Časopis pro pěstování matematiky

Milada Kočandrlová

Klassifikation konvexer Polyeder

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 108 (1983), No. 3, 241--247

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/118171`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 108 (1983), Praha

KLASSIFIKATION KONVEXER POLYEDER

MILADA KOČANDRLOVÁ, Praha

(Eingegangen 31. Mai 1982)

1. EINLEITUNG

Bei einer Reihe geometrischer Aufgaben müssen wir mit konvexen Polyedern (konvexen Hüllen endlicher Mengen) in einem n-dimensionalen euklidischen Raum E_n arbeiten. Dabei können wir bei der Arbeit mit Polyedern, die „gleichartig aussehen", auf die gleiche Weise verfahren. Es ist deshalb zweckmäßig, ein geeignetes Kriterium dafür zu finden, daß zwei Polyeder „gleichartig aussehen", und alle Polyeder nach diesem Kriterium zu klassifizieren. Dieses Kriterium wird im ersten Teil dieser Arbeit bestimmt. Im weiteren Teil der Arbeit werden nach diesem Kriterium konvexe Polyeder mit $n + 2$ Ecken im Raum E_n klassifiziert (diese Klassifizierung wurde teilweise schon in [1] angegeben), sowie auch Polyeder mit sechs Ecken im Raum E_3. Die Klassifizierung von Polyedern mit sechs Ecken wird in einer weiteren Arbeit [2] angewandt; in dieser werden geschlossene Raumsechsecke gefunden, deren konvexe Hüllen in einzelne Klassen gehören, die eine gegebene Länge und den größten Rauminhalt ihrer konvexen Umhüllung haben.

2. KLASSIFIKATIONSKRITERIUM

Bezeichnen wir die konvexe Hülle der Menge M mit dem Symbol $H(M)$. Setzen wir ferner voraus, daß für jedes konvexe Polyeder $H(\{A_1, \ldots, A_m\})$ (wo $A_1, \ldots, A_m \in E_n$ ist) keiner von den Punkten $A_1, \ldots, A_m$ in der konvexen Hülle der restlichen Punkte liegt.

Definition 1. Wir sagen, daß zwei konvexe Polyeder $H(\{A_1, \ldots, A_m\})$ und $H(\{A'_1, \ldots, A'_m\})$ vom *gleichen konvexen Typ* sind, wenn eine umkehrbar eindeutige Abbildung f der Menge $\{A_1, \ldots, A_m\}$ auf die Menge $\{A'_1, \ldots, A'_m\}$ (daher $m = m'$) existiert, so daß für den Fall, wenn für $c_1, \ldots, c_m \in R$

I. $c_1 + \ldots + c_m = 0$ gilt und $c_1 A_1 + \ldots + c_m A_m = \mathbf{o}$ ist (mit dem Symbol $\mathbf{o}$ bezeichnen wir den Nullvektor), dann existieren $c'_1, \ldots, c'_m \in R$, so daß

II. $c'_1 + \ldots + c'_m = 0$ und $c'_1 f(A_1) + \ldots + c'_m f(A_m) = \mathbf{o}$ und $\operatorname{sign} c_i = \operatorname{sign} c'_i$ für $i = 1, \ldots, m$ und umgekehrt, wenn für $c'_1, \ldots, c'_m \in R$ II. gilt, existieren $c_1, \ldots, c_m \in \in R$, so daß I. gilt und $\operatorname{sign} c_i = \operatorname{sign} c'_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Offenbar ist die eben definierte Relation „vom gleichen konvexen Typ sein" an der Menge aller konvexen Polyeder im Raum E_n eine Äquivalenz, und die Menge aller Polyeder zerfällt also in Äquivalenzklassen.

Als konvexes Inneres des Polyeders $H(M)$, M endlich, $M \subset E_n$, werden wir dessen Inneres im Unterraum, den die Menge M im Raum E_n generiert, bezeichnen. Die Menge aller Punkte aus $H(M)$, die nicht im konvexen Inneren des Polyeders $H(M)$ liegen, nennen wir die konvexe Grenze des Polyeders $H(M)$.

Nun können wir die eingeführte Relation „vom gleichen konvexen Typ sein" bereits geometrisch charakterisieren. Man kann leicht die folgenden Sätze beweisen.

