Krein und A. A. Nudel'man im Jahre 1973 in [5]. Das überhaupt erste, obgleich nur teilweise, Ergebnis in Raum ungerader Dimension für die Klasse geschlossener konvexer Kurven (die sog. vierte Aufgabe) ist der Verdienst von B. Míšek. In seiner Arbeit [9] aus dem Jahre 1959 löste er die isoperimetrische Aufgabe, ohne Existenznachweis, in der Klasse der geschlossenen konvexen $(n + 1)$-Ecken in $E_n$. Das zweite Teilergebnis gehört dem kanadischen Mathematiker Z. A. Melzak. In seinen Arbeiten [6], [7], [8] aus den Jahren 1960—68 löst er die isoperimetrische Aufgabe in $E_3$ für eine Klasse sehr spezieller Kurven.

Führen wir vorerst die Bezeichnungen an, die wir im weiteren verwenden werden. Ist $\mathscr{X}$ ein räumliches $n$-Eck mit den Ecken $X_1, \ldots, X_n$, dann schreiben wir $\mathscr{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, wenn $\mathscr{X}$ ein offenes $n$-Eck ist, und $\mathscr{X} = [X_1, \ldots, X_n]$, wenn $\mathscr{X}$ ein geschlossenes $n$-Eck ist. Die Länge des $n$-Eckes $\mathscr{X}$ werden wir immer mit dem Symbol $L(\mathscr{X})$ bezeichnen. Das Maß im Raum $E_3$ bezeichnen wir mit dem Symbol $V$, das Maß in jeder euklidischen Ebene bezeichnen wir mit $P$. Die konvexe Hülle der Menge $M$ bezeichnen wir mit $H(M)$. Anstelle von „geschlossenes Raumsechseck" sagen wir im weiteren nur Sechseck.

Bevor wir an die eigentliche Lösung der Aufgabe herantreten, führen wir die Klassifikation der Raumsechsecke aus. Dabei gehen wir von der in [4] ausgeführten Klassifikation der konvexen Polyeder mit sechs Ecken aus.

Es sei also das Sechseck $\mathscr{A} = [A_1, \ldots, A_6]$ gegeben. Wir können uns offenbar auf den Fall beschränken, wo $\mathscr{A}$ in keinem Unterraum des Raumes $E_3$ liegt. Sind dann die Punkte $A_1, \ldots, A_6$ konvex abhängig. d.i. existiert der Punkt $A_i$, $1 \leqq i \leqq 6$, so daß $A_i \in H(\{A_1, \ldots, A_6\} \dot{-} \{A_i\})$ ist, dann ist die konvexe Hülle der Menge $\{A_1, \ldots, A_6\}$ entweder ein Simplex oder zwei Simplexe mit gemeinsamer Seite. Die isoperimetrische Ungleichung für solche Sechsecke ist einfach (siehe z.B. [3]). Wir werden deshalb weiter voraussetzen, daß die Menge der Ecken eines jeden Sechseckes konvex unabhängig ist.

Gemäß [4] zerfällt dann die Menge aller Sechsecke in zwei Klassen. In der ersten Klasse werden diejenigen Sechsecke sein, deren konvexe Hülle die Vereinigung von drei Simplexen ist, von denen keine zwei einen gemeinsamen inneren Punkt haben. Diese drei Simplexe haben dann eine gemeinsame Kante. In der zweiten Klasse sind die restlichen Sechsecke. Deren konvexe Hülle kann man als die Vereinigung von vier Simplexen ausdrücken, von denen keine zwei einen gemeinsamen inneren Punkt haben und alle eine gemeinsame Kante haben (ausführlicher vgl. [4]).

Die Sechsecke der ersten Klasse teilen wir in drei Unterklassen demgemäß ein, welches Eckenpaar die gemeinsame Kante $h$ von drei, die konvexe Hülle des Sechseckes bildenden, Simplexen bestimmt. Bezeichnen wir $A_7 = A_1$, $A_8 = A_2$ und $A_9 = A_3$, dann ist das Sechseck $\mathscr{A} = [A_1, \ldots, A_6]$ von der Klasse $T1$ bzw. $T2$ bzw. $T3$, wenn $i$, $1 \leqq i \leqq 6$ existiert, so daß die Kante $h$ die Kante $A_iA_{i+1}$ bzw. $A_iA_{i+2}$ bzw. $A_iA_{i+3}$ ist.

Die Sechsecke der zweiten Klasse teilen wir nur in zwei Unterklassen $T4$ und $T5$ ein. Das Sechseck $\mathscr{A} = [A_1, \ldots, A_6]$ gehört in die Klasse $T5$, wenn dessen jede Seite eine Kante der konvexen Hülle ist. Die Klasse $T4$ bilden die restlichen Sechsecke (für die daher eine Seite existieren wird, die keine Kante deren konvexer Hülle sein wird).

