Zbigniew Grande; Maria Topolewska
Sur les fonctions vectorielles approximativement continues

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 107 (1982), No. 4, 333--340

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/118136`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 107 * PRAHA 9. 12. 1982 * ČÍSLO 4

SUR LES FONCTIONS VECTORIELLES APPROXIMATIVEMENT CONTINUES

ZBIGNIEW GRANDE et MARIA TOPOLEWSKA, Bydgoszcz

(Reçu le 5. mai 1980)

Dans cet article nous démontrons quelques théoremes concernant les fonctions approximativement continues dont les valeurs appartiennent à un espace normé séparable. Ces théorèmes sont certaines généralisations des théorèmes déjà connus dans le cas des fonctions réelles.

I. Soient (X, ϱ) un espace métrique avec la distance ϱ et $\mathfrak{M}$ la σ-algèbre d'ensembles de l'espace X contenant tous les ensembles boréliens de l'espace X. Supposons que μ soit une mesure définie sur $\mathfrak{M}$ qui soit G_δ-régulière, finie et telle que la borne inférieure de mesures des sphères de rayon $r > 0$ soit positive. On appelle base de différentiation dans l'espace $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ tout couple $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$, où $\mathfrak{F}$ est une famille préordonnée d'ensembles de mesure μ positive finie et $\Rightarrow$ désigne une relation de convergence des suites d'ensembles de la famille $\mathfrak{F}$ vers les points $x \in X$ définie de la manière suivante: $\mathcal{J}_n \Rightarrow x$ lorsque $\mathcal{J}_n \in \mathfrak{F}$, $n = 1, 2, \ldots$ et $x \in \mathcal{J}_n$ et $\lim_{n \to \infty} d(\mathcal{J}_n) = 0$, où $d(\mathcal{J}_n)$ désigne, comme d'habitude, le diamètre de l'ensemble $\mathcal{J}_n$; telle qu' il existe pour tout point $x \in X$ une suite d'ensembles $\mathcal{J}_n \in \mathfrak{F}$ convergente au sens de $\Rightarrow$ vers le point x.

Supposons encore dans cette partie que la base de différentiation $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$ satisfasse aux conditions suivantes:

(A) Il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ et pour tout $x \in X$ un ensemble $\mathcal{J} \in \mathfrak{F}$ tel que $x \in \mathcal{J}$ et $d(\mathcal{J}) < \varepsilon$;

(B) En désignant par $\mathcal{J}'$ l'ensemble $\{x \in X : d(x, \mathcal{J}) \leqq 2d(\mathcal{J})\}$ où $d(x, \mathcal{J}) = \inf_{y \in J} \varrho(x, y)$, il existe une constante $\lambda > 0$ telle que $\mu(\mathcal{J}') \leqq \lambda\, \mu(\mathcal{J})$ pour tout $\mathcal{J} \in \mathfrak{F}$;

(C) Étant donné un ensemble $A \in \mathfrak{M}$, $\mu(\{x \in A : x$ n'est aucun point de densité de l'ensemble A relativement à la base de différentiation $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)\}) = 0$,

où x est dit point de densité de l'ensemble A relativement à la base de différentiation $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$, lorsqu' on a l'égalité

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mu(A \cap \mathscr{I}_n)}{\mu(\mathscr{I}_n)} = 1$$

pour toute suite d'ensembles $\mathscr{I}_n \in \mathfrak{F}$ convergente au sens de $\Rightarrow$ vers le point x.

Soit Y un espace normé séparable avec la norme $\| \ \|$.

Définition 1. Une fonction μ-mesurable $f : X \to Y$ est dite *approximativement continue au point x relativement à la base de différentiation* $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$ lorsque, quel que soit l'ensemble ouvert $V \subset Y$ contenant $f(x)$, x est un point de densité de l'ensemble $f^{-1}(V)$ par rapport à la base de différentiation $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$.

Théorème 1. *Toute fonction $f : X \to Y$ de deuxième classe de Baire est la limite d'une suite de fonctions approximativement continues relativement à la base de différentiation* $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$.