Satz 1. *Es seien $M, M' \subset E_n$ endliche Mengen. Dann sind die konvexen Polyeder $H(M)$ und $H(M')$ genau dann vom gleichen konvexen Typ, wenn eine umkehrbar eindeutige Abbildung f der Menge M auf die Menge M' existiert, so daß für jede zwei Mengen $M_1, M_2 \subset M$ folgendes gilt: Die konvexen Inneren der Polyeder $H(M_1)$ und $H(M_2)$ haben genau dann einen nichtleeren Durchschnitt, wenn die konvexen Inneren der Polyeder $H(f(M_1))$ und $H(f(M_2))$ einen nichtleeren Durchschnitt haben.*

Offenbar bezeichnet das Symbol f in der Definition 1 sowie im Satz 1 die gleiche Abbildung. Die gleiche Bedeutung soll es auch in der ganzen Arbeit haben.

Satz 2. *Es seien $M, M' \subset E_n$ endliche Mengen. Es seien die Polyeder $H(M)$ und $H(M')$ vom gleichen konvexen Typ. Dann gilt für $M_1 \subset M$ folgendes:*

1. *Die Menge M_1 ist genau dann linear abhängig, wenn die Menge $f(M_1)$ linear abhängig ist;*
2. *Das Polyeder $H(M_1)$ ist genau dann ein Teil der konvexen Grenze des Polyeders $H(M)$, wenn das Polyeder $H(f(M_1))$ ein Teil der konvexen Grenze des Polyeders $H(M')$ ist.*

Aus der Behauptung 1 des Satzes 2 geht sofort hervor, daß für den Fall, wenn die Polyeder $H(M)$ und $H(M')$ vom gleichen konvexen Typ sind, dann hat der durch die Menge M generierte Unterraum des Raumes E_n die gleiche Dimension, wie der durch die Menge M' generierte Unterraum. Wir können uns deshalb ohne die Allgemeinheit einzuschränken auf die Klassifikation derjenigen Polyeder im Raum E_n, die in keinem Unterraum dieses Raumes liegen.

3. KLASSIFIKATION VON POLYEDERN MIT $n + 2$ ECKEN IN E_n

Wir beginnen mit der Klassifikation von Polyedern mit $n + 2$ Ecken, da die Klassifikation von Polyedern mit $n + 1$ Ecken (von Simplexen) trivial ist – jede zwei sind vom gleichen konvexen Typ.

Es sei also $M = \{A_1, \ldots, A_{n+2}\}$, wobei mindestens $n + 1$ Punkte der Menge M linear unabhängig sind. Dann existieren Zahlen $c_1, \ldots, c_{n+2} \in R$, so daß $c_1 + \ldots + c_{n+2} = 0$, mindestens ein $c_i \neq 0$, $1 \leqq i \leqq n + 2$,

$$c_1 A_1 + \ldots + c_{n+2} A_{n+2} = \mathbf{o}\,, \tag{1}$$

und die Zahlen $c_1, \ldots, c_{n+2}$ sind offenbar, bis auf eine, von Null verschiedene multiplikative Konstante, durch die Gleichung (1) eindeutig bestimmt. Bezeichnen wir mit $p(M)$ bzw. $q(M)$ die Anzahl positiver bzw. negativer Zahlen von den Zahlen $c_1, \ldots, c_{n+2}$. Wir erreichen leicht, daß $p(M) \geqq q(M)$ ist. Da $c_1 + \ldots + c_{n+2} = 0$ ist, ist $p(M) \geqq 1$, $q(M) \geqq 1$.

Zwei Polyeder $H(M)$ und $H(M')$ mit $n + 2$ Ecken sind offensichtlich genau dann vom gleichen konvexen Typ, wenn $p(M) = p(M')$ und $q(M) = q(M')$ ist. Die Menge aller Polyeder mit $n + 2$ Ecken zerfällt in m Klassen. Wir stellen leicht fest, daß $m = ((n + 2)/2)^2$ für gerade n und $m = ((n + 2)/2)^2 - 1/4$ für ungerade n ist.