Die isoperimetrische Ungleichung werden wir sukzessive für jede eingeführte Klasse der Sechsecke untersuchen. Vorerst führen wir jedoch Hilfssätze an, die wir im weiteren verwenden werden.

**Lemma 1.** *Es sei die konvexe Hülle $H(\mathscr{A})$ des Sechseckes $\mathscr{A}$ die Vereinigung von drei oder vier Simplexen mit gemeinsamer Kante $h$ – die Größe dieser Kante bezeichnen wir mit $d$. Projizieren wir die Menge $H(\mathscr{A})$ in der Richtung der Kante $h$ in die auf die Projektionsrichtung senkrechte Bildebene $\pi$. Diese Projektion bezeichnen wir mit $\varphi$. Dann gilt $V(H(\mathscr{A})) = (1/3)\, d\, P(\varphi(H(\mathscr{A})))$.*

Beweis. Wir können uns leicht von folgendem überzeugen: Wenn wir ein, von den die Menge $H(\mathscr{A})$ bildenden Simplexen – bezeichnen wir es mit $S$ – projizieren, so ist $V(S) = (1/3)\, d\, P(\varphi(S))$. Daraus geht schon die Behauptung hervor.

Die im Lemma 1 verwendeten Symbole $h, d, \pi, \varphi$ werden die gleiche Bedeutung in der ganzen Arbeit haben, speziell die Projektionsrichtung wird immer senkrecht auf die gewählte Bildebene sein. Das nachfolgende Lemma ist evident.

**Lemma 2.** *Es sei $\mathscr{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ ein offenes k-Eck. Dann existiert genau ein offenes k-Eck $\mathscr{X}^0 = (X_1^0, \ldots, X_k^0)$, so daß*

1) $\varphi(X_i) = \varphi(X_i^0)$, $i = 1, \ldots, k$;

2) $X_1^0 = X_1$, $X_k^0 = X_k$;

3) *Bilden wir durch das k-Eck $\mathscr{X}$ eine Prismenfläche mit den zur Projektionsrichtung parallelen erzeugenden Geraden, und wickeln wir diese Fläche in eine Ebene ab, so wird das k-Eck $\mathscr{X}^0$ in eine Strecke abgewickelt.*

*Für das k-Eck $\mathscr{X}^0$ gilt dann $L(\mathscr{X}^0) \leqq L(\mathscr{X})$ und $L(\mathscr{X}^0) = L(\mathscr{X})$ genau dann, wenn $\mathscr{X}^0 = \mathscr{X}$ ist.*

Beim Suchen der isoperimetrischen Konstante für die einzelnen Klassen der Sechsecke werden wir nun so vorgehen, daß wir von einem beliebigen Sechseck $\mathscr{A}$ der Klasse ausgehen. Wir projizieren dieses in der Richtung der gemeinsamen Kante der (dessen konvexe Hülle bildenden) Simplexe in die Bildebene $\pi$. Hierauf werden wir seine Länge mit Verwendung von Lemma 2 auf irgendeinem Teil des Sechseckes einerseits verringern und werden andererseits, bei Beibehaltung der Länge, den Flächeninhalt der Projektion dessen konvexer Hülle und dadurch auch den Rauminhalt dessen konvexer Hülle vergrößern (Lemma 1). Diesen Vorgang werden wir mit den Methoden von Auffinden der Extrema einer Funktion einer oder mehreren Variablen kombinieren.

A n m e r k u n g 1: Jedes Sechseck im Raum $E_3$ kann man als einen Punkt im 3.6-dimensionalen Raum $R^{18}$ betrachten. Alle Sechsecke von gegebener Länge $L$ mit einer Ecke im Festpunkt des Raumes $E_3$ bilden offenbar eine kompakte Menge im Raum $R^{18}$. Die Existenz des Sechseckes, das bei gegebener Länge einen maximalen Rauminhalt der konvexen Hülle hat, erhalten wir aus dem bekannten Satz über, stetige Funktionen auf einer kompakten Menge. Auf die gleiche Weise kann man aus diesem Satz die Existenz anderer räumlicher bzw. ebener $k$-Ecke erhalten, die bei gegebener Länge den größten Rauminhalt bzw. den größten Flächeninhalt ihrer konvexen Hülle haben.

Nun treten wir bereits an die Auffindung der isoperimetrischen Ungleichung für die Sechsecke der einzelnen Klassen heran. Die isoperimetrische Konstante für die Sechsecke der Klasse $Ti$ bezeichnen wir mit $k_i$, $i = 1, \ldots, 5$, und die entsprechende isoperimetrische Ungleichung wird die Form $V \leqq k_i L^3$ eventuell $V < k_i L^3$ haben (insofern das Sechseck, das bei gegebener Länge $L$ einen maximalen Rauminhalt der konvexen Hülle hat, nicht existieren wird).