Dans la démonstration de ce théorème nous appliquerons le lemme suivant:

Lemme 1. *Soient $A \subset X$ un ensemble à la fois du type F_σ et G_δ, $H \supset \{x \in A : x$ n'est aucun point de densité de l'ensemble A relativement à la base $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)\} \cup$ $\cup \{x \in X - A : x$ n'est aucun point de densité de l'ensemble $X - A$ relativement à la base $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)\}$ un ensemble du type G_δ de mesure zéro et $G \supset H$ un ensemble ouvert. Le point $y \in Y$ étant fixé, désignons par c_A la fonction*

$$c_A(x) = \begin{cases} y & \textit{lorsque} \quad x \in A \\ 0 & \textit{lorsque} \quad x \in X - A \end{cases}$$

Dans ces hypothèses, il existe une fonction $\varphi : X \to Y$ approximativement continue relativement à la base de différentiation $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$ et telle que

$$\{x \in X : \varphi(x) \neq c_A(x)\} \subset G - H .$$

Démonstration. Il existe, d'après le théorème 2 de [2], une fonction réelle $\varphi_1 : X \to R$ approximativement continue par rapport à la base $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$ et telle que $\{x \in X : \varphi_1(x) \neq \chi_A(x)\} \subset G - H$, où χ_A désigne, comme d'habitude, la fonction caractéristique de l'ensemble A. Posons donc $\varphi(x) = \varphi_1(x).\, y$ et remarquons que la fonction φ satisfait aux conditions exigées.

Démonstration du théorème 1. Il existe pour la fonction f une suite de fonctions $f_n : X \to Y$ de première classe de Baire et telles que tous les ensembles $f_n(X)$ sont finis ((5), p. 294–295 et 297). On a donc

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{m_n} h_{k,n}(x)$$

où les fonctions $h_{k,n}$ admettent les valeurs $y_{k,n}$ sur les ensembles $A_{k,n}$ à la fois du type F_σ et G_δ et 0 sur les ensembles $X - A_{k,n}$ étant également ambigus de classe 1. Désignons par $B_{k,n}$ $(k = 1, 2, \ldots, m_n$ et $n = 1, 2, \ldots)$ l'ensemble $\{x \in A_{k,n};\ x$ n'est aucun point de densité de l'ensemble $A_{k,n}$ relativement à la base $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)\} \cup \{x \in X - A_{k,n} : x$ n'est aucun point de densité de l'ensemble $X - A_{k,n}$ relativement à la base $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)\}$ et par B l'union $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{m_n} B_{k,n}$. Il résulte de la condition (C) que $\mu(B) = 0$. Il existe donc un ensemble $H \supset B$ du type G_δ et tel que $\mu(H) = 0$ et, par conséquent, une suite $\{G_n\}$ d'ensembles ouverts telle que $G_k \supset G_{k+1}$ pour $k = 1, 2, \ldots$ et $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Selon le lemme 1, il existe pour tout $n = 1, 2, \ldots$ et pour tout $k = 1, \ldots, m_n$ une fonction $\varphi_{k,n} : X \to Y$ approximativement continue par rapport à la base $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$ et telle que

$$\{x \in X : \varphi_{k,n}(x) \neq h_{k,n}(x)\} \subset G_n - H .$$

Posons, pour $n = 1, 2, \ldots$ et pour $x \in X$,

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{m_n} \varphi_{k,n}(x) .$$

On vérifie facilement que toutes les fonctions g_n sont approximativement continues par rapport à la base $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$ et que $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in X$.

Remarque 1. Dans le cas particulier où $Y = R$, le théorème 1 a été déjà démontré dans [2] où l'auteur a généralisé le même théorème de Preiss de [7] concernant les fonctions réelles d'une variable réelle.

Remarque 2. Supposons que X soit l'espace euclidien de n dimensions, μ soit la mesure de Lebesgue dans cet espace et $\mathfrak{F}$ soit la famille de tous les intervalles (ou de tous les cubes). Dans ces hypothèses, la fonction $f : X \to Y$ est de deuxième classe de Baire si et seulement s' il existe une suite de fonctions $f_n : X \to Y$ approximativement continues par rapport à la base $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$ convergente en tout point $x \in X$ vers $f(x)$.

La démonstration de cette remarque résulte tout de suite du théorème 3 et du fait que toute fonction approximativement continue relativement à la base $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$ (dans les hypothèses de notre remarque sur $\mathfrak{F}$) est de première classe de Baire.

Théorème 2. *Conservons les hypothèses générales supposées dans la partie* I *et admettons, en outre, que la mesure μ soit sans-atomique. Il existe pour toute fonction $f : X \to Y$ de première classe de Baire une fonction $g : X \to Y$ approximativement continue relativement à la base de différentiation $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$ et telle que $\{x \in X : f(x) = g(x)\} \supset A$ si et seulement si l'ensemble A est de mesure μ zéro.*

Dans la démonstration de ce théorème nous appliquerons le lemme suivant:

Lemme 2. *Soit $h : X \to Y$ une fonction de première classe de Baire dont l'ensemble des valeurs soit isolé. Dans les hypothèses du théorème 2 sur l'espace X, la mesure μ et la base de différentiation $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$, si $A \subset X$ est un ensemble de mesure μ zéro, il existe une fonction $h_1 : X \to Y$ approximativement continue relativement à la base de différentiation $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$ et telle que $\{x \in X : h(x) = h_1(x)\} \supset A$.*

Démonstration. Soit $a_1, a_2, \ldots$ la suite de toutes les valuers de la fonction h telle que $a_i \neq a_j$ lorsque $i \neq j$ et $i, j = 1, 2, \ldots$.