Satz 3. *Zu jedem Polyeder $H(M)$ mit $n + 2$ Ecken $A_1, \ldots, A_{n+2}$ existieren $q(M)$ Simplexe $S_1, \ldots, S_{q(M)}$, so daß keine zwei einen gemeinsamen inneren Punkt haben und $H(M) = S_1 \cup \ldots \cup S_{q(M)}$ ist.*

Beweis. Anstelle von $q(M)$ schreiben wir weiter nur q. Wir beweisen, daß wenn wir $S_i = H(M \dot{-} \{A_i\})$ für $i = 1, \ldots, q$ setzen, dann erfüllen die Simplexe $S_1, \ldots, S_q$ die Behauptung des Satzes. Setzen wir voraus, daß die Punkte $A_1, \ldots, A_{n+2}$ so beziffert sind, daß in der Gleichung (1) $c_i < 0$ für $i = 1, \ldots, q$ ist und $c_i \geqq 0$ für $i = q + 1, \ldots, n + 2$ ist. Offenbar sind die Punkte $A_1, \ldots, A_q$ bzw. $A_{q+1}, \ldots, A_{n+2}$ linear unabhängig und generieren deshalb den Unterraum E'_{q-1} bzw. E''_{n-q+1} des Raumes E_n. Wir setzen $k = c_{q+1} + \ldots + c_{n+2}$. Offenbar ist $E'_{q-1} \cap E''_{n-q+1} = \{P\}$, wo

$$P = \frac{c_{q+1}}{k} A_{q+1} + \ldots + \frac{c_{n+2}}{k} A_{n+2}\,. \tag{2}$$

Es sei φ die Projektion des Raumes E_n auf den Raum E'_{q-1} in der Richtung des Raumes E''_{n-q+1}. Dann wird $\varphi(X) = X$ für jeden Punkt $X \in E'_{q-1}$ und $\varphi(X) = P$ für jeden Punkt $X \in E''_{n-q+1}$. Aus der Beziehung (1) geht hervor, daß

$$c_1 A_1 + \ldots + c_q A_q + kP = \mathbf{o} \tag{3}$$

ist. Setzen wir $S'_i = H(\{A_1, \ldots, A_q, P\} \dot{-} \{A_i\})$ $i = 1, \ldots, q$, so ist offenbar $S'_i = \varphi(S_i)$. P ist ein innerer Punkt des Simplexes $H(\{A_1, \ldots, A_q\}) = S'$ (siehe (3)); deshalb ist $S' = S'_1 \cup \ldots \cup S'_q$, und die zwei Simplexe S'_i, S'_j haben keinen gemeinsamen inneren Punkt in E'_{q-1} für $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, q$. Dasselbe gilt deshalb auch für die Simplexe S_i, S_j. Offensichtlich ist $H(M) \supset S_1 \cup \ldots \cup S_q$. Beweisen wir die umgekehrte Inklusion. Es sei $X \in H(M)$. Dann existieren Zahlen $x_i \in R$, $i = 1, \ldots, n + 2$, so daß

$$\sum_{i=1}^{n+2} x_i = 1\,,$$

$x_i \geqq 0,\ i = 1, \ldots, n + 2$ und

$$(4) \qquad X = x_1 A_1 + \ldots + x_{n+2} A_{n+2} \,.$$

Setzen wir $\bar{x} = x_{q+1} + \ldots + x_{n+2}$ und $X' = \varphi(X)$, so ist

$$(5) \qquad X' = x_1 A_1 + \ldots + x_q A_q + \bar{x} P$$

und folglich $X' \in S'$. Daher existiert j, $1 \leqq j \leqq q$, so daß $X' \in S'_j$ ist. Wir beweisen, daß $X \in S_j$ ist. Es sei z.B. $j = 1$. Dann existieren $x'_2, \ldots, x'_q, \bar{x}' \in R$, so daß $x'_2 + \ldots$ $\ldots + x'_q + \bar{x}' = 1$, $x'_2 \geqq 0, \ldots, x'_q \geqq 0$, $\bar{x}' \geqq 0$ und

$$(6) \qquad X' = x'_2 A_2 + \ldots + x'_q A_q + \bar{x}' P \,.$$

Subtrahieren wir von der Gleichung (6) die Gleichung (5), so erhalten wir

$$(7) \qquad \mathbf{o} = -x_1 A_1 + (x'_2 - x_2) A_2 + \ldots + (x'_q - x_q) A_q + (\bar{x}' - \bar{x}) P \,.$$