## 2. SECHSECKE DER KLASSE $T1$

Es sei $\mathscr{A} = [A_1, \ldots, A_6]$ ein geschlossenes Sechseck der Klasse $T1$. Es sei $A_1A_6$ die gemeinsame Kante von drei Simplexen, die dessen konvexe Hülle $H(\mathscr{A})$ bilden. In der Richtung $A_1A_6$ wird das gegebene Sechseck $\mathscr{A}$ in das ebene Sechseck $\mathscr{A}' = [A'_1 = A'_6, A'_2, \ldots, A'_5]$ von der Länge $L'$ projiziert. Offenbar hat das regelmäßige Fünfeck $\mathscr{B}' = [B'_1, \ldots, B'_5]$ (in der Ebene $\pi$) der Länge $L'$ einen Flächeninhalt $P(H(\mathscr{B}'))$, der größer als der Flächeninhalt $P(H(\mathscr{A}'))$ dieser Projektion $\mathscr{A}'$ ist oder diesem Flächeninhalt gleich ist. Wir konstruieren das Raumsechseck $\mathscr{B} = [B_1, \ldots, B_6]$ so, daß $\varphi(B_1) = \varphi(B_6) = B'_1$, $\varphi(B_i) = B'_i$ für $i = 2, \ldots, 5$, daß das Sechseck $(B_1, \ldots, B_6)$ sich in eine Strecke abwickelt und daß $|B_1B_6| = |A_1A_6| = d$ ist. Offenbar ist $L(\mathscr{B}) \leqq \leqq L(\mathscr{A})$ und $V(H(\mathscr{B})) \geqq V(H(\mathscr{A}))$. Die isoperimetrische Konstante für die Sechsecke der Klasse $T1$ erhalten wir nun durch Auffindung des Extrems der Funktion $V(H(\mathscr{B}))/L^3(\mathscr{B}) = (1/3)\, P(H(\mathscr{B}'))\, d/L^3(\mathscr{B})$ der Variablen $d \in \langle 0, L/2 \rangle$. Das Extrem entsteht im Punkt $d = L/4$ und dessen Wert ist $k_1 = (\operatorname{cotg}(\pi/5))/(2^5 \,.\, 3.5)$. Wenn wir diese Konstante numerisch bestimmen, so gilt:

**Satz 1.** *Für den Rauminhalt V der konvexen Hülle der Sechsecke der Klasse T1 von konstanter Länge L gilt die Ungleichung*

$$V \leqq k_1 L^3 ,$$

*wo* $k_1 \doteq 0{,}0028674623$ *ist, mit der Gleichheit eben für die Sechsecke, die sich in der Richtung der Kante h, von der Größe* $d = L/4$, *in ein regelmäßiges Fünfeck projizieren und sich in eine Strecke abwickeln.*

## 3. SECHSECKE DER KLASSE $T2$

Es sei $\mathscr{A} = [A_1, \ldots, A_6]$ ein geschlossenes Sechseck der Klasse $T2$. Es sei $A_1A_3$ die gemeinsame Kante (deren Größe $d$ ist) von drei Simplexen, die dessen konvexe Hülle $H(\mathscr{A})$ bilden. Die Projektion $\mathscr{A}'$ dieses Sechseckes wird durch das Viereck $\mathscr{A}'_1 = [A'_1 = A'_3, A'_4, A'_5, A'_6]$ von der Länge $L'_1$ und durch die Strecke $A'_1A'_2$ von der Länge $L'_2/2$ gebildet. Wir konstruieren das ebene Sechseck $\mathscr{B}' = [B'_1, \ldots, B'_6]$, das durch das Trapez $\mathscr{B}'_1 = [B'_3, B'_4, B'_5, B'_6]$ und durch die Strecke $B'_3B'_2$ von der Länge $L'_2/2$ gebildet wird. Das Trapez $\mathscr{B}'_1$ konstruieren wir so, daß $B'_3B'_4$ eine seine Basis ist, die der Größe $b$ der längsten Seite des Viereckes $\mathscr{A}'_1$ gleich ist, und daß die zweite Basis $B'_5B'_6$ und beide Schenkel $B'_4B'_5$, $B'_3B'_6$ gleich groß sind. Die Strecke $B'_2B'_3$ ist auf die Basis $B'_3B'_4$ senkrecht und liegt in der dem Trapez entgegengesetzten Halbebene mit der Grenzgeraden $B'_3B'_4$.