Soit $h_2 : R \to Y$ la fonction continue défine comme suit:

$$h_2(t) = \begin{cases} a_n & \text{lorsque} \quad t = n \ (n = 1, 2, \ldots)\,, \\ 0 & \text{lorsque} \quad t \leqq 0\,, \\ \text{linéaire dans tout intervalle } [n-1, n]\,. \end{cases}$$

Posons $h_3(x) = n$, lorsuqe $x \in h^{-1}(a_n)$.

Comme $(h_3^{-1})(n) = h^{-1}(a_n)$ et le dernier ensemble est à la fois du type F_σ et G_δ, la fonction h_3 est donc de première classe de Baire. Il résulte du théorème 1 de l'article [3] qu' il existe une fonction $h_4 : X \to R$ approximativement continue relativement à la base $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$ et telle que

$$\{x \in X : h_3(x) = h_4(x)\} \supset A\,.$$

Posons $h_1(x) = h_2(h_4(x))$. Comme la fonction h_2 est continue, la fonction h_1 est approximativement continue par rapport à $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$. Si $x \in A$, il existe un indice n_0 tel que $x \in h^{-1}(a_{n_0})$, et par conséquent $h_3(x) = n_0 = h_4(x)$. Il en résulte, que $h_1(x) = h_2(h_4(x)) = h_2(n_0) = a_{n_0} = h(x)$.

Ainsi $\{x \in X : h(x) = h_1(x)\} \supset A$ et la démonstration est achevée.

Démonstration du théorème 2. La condition est suffisante. En effet, il existe une suite de fonctions $f_n : X \to Y$ de première classe de Baire, uniformément convergente vers la fonction f et telle que les ensembles des valeurs des fonctions f_n ($n = 1, 2, \ldots$) sont dénombrables et isolés ([5] p. 294–295). D'après le lemme 2 il existe pour toute fonction f_n ($n = 1, 2, \ldots$) une fonction $g_n : X \to Y$ approximativement continue par rapport à la base $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$ et telle que $\{x \in X : g_n(x) = f_n(x)\} \supset A$. Soit $\{f_{n_k}\}$ une sous-suite de la suite $\{f_n\}$ telle que

$$\|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\| < \frac{1}{2^{k+1}} \quad \text{pour tout} \quad x \in X\,.$$

Posons, pour $k = 1, 2, \ldots$

$$\varphi_{n_{k+1}}(x) = \begin{cases} g_{n_{k+1}}(x) - g_{n_k}(x) \quad \text{lorsque} \quad \|g_{n_{k+1}}(x) - g_{n_k}(x)\| \leqq \dfrac{1}{2^{k+1}} \\ \dfrac{1}{2^{k+1}} \, \dfrac{g_{n_{k+1}}(x) - g_{n_k}(x)}{\|g_{n_{k+1}}(x) - g_{n_k}(x)\|} \quad \text{lorsque} \quad \|g_{n_{k+1}}(x) - g_{n_k}(x)\| > \dfrac{1}{2^{k+1}} \end{cases}$$

et

$$\psi_1(x) = g_{n_1}(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in X$$

et

$$\psi_{k+1}(x) = \psi_k(x) + \varphi_{n_{k+1}}(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in X\,.$$

Remarquons que toutes les fonctions ψ_k sont approximativement continues relativement à la base $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$ et que $\{x \in X : \psi_k(x) = f_{n_k}(x)\} \supset A$ pour $k = 1, 2, \ldots$. Comme la suite ψ_k est uniformément convergente, la fonction $g(x) = \lim_{k \to \infty} \psi_k(x)$ est approximativement continue par rapport à $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$, et

$$\{x \in X : f(x) = g(x)\} \supset A .$$

La condition est nécessaire. En effet, si $A \subset X$ est de mesure μ^* positive (μ^* est la mesure extérieure générée par la mesure μ), il existe un ensemble $B \supset A$ du type G_δ et tel que $\mu(B) = \mu^*(A)$. Soit $x_0 \in A$ un point de densité de l'ensemble B. La fonction

$$f(x) = \begin{cases} y_0 \neq 0 & \text{lorsque} \quad x = x_0 , \\ 0 & \text{lorsque} \quad x \neq x_0 , \end{cases}$$

est de première classe de Baire, mais toute fonction $g : X \to Y$ approximativement continue relativement à la base $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$ est telle que $A \not\subset \{x \in X : f(x) = g(x)\}$.