Da die Koeffizienten $c_1, \ldots, c_q, k$ in der Beziehung (3) bis auf eine, von Null verschiedene, multiplikative Konstante eindeutig bestimmt sind und da $-x_1 < 0$ ist, wird $x'_i - x_i < 0$, $i = 2, \ldots, q$ und $\bar{x}' - \bar{x} > 0$. Addieren wir die Gleichung (7) mit der Gleichung (4) und setzen für P aus der Beziehung (2) ein, so erhalten wir $X = x'_2 A_2 + \ldots + x'_q A_q + (x_{q+1} + (\bar{x}' - \bar{x})\, c_{q+1}/k)\, A_{q+1} + \ldots + (x_{n+2} + (\bar{x}' - \bar{x})\, c_{n+2}/k)\, A_{n+2}$. Daher ist $X \in S_1$. Dadurch ist die Behauptung bewiesen.

Anmerkung. In Hinsicht auf die Voraussetzung, daß keiner von den Punkten $A_1, \ldots, A_m$ in der konvexen Hülle der restlichen Punkte liegt, muß $q(M) \geqq 2$ sein. In E_3 erhalten wir daher die einzige Klasse konvexer Polyeder mit fünf Ecken – die Polyeder aus dieser Klasse sind die Vereinigung zweier Simplexe mit gemeinsamer Seite.

4. KLASSIFIKATION VON POLYEDERN MIT SECHS ECKEN IN E_3

Es sei in E_3 die Menge $M = \{A_1, \ldots, A_6\}$ gegeben. Wir setzen wieder voraus, daß das Polyeder $H(M)$ in keinem Unterraum des Raumes E_3 liegt. Wir führen die Klassifikation mit Hilfe des Satzes 1 aus.

Wir nennen die Verbindungslinie der zwei Ecken des konvexen Polyeders, die nicht dessen Kante ist, eine innere Kante dieses Polyeders. Verwenden wir die Bezeichnung aus den Sätzen 1, 2, so können wir uns davon überzeugen, daß für jede $A, B \in M$ folgendes gilt: AB ist genau dann eine innere Kante des Polyeders $H(M)$, wenn $f(A) f(B)$ eine innere Kante des Polyeders $H(M')$ ist. Diese Behauptung geht leicht aus dem Satz 2 hervor. Man kann beweisen, daß folgende zwei Hilfsbehauptungen gelten (wir sprechen sie in allgemeinerer Form für das Polyeder $H(\{A_1, \ldots, A_m\})$ aus).

Lemma 1.: *Es sei das Polyeder $\bar{M} = H(\{A_1, \ldots, A_m\})$ gegeben. Dann sind die Strecken $A_1A_2, \ldots, A_1A_k$ innere Kanten des Polyeders $\bar{M}$ eben dann, wenn $A_1A_j \cap H(\{A_{k+1}, \ldots, A_m\}) \neq \emptyset$ für jedes j, $1 \leqq j \leqq k$ ist.*

Lemma 2. *Es sei das Polyeder* $\overline{M} = H(\{A_1, \ldots, A_m\})$ *gegeben. Es seien* $A_1A_2, \ldots$ $\ldots, A_1A_k$ *innere Kanten des Polyeders* $\overline{M}$. *Dann ist* $\overline{M} = H(\{A_1, A_{k+1}, \ldots, A_m\}) \cup$ $\cup\, H(\{A_2, \ldots, A_m\})$.

Es sei nun $\overline{M} = H(M)$ ein Polyeder mit sechs Ecken. Offenbar existiert mindestens eine innere Kante des Polyeders $\overline{M}$. Wir überzeugen uns leicht davon, daß durch eine Ecke des Polyeders $\overline{M}$ höchstens zwei innere Kanten durchgehen können. Wenn nämlich durch eine Ecke drei innere Kanten durchgehen würden, dann möchte sich aus Lemma 2 ergeben, daß das Polyeder $\overline{M}$ schon in einer Ebene liegen muß. Die konvexen Polyeder mit sechs Ecken können wir also in zwei Grundklassen einteilen:

A. Polyeder, bei denen mindestens durch eine Ecke zwei verschiedene innere Kanten des Polyeders durchgehen.

B. Polyeder, bei denen durch jede Ecke höchstens eine innere Kante des Polyeders durchgeht.

Satz 4. *Ein konvexes Polyeder mit sechs Ecken gehört genau dann in die Klasse A, wenn es die Vereinigung von drei Simplexen ist, von denen keine zwei einen gemeinsamen inneren Punkt haben, wo alle drei eine gemeinsame Kante haben und wobei man sie so ordnen kann, daß zwei nacheinander folgende eine gemeinsame Seite haben.*