Das die beschriebenen Bedingungen erfüllende ebene Sechseck mit maximalem Flächeninhalt seiner konvexen Hülle bestimmen wir durch Auffindung des Extrems des Flächeninhaltes $P(H(\mathscr{B}'))$ des konstruierten Sechseckes $\mathscr{B}'$ als Funktion der Variablen $b$ im Intervall $\langle L'_1/4, L'_1/2\rangle$. Durch Berechnung ergibt sich $P(H(\mathscr{B}'))= = (1/4)((1/3\sqrt{3})(L'_1 + 2b)\sqrt{(L'_1 - 4b^2)} + L'_2)$, $L'_1, L'_2$ ist konstant. Durch Ableitung der Funktion $P(H(\mathscr{B}'))$ gemäß $b$ erhalten wir die notwendige und hinreichende Bedingung für das Extrem

$$(3L'_2/2)\sqrt{(3(L'^2_1 - 4b^2))} - (8b^2 + 2bL'_1 - L'^2_1) = 0\,. \tag{2}$$

Man kann beweisen, daß zu jedem $L'_2 \in \langle 0, +\infty)$ genau ein $b \in \langle L'_1/4, L'_1/2)$ existiert, welches die erhaltene Gleichung löst.

Über das bestimmte extremale Sechseck $\mathscr{B}'^0$ können wir nun das Raumsechseck

$$\mathscr{B}^0 = [B^0_1, \ldots, B^0_6]\,, \quad |B^0_1B^0_3| = |A_1A_3| = d$$

so konstruieren, daß das offene Dreieck $(B^0_1, B^0_2, B^0_3)$ und das offene Fünfeck $(B^0_3, B^0_4, B^0_5, B^0_6, B^0_1)$ in Strecken abgewickelt werden.

Nun werden wir für die konstruierten Sechsecke $\mathscr{B}^0$ das Maximum der Funktion $V(\mathscr{B}^0)/L^3(\mathscr{B}^0)$ suchen. Da gleichgerichtete Sechsecke den gleichen Wert des Quotienten $V/L^3$ haben, können wir voraussetzen, daß $b$ konstant ist, und aus der Gleichung (2) $L'_2$ ausdrücken und in die Formel für $P(H(\mathscr{B}'))$ einsetzen. Für jedes $L'_1$, $b$ und $d$ erhalten wir nun den Rauminhalt der konvexen Umhüllung des entsprechenden Sechseckes $\mathscr{B}^0$:

$$V(H(\mathscr{B}^0)) = (1/3)\,P(H(\mathscr{B}'^0))\,d = \frac{d(2b + L'_1)(L'^2_1 - 2bL'_1 + 4b^2)}{36\sqrt{(3(L'^2_1 - 4b^2))}}$$

und seine Länge $L = L(\mathscr{B}^0) = \sqrt{(L'^2_1 + d^2)} + \sqrt{(d^2 + L'^2_2)}$. Nun suchen wir das Extrem der Funktion $V(\mathscr{B}^0)/L^3(\mathscr{B}^0)$ als einer Funktion der Veränderlichen $d/L'_1$ und $b/L'_1$, $d/L'_1 \in \langle 0, +\infty)$, $b/L'_1 \in \langle 1/4, 1/2)$. Durch numerische Berechnung erhalten wir die Konstante $k_2$ und können folgenden Satz aussprechen:

**Satz 2.** *Für den Rauminhalt $V$ der konvexen Hülle der Sechsecke der Klasse $T2$ von konstanter Länge $L$ gilt die Ungleichung*

$$V \leqq k_2 L^3 ,$$

*wo $k_2 \doteq 0{,}00289938$ ist. Hierbei gilt für das Sechseck $\mathscr{B}^1 = [B_1^1, \ldots, B_6^1]$ die Gleichheit genau dann, wenn das Sechseck $\mathscr{B}^1$ folgende Eigenschaften hat:*

a) *Das Sechseck $\mathscr{B}^1$ projiziert sich in der Richtung der gemeinsamen Kante von drei, dessen konvexe Hülle bildenden Simplexen in ein Sechseck, das aus einem gleichschenkligen Trapez und einer Strecke mit den oben beschriebenen Eigenschaften zusammengesetzt ist.*

b) *Bezeichnen wir $L^1, L_1'^1, L_2'^1, b^1, d^1$ der Reihe nach die Werte der Parameter $L, L_1', L_2', b, d$ für das Sechseck $\mathscr{B}^1$, so ist $L_1'/L^1 = \lambda_1$, $L_2'^1/L^1 = \lambda_2$, $b'/L^1 = \beta$, $d^1/L^1 = \delta$, wo $\lambda_1, \lambda_2, \beta, \delta$ Konstanten sind. Diese Konstanten kann man mit beliebiger Genauigkeit numerisch berechnen. So z.B. ist $\lambda_1 \doteq 0{,}6275154$, $\lambda_2 \doteq 0{,}1688266$, $\beta \doteq 0{,}2066338$, $\delta \doteq 0{,}2687282$.*

## 4. SECHSECKE DER KLASSE $T3$

Es sei $\mathscr{A} = [A_1, \ldots, A_6]$ ein geschlossenes Sechseck der Klasse $T3$. Es sei $A_1A_4$ die gemeinsame Kante von drei, dessen konvexe Hülle bildenden Simplexen. Die Projektion $\mathscr{A}'$ des Sechseckes $\mathscr{A}$ wird durch die zwei Dreiecke $U_1 = [A_1', A_2', A_3']$ und $U_2 = [A_4', A_5', A_6']$ gebildet, (es ist $A_1' = A_4'$). Zum Dreieck $U_1$ bzw. $U_2$ bestimmen wir in $\pi$ das gleichschenklige Dreieck $U_1'$ bzw. $U_2'$ mit gleichem Umfang über der Basis, die der längsten Seite des Dreieckes $U_1$ bzw. $U_2$ gleich ist. Die Dreiecke $U_1'$ und $U_2'$ ordnen wir so, daß ihre Basen einen gemeinsamen Eckpunkt haben, einen rechten Winkel einschließen und die, den Basen gegenüberliegende, Ecken außerhalb dieses Winkels sind.

Bezeichnen wir mit $2a$ bzw. $2b$ die Größe der Basis des Dreieckes $U_1'$ bzw. $U_2'$. Wenn wir die Diskussion der gegenseitigen Lage der Dreiecke $U_1, U_2$ ausführen und $P' = P(H(U_1')) + P(H(U_2')) + 2ab$ setzen, so überprüfen wir leicht, daß $P(H(\mathscr{A}')) \leqq$ $\leqq P'$ ist ($2ab$ ist der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten die Basen der Dreiecke $U_1', U_2'$ sind). Bezeichnen wir noch mit $2\alpha$ bzw. $2\beta$ die Größe des Winkels des, zu dessen Basis anliegenden, Dreieckes $U_1'$ bzw. $U_2'$. Wir stellen leicht fest, daß

(3) $$P' = a^2 \operatorname{tg} 2\alpha + b^2 \operatorname{tg} 2\beta + 2ab \quad \text{ist} .$$

Die Länge des durch die Dreiecke $U_1', U_2'$ gebildeten Sechseckes $\mathscr{B}'$ ist dann

(4) $$L' = 2a + 2b + \frac{2a}{\cos 2\alpha} + \frac{2b}{\cos 2\beta} .$$

Wir suchen das Maximum der Funktion $P'$ der Veränderlichen $a, b, \alpha, \beta$ unter der

Bedingung, daß $L'$ konstant ist. Mit den üblichen Methoden beweisen wir, daß im Punkt $(a_0, b_0, \alpha_0, \beta_0)$, in dem die Funktion $P'$ ihr Maximum erlangt, $a_0 = b_0$, $\alpha_0 = \beta_0$ ist, und daß $\operatorname{tg} \alpha_0$ die Wurzel des Polynoms $2x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ aus dem Intervall $\langle 0, 1 \rangle$ ist (in diesem Intervall hat das erwähnte Polynom eben eine Wurzel). Durch die numerische Berechnung erhalten wir $\operatorname{tg} \alpha_0 = 0{,}355415727$. Drücken wir aus (4) $a_0$ aus und setzen in (3) ein, so erhalten wir nach einer Umformung den Höchstwert $\bar{P}'$ der Funktion $P'$:

$$\bar{P}' = \frac{L'^2}{4 \, . \, 32} (5 + 4 \operatorname{tg} \alpha_0 - 7 \operatorname{tg}^2 \alpha_0) \, .$$

Das durch die Dreiecke $U'_1, U'_2$ gebildete Sechseck, für das die Funktion $P'$ ihr Maximum erlangt, bezeichnen wir mit $\mathscr{B}'^0 = [B'^0_1, \ldots, B'^0_6]$ $(B'^0_1 = B'^0_4)$. Da $\alpha_0 < \pi/4$ ist, ermitteln wir leicht, daß $P(H(\mathscr{B}'^0)) = \bar{P}'$ ist.