Beweis. Es sei also $\overline{M} = H(M)$ von der Klasse A. Es sei A_1 eine Ecke, durch die zwei innere Kanten des Polyeders $\overline{M}$ durchgehen. Dies seien die inneren Kanten A_1A_3 und A_1A_2. Dann ist gemäß Lemma 2 $\overline{M} = H(\{A_1, A_4, A_5, A_6\}) \cup$ $\cup\, H(\{A_2, \ldots, A_6\})$. Man kann jedoch $H(\{A_2, \ldots, A_6\})$ als die Vereinigung zweier Simplexe S_2, S_3, gemäß der Anmerkung zum Satz 3, schreiben. Man stellt leicht fest, daß die konstruierten drei Simplexe $S_1 = H(\{A_1, A_4, A_5, A_6\})$, S_2, S_3 die zu beweisenden Behauptungen erfüllen. Ist umgekehrt $\overline{M}$ die Vereinigung der drei Simplexe S_1, S_2, S_3, wobei die Simplexe S_1, S_2 bzw. S_2, S_3 eine gemeinsame Seite haben, dann können wir die Ecken des Polyeders $\overline{M}$ so numerieren, daß A_1A_2 die gemeinsame Kante der Simplexe S_1, S_2, S_3 ist und $S_1 = H(\{A_1, A_2, A_3, A_4\})$, $S_2 =$ $= H(\{A_1, A_2, A_4, A_5\})$, $S_3 = H(\{A_1, A_2, A_5, A_6\})$ gilt. Wir können uns nun leicht davon überzeugen, daß A_3A_5, A_3A_6, A_4A_6 innere Kanten des Polyders $\overline{M}$ sind.

Die Klasse A zerfällt nun in Unterklassen $A1, \ldots, A5$, welche Polyeder mit folgenden Eigenschaften enhalten:

$A1$. A_3A_5 und A_4A_6 sind windschief, und die inneren Kanten A_3A_6 und A_3A_5 bzw. A_3A_6 und A_4A_6 schneiden das Dreieck $H(\{A_1, A_2, A_4\})$ bzw. $H(\{A_1, A_2, A_5\})$ in einem inneren Punkt.

$A2$. A_3A_5 und A_4A_6 schneiden sich, und die Ebene ϱ, die die Punkte A_3, A_4, A_5, A_6 enthält, schneidet die Kante A_1A_2 in derem inneren Punkt.

$A3$. A_3A_5 und A_4A_6 schneiden sich, und es ist $A_1 \in \varrho$ oder $A_2 \in \varrho$ (Bezeichnung gemäß $A2$).

*A*4. A_1A_4 und A_3A_5 schneiden sich, und A_2A_5 und A_4A_6 schneiden sich.

*A*5. A_1A_4 und A_3A_5 schneiden sich, und A_4A_6 schneidet das Dreieck $H(\{A_1, A_2, A_5\})$ in dessen inneren Punkt.

Durch die Ausführung der vollständigen Diskussion der gegenseitigen Lage der Polyeder $H(M_1)$, $H(M_2)$, wo $M_1, M_2 \subset M$, würden wir uns davon überzeugen, daß die Klassen $A1, \ldots, A5$ eben alle Klassen sind, die wir durch die Ausführung der Klassifikation der Polyeder der Klasse A gemäß der Definition 1 erhalten (die Polyeder sind bis auf die Numerierung der Ecken beschrieben).

Die Polyeder aus den Klassen $A1$, $A2$ können wir eben auf eine einzige Weise als die Vereinigung dreier Simplexe schreiben. Die Polyeder der Klasse $A3$ sind fünfseitige Pyramiden mit der Spitze A_1 bzw. A_2, wenn $A_2 \in \varrho$ bzw. $A_1 \in \varrho$ ist. Man kann sie auf fünf verschiedene Arten als die Vereinigung dreier Simplexe schreiben. Die Polyeder der Klasse $A4$ können wir auf zwei verschiedene Weisen als eine vierseitige Pyramide schreiben, zu deren einer Seite ein Simplex zugegeben ist. Sie können als die Vereinigung dreier Simplexe auf drei Arten ausgedrückt werden. Die gemeinsame Kante der Simplexe kann die Kante A_1A_2 oder A_2A_5 oder A_1A_4 sein. Die Polyeder der Klasse $A5$ können wir auf eine einzige Weise als eine vierseitige Pyramide mit angeschlossenem Simplex schreiben. Sie können als die Vereinigung dreier Simplexe auf zwei Arten ausgedrückt werden – die gemeinsame Kante der Simplexe ist A_1A_2 oder A_2A_5.