Über dem gefundenen Sechseck $\mathscr{B}'^0$ konstruieren wir wieder das Raumsechseck $\mathscr{B}^0 = [B^0_1, \ldots, B^0_6]$, so daß $|B^0_1 B^0_4| = |A_1 A_4| = d$ ist und daß die offenen Vierecke $(B^0_1, B^0_2, B^0_3, B^0_4)$ und $(B^0_4, B^0_5, B^0_6, B^0_1)$ sich in Strecken abwickeln. Man kann leicht überprüfen, daß $\mathscr{B}^0$ ein Sechseck der Klasse $T3$ und $B^0_1 B^0_4$ die gemeinsame Kante von drei, dessen konvexe Hülle bildenden, Simplexen ist. Der Rauminhalt der konvexen Hülle des gefundenen Sechseckes $\mathscr{B}^0$ ist $V(H(\mathscr{B}^0)) = (1/3) \, d\bar{P}'$. Seine Länge ist $L(\mathscr{B}^0) = \sqrt{(L'^2 + 4d^2)}$. Die Funktion $V(H(\mathscr{B}^0))/L^3(\mathscr{B}^0) = \bar{P}' \, . \, d/(3\sqrt{(L'^2 + 4d^2)^3})$, wo $d \in \langle 0, +\infty)$, erreicht ihr Maximum im Punkt $d = L'/(2\sqrt{2})$. Nach dem Einsetzen der gefundenen Werte $d$ und $\operatorname{tg} \alpha$ und nach numerischer Berechnung erhalten wir die isoperimetrische Konstante $k_3$ als Maximum der konstruierten Funktion $V(H(\mathscr{B}^0))/L^3(\mathscr{B}^0)$ (Funktion der Variablen $d$).

**Satz 3.** *Für den Rauminhalt $V$ von Raumsechsecken der Klasse $T3$ von konstanter Länge $L$ gilt die Ungleichung*

$$V \leqq k_3 L^3 \, ,$$

*wo $k_3 \doteq 0{,}002775200727$ ist, mit der Gleichheit genau dann,*

a) *wenn sich das Sechseck $\mathscr{B}^1$ in der Richtung der gemeinsamen Kante von drei, dessen konvexe Hülle bildenden Simplexen in das Sechseck $\mathscr{B}'^1$ projiziert, das durch die zwei kongruenten gleichschenkligen Dreiecke $T_1, T_2$ gebildet wird;*

b) *die Basen der Dreiecke $T_1$ und $T_2$ haben einen gemeinsamen Eckpunkt, schließen einen rechten Winkel ein, und die Dreiecke $T_1$ und $T_2$ liegen außerhalb dieses Winkels;*

c) *bezeichnen wir mit $2\alpha$ den Winkel im Dreieck $T_1$ (bzw. $T_2$) an dessen Basis, dann ist $2 \operatorname{tg}^3 \alpha - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \operatorname{tg} \alpha + 1 = 0$ $(\alpha \doteq 19{,}566013°)$;*

d) *bezeichnen wir mit $d^1$ bzw. $L'^1$ die Werte der Parameter $d, L'$ für das Sechseck $\mathscr{B}^1$, so ist $d^1 = L'^1/(2\sqrt{2})$.*

## 5. SECHSECKE DER KLASSE $T4$

Es sei das Sechseck $\mathscr{A} = [A_1, \ldots, A_6]$ von der Klasse $T4$. Es sei mindestens eine von seinen Seiten, z.B. $A_1A_6$ die innere Kante dessen konvexer Hülle. Die Projektion des Sechseckes $\mathscr{A}$ in der Richtung von $A_1A_6$ ist das Sechseck $\mathscr{A}' = [A'_1, \ldots, A'_6]$, und $A'_1 = A'_6$ ist ein innerer Punkt von dessen konvexer Hülle, da die konvexe Hülle des Sechseckes $\mathscr{A}$ durch vier Simplexe mit gemeinsamer Kante $A_1A_6$ gebildet wird. Die Länge des Sechseckes $\mathscr{A}'$ bezeichnen wir mit $L'$. Wir konstruieren ein Quadrat mit den Ecken $B'_2, B'_3, B'_4, B'_5$ und dem Umfang $L'$. Den Mittelpunkt der Seite $B'_2B'_5$ des konstruierten Quadrats bezeichnen wir mit $B'_1 = B'_6$. Konstruieren wir über dem Sechseck $\mathscr{B}' = [B'_1, \ldots, B'_6]$ das Sechseck $\mathscr{B} = [B_1, \ldots, B_6]$, so daß $|B_1B_6| = |A_1A_6| = d$ ist und das offene Sechseck $(B_1, \ldots, B_6)$ sich in eine Strecke abwickelt, so wird der Rauminhalt dessen konvexer Hülle $V(H(\mathscr{B})) = (1/3)\, d\, P(H(\mathscr{B}'))$. Das konstruierte Sechseck gehört in die Klasse $T1$. Wir können uns davon überzeugen, daß für dieses $V(H(\mathscr{B})) > V(H(\mathscr{A}))$ gilt und seine Länge kleiner als die Länge des Sechseckes $\mathscr{A}$ (oder ihr gleich) ist. Die isoperimetrische Konstante $k_4$ bestimmen wir durch Auffindung des Extrems der Funktion $V(H(\mathscr{B}))/L^3(\mathscr{B})$ der Veränderlichen $d$. Das Sechseck $\mathscr{B}^0$, für das diese Funktion den Höchstwert $k_4$ erlangt, gehört allerdings auch in die Klasse $T1$. Für dieses gilt jedoch, daß zu jedem reellen $\varepsilon > 0$ das Sechseck $\mathscr{A}_\varepsilon$ der Klasse $T4$ existiert, für das $L(\mathscr{A}_\varepsilon) < L(\mathscr{B}^0) + \varepsilon$ und $V(H(\mathscr{A}_\varepsilon)) > V(H(\mathscr{B}^0)) - \varepsilon$ ist. Die Zahl $k_4$ ist also das Supremum aller Werte $V(H(\mathscr{A}))/L^3(\mathscr{A})$ für alle Sechsecke $\mathscr{A}$ von der Klasse $T4$. Durch die numerische Berechnung erhalten wir $k_4 = 1/(3.2^7) = 0{,}0026041\bar{6}$.