Satz 5. *Ein Polyeder mit sechs Ecken gehört genau dann in die Klasse B, wenn durch jede Ecke genau eine innere Kante des Polyeders durchgeht.*

Beweis. Es sei das Polyeder $\overline{M} = H(M)$ von der Klasse B. Wir führen den Beweis durch einen Widerspruch. Es möge also eine Ecke, die wir mit A_1 bezeichnen, existieren, durch die keine innere Kante des Polyeders $\overline{M}$ durchgeht. Offenbar gibt es eine gerade Anzahl von Ecken, durch die die inneren Kanten durchgehen. Es existiert also mindestens noch eine Ecke, die wir mit A_2 bezeichnen, durch die keine innere Kante durchgeht. Die Strecke A_1A_2 ist daher eine Kante des Polyeders. Wir projizieren in ihrer Richtung das Polyeder $\overline{M}$ in die gewählte Bildebene π. Diese Projektion bezeichnen wir mit φ. Wenn wir nun den Umstand benutzen, daß alle A_iA_j, $i = 1, 2$, $j = 3, 4, 5, 6$ Kanten des Polyeders $\overline{M}$ sind, kann man schrittweise beweisen, daß

1. $\overline{M}' = H(\{\varphi(A_1), \ldots, \varphi(A_6)\})$ ein konvexes Fünfeck ist;
2. Wenn wir die Ecken $A_3, \ldots, A_6$ so numerieren, daß die Punkte $\varphi(A_1), \varphi(A_3), \ldots \ldots, \varphi(A_6)$ zyklisch am Umfang des Fünfeckes $\overline{M}'$ angeordnet werden, sind A_3A_5, A_3A_6, A_4A_6 innere Kanten des Polyeders $\overline{M}$ und das ergibt einen Widerspruch.

Die Klasse B zerfällt bei der Klassifikation gemäß der Definition 1 in die Unterklassen $B1, \ldots, B4$, in welche die Polyeder gehören, die folgende Eigenschaften haben:

*B*1. Jede zwei von drei inneren Kanten sind zueinander windschief.

*B*2. Alle drei innere Kanten schneiden sich in einem Punkt.

*B*3. Es existiert eine innere Kante, die die restlichen inneren Kanten schneiden, und es trifft nicht der Fall *B*2 zu.

*B*4. Zwei innere Kanten schneiden sich, und die restliche innere Kante ist zu den beiden windschief.

Ein Beispiel des Polyeders der Klasse B ist das regelmäßige Oktaeder. Jedes Polyeder $\bar{M}$ der Klasse B kann man auf drei verschiedene Weisen als die Vereinigung von vier Simplexen schreiben, für die folgendes gilt:

a) Alle Simplexe haben eine gemeinsame Kante, die eine innere Kante des Polyeders $\bar{M}$ ist.

b) Keine zwei Simplexe haben einen gemeinsamen inneren Punkt.

c) Man kann die Simplexe zyklisch so anordnen, daß zwei nacheinander folgende Simplexe eine gemeinsame Seite haben.

Dadurch ist die Klassifikation ausgeführt. Die Menge aller konvexen Polyeder in E_3 mit sechs Ecken zerfällt also, dem gewählten Kriterium gemäß, in neun Klassen.

Literatur

[1] *M. Kočandrlová:* The Isoperimetric Inequality for a Pentagon in E_3 and Its Generalization in E_n Space. Čas. pěst. mat. *107* (1982), 167–174.

[2] *M. Kočandrlová:* Isoperimetrische Ungleichung für geschlossene Raumsechsecke. Čas. pěst. mat. *108* (1983), 248–257.

Anschrift des Verfassers: 166 29 Praha 6, Thákurova 7 (Stavební fakulta ČVUT).