**Satz 4.** *Für den Rauminhalt V der konvexen Hülle der Sechsecke der Klasse T4 von der Länge L gilt die Ungleichung*

$$V < k_4 L^3 ,$$

*wo* $k_4 = 0{,}0026041\bar{6}$ *das Supremum der Funktion* $V/L^3$ *an der Menge aller Sechsecke der Klasse T4 ist.*

## 6. SECHSECKE DER KLASSE $T5$

Es sei $\mathscr{A} = [A_1, \ldots, A_6]$ ein Sechseck der Klasse $T5$. Jede Seite des Sechseckes ist eine Kante dessen konvexer Hülle. Ein Beispiel für diesen Typ der konvexen Hülle ist das regelmäßige Oktaeder. Die konvexe Hülle können wir auf drei Arten als eine Vereinigung von vier Simplexen schreiben. Man kann sich davon überzeugen, daß wir das mindestens einmal so ausführen können, daß die gemeinsame Kante der vier Simplexe die Seite $A_iA_{i+3}$ des Sechseckes $\mathscr{A}$, $1 \leqq i \leqq 3$ ist, bei passender Numerierung der Ecken wird das die Seite $A_1A_4$ sein. In der Richtung dieser Kante projizieren wir das Sechseck $\mathscr{A}$ in die Bildebene $\pi$. Für die Projektion $\mathscr{A}' = [A'_1, \ldots, A'_6]$ ist $A'_1 =$

$= A'_4 \in H(\{A'_2, A'_3, A'_5, A'_6\})$. Die Länge des Sechseckes $\mathscr{A}'$ bezeichnen wir mit $L'$. Vorerst lösen wir die Hilfsaufgabe:

In der Menge $\mathscr{M}'$ aller geschlossenen Sechsecke $\mathscr{X}' = [X'_1, \ldots, X'_6]$ in der Ebene $\pi$, für die gilt, daß

1. ihre Länge der Zahl $L'$ gleich ist;
2. $X'_1 = X'_4 \in H(\{X'_2, X'_3, X'_5, X'_6\})$ ist;

ist das Sechseck mit dem maximalen Flächeninhalt dessen konvexer Hülle aufzufinden.

Die Existenz des gesuchten Sechseckes $\mathscr{B}' = [B'_1, \ldots, B'_6]$ geht aus dem Satz über Extrema stetiger Funktionen an kompakten Mengen hervor, siehe Anmerkung 1. Für das Sechseck $\mathscr{B}'$ kann man sukzessive folgende Eigenschaften beweisen:

a) $B'_2B'_3$ und $B'_5B'_6$ sind Kanten der Menge $M' = H(\{B'_2, B'_3, B'_5, B'_6\})$;
b) der Punkt $B'_1 = B'_4$ ist der Schnittpunkt der Diagonale des Viereckes $M'$;
c) die Dreiecke $H(\{B'_1, B'_2, B'_3\})$, $H(\{B'_4, B'_5, B'_6\})$ sind gleichseitig.

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß alle, die Bedingungen a), b), c) erfüllenden Sechsecke $\mathscr{B}' \in \mathscr{M}'$ gleichen und daher maximalen Rauminhalt ihrer konvexen Hülle haben.

Es sei $\mathscr{B}'^0 = [B'^0_1, \ldots, B'^0_6]$, $\mathscr{B}'^0 \in \mathscr{M}'$ ein solches, die Bedingungen a), b), c) erfüllendes Sechseck, für das die Dreiecke $H(\{B'^0_1, B'^0_2, B'^0_3\})$, $H(\{B'^0_4, B'^0_5, B'^0_6\})$ kongruent sind.

Konstruieren wir nun das Raumsechseck $\mathscr{B}^0 = [B^0_1, \ldots, B^0_6]$, für das folgendes gilt:

I. das Sechseck $\mathscr{B}^0$ projiziert sich in die Bildebene $\pi$ in das Sechseck $\mathscr{B}'^0$;
II. es ist $|B^0_1B^0_4| = |A_1A_4|$;
III. die offenen Vierecke $(B^0_1, B^0_2, B^0_3, B^0_4)$, $(B^0_4, B^0_5, B^0_6, B^0_1)$ wickeln sich in Strecken ab.

Wir überprüfen leicht, daß $\mathscr{B}^0$ ein Sechseck der Klasse $T5$ ist und daß $L(\mathscr{B}^0) \leqq L(\mathscr{A})$, $V(H(\mathscr{B}^0)) \geqq V(H(\mathscr{A}))$ ist. Beim Suchen der isoperimetrischen Konstante $k_5$ genügt es also, sich auf die die Eigenschaften I, II, III erfüllenden Sechsecke $\mathscr{B}^0$ zu beschränken. Drücken wir $L(\mathscr{B}^0)$ und $V(H(\mathscr{B}^0))$ als Funktionen einer Veränderlichen $d = |B^0_1B^0_4|$ (bei konstantem $L'$) aus, so finden wir die Konstante $k_5$ als Maximum der Funktion $V(H(\mathscr{B}^0))/L^3(\mathscr{B}^0)$. Durch Berechnung erhalten wir $k_5 = 1/(2^2 \,.\, 3^4)$.

**Satz 5.** *Für den Rauminhalt $V$ der konvexen Hülle der Sechsecke der Klasse $T5$ von Länge $L$ gilt*

$$V \leqq k_5 L^3 ,$$

*wo $k_5 \doteq 0{,}00308642$ ist.*

Im Verlauf des Beweises der isoperimetrischen Ungleichheit wurden zwei Raumsechsecke gefunden, die bei gegebener Länge den größten Rauminhalt ihrer konvexen Hüllen haben. Es zeigt sich, daß ein Raumsechseck (aus diesen Raumsechsecken) die folgenden Eigenschaften hat:

1. Es ist ein regelmäßiges Sechseck;
2. Jede zwei gegenüberliegende Seiten des Sechseckes sind parallel.
3. Jede zwei, nicht gegenüberliegende Seiten des Sechseckes sind aufeinander senkrecht.

Das die Eigenschaften 1, 2, 3 besitzende Sechseck ist, bis auf die Ähnlichkeit, durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt. Es sei $\mathscr{B}^0 = [B_1^0, \dots, B_6^0]$ soein Sechseck, es sei $\varrho$ die Symmetrieebene der Strecke $B_1^0B_4^0$. Bezeichnen wir mit $B_5'^0$ bzw. $B_6'^0$ die Punkte, welche symmetrisch zu $B_5^0$ bzw. $B_6^0$ hinsichtlich $\varrho$ liegen. Das Sechseck $\mathscr{B}^0 = [B_1^0, B_2^0, B_3^0, B_4^0, B_5'^0, B_6'^0]$ ist ein zweites Sechseck, welches den größten Rauminhalt (bei gegebener Länge $L$) seiner konvexen Hülle hat.

### *Literatur*


[1] *T. Bonnesen, W. Fenchel:* Theorie der konvexen Körper. Berlin 1934.

[2] *E. Egervary:* On the smallest convex cover of a simple arc of space-curve. Publ. Math. Debrecen *1* (1949), 65—70.

[3] *M. Kočandrlová:* The Isoperimetric Inequality for a Pentagon in $E_3$ and Its Generalization in $E_n$ Space. Čas. pěst. mat. *107* (1982), 167—174.

[4] *M. Kočandrlová:* Klassifikation konvexer Polyeder. Čas. pěst. mat. *108* (1983), 241—247.

[5] *М. Г. Крейн, А. А. Нудельман:* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Москва 1973.

[6] *Z. A. Melzak:* The isoperimetric problem of the convex hull of a closed space curve. Proc. Amer. Math. Soc. *11* (1960), 265—274.

[7] *Z. A. Melzak:* Existence of Periodic Solutions. Comm. on pure and appl. mat. *20* (1967), 771—774.

[8] *Z. A. Melzak:* Numerical evaluation of an isoperimetric constant. Math. of Computation *22, 101* (1968), 188—190.

[9] *B. Míšek:* Über $(n + 1)$-Ecke in $E_n$ mit maximalen Volumen der konvexen Hülle (Tschechisch). Čas. pěst. mat. *84* (1959), 99—104.

[10] *А. А. Нудельман:* Изопериметрические задачи для выпуклых оболочек ломанных и кривых в многомерных пространствах. Мат. сб. *96, 138*, (1975), 2, 294—313.

[11] *I. J. Schoenberg:* An isoperimetric inequality for closed curves convex in even dimensional Euclidean spaces. Acta Math. *91* (1954), 143—164.



*Anschrift des Verfassers:* 166 29 Praha 6, Thákurova 7 (Stavební fakulta ČVUT).