Remarque 3. Dans les hypothèses du théorème 2, si la fonction f est bornée, la fonction g peut être bornée aussi.

Remarque 4. Dans le cas où $Y = R$, le théorème 2 a été démontré dans [6] où l'auteur généralise le même théorème de Laczkovich et Petruska de l'article [6] concernant les fonctions réelles d'une variable réelle.

II. Dans cette partie nous supposons que $X = R$; μ soit une mesure définie sur la σ-algèbre des ensembles mesurables au sens de Lebesgue, G_δ-régulière, complète, sans-atomique et telle que tous les intervalles (a, b), où $-\infty < a < b < \infty$ soient de mesure μ positive et finie.

Soit $\mathfrak{F}$ la famille de tous les intervalles ouverts.

Théorème 3. *Soit $A \subset R$ un ensemble. Pour qu'il existe pour toute fonction $f : X \to Y$ de première classe de Baire une fonction $g : X \to Y$ approximativement continue relativement à la base de différentiation $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$, continue presque partout par rapport à la mesure μ et telle que $\{x \in R : f(x) = g(x)\} \supset A$, il faut et il suffit que la fermeture $Cl(A)$ de l'ensemble A soit de mesure μ zéro.*

Dans la démonstration de ce théorème nous appliquerons le lemme suivant:

Lemme 3. *Soient $A \subset R$ un ensemble fermé, borné de mesure μ zéro, $A_1 \subset A$ un ensemble fermé, $B \supset A_1$ un ensemble ouvert, $\varepsilon > 0$ et $y \in Y$. Dans ces hypothèses, il existe une fonction $h : X \to Y$, approximativement continue par rapport à la base $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$, continue en tout point $x \notin A_1$ et telle que $h(x) = y$ lorsque $x \in A_1$, $h(x) = 0$ lorsque $\varrho(x, A) := \inf_{y \in A} \varrho(x, y) \geqq \varepsilon$ et $h(x) = 0$ lorsque $x \in A - A_1$ et $\{x \in X : h(x) \neq 0\} \subset B$.*

Démonstration. Remarquons d'abord qu'il existe un nombre naturel n_0 tel que $1/n_0 < \varepsilon$ et désignons par B_n (pour $n > n_0$) l'ensemble $B \cap \{x \in X : 1/(n + 1) <$

$< \varrho(x, A_1) < 1/n\}$. Comme tous les ensembles B_n sont ouverts et de mesure μ finie, il existe pour tout $n > n_0$, un système fini d'intervalles fermés $\mathscr{J}_1^n, \mathscr{J}_2^n, \ldots, \mathscr{J}_{m_n}^n \subset$ $\subset B_n - A$ tel que $\mathscr{J}_i^n \cap \mathscr{J}_j^n = \emptyset$ lorsque $i \neq j$ et $i, j = 1, \ldots, m_n$ et $\mu(B_n - \bigcup_{i=1}^{m_n} \mathscr{J}_i^n) <$ $< 1/2^n$. Soient K_i^n ($n = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots$ et $i = 1, 2, \ldots, m_n$) les intervalles fermés disjoints deux à deux et tels que $\mathscr{J}_i^n \subset \mathrm{Int}(K_i^n)$ ($\mathrm{Int}(K_i^n)$ désigne comme d'habitude l'intérieur de l'intervalle K_i^n) et $K_i^n \subset B_n - A$ pour $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots$ et $i =$ $= 1, 2, \ldots, m_n$. On peut démontrer de la même façon que dans la démonstration du théorème 1 de l'article (1) que tout point $x \in A_1$ est un point de densité de l'ensemble $C = \bigcup_{n > n_0} \bigcup_{i=1}^{m_n} \mathscr{J}_i^n$ par rapport à la base $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$. On voit aussi que $\varrho(x, C) > 0$ pour tout point $x \in A - A_1$ et que l'ensemble $A_1 \cup \bigcup_{n > n_0} \bigcup_{i=1}^{m_n} K_i^n$ est fermé.

Soit $h : X \to Y$ une fonction qui satisfait aux conditions suivantes:

a) $h(x) = y$ en tout point $x \in C \cup A_1$;

b) $h(x) = 0$ lorsque $x \in X - (A_1 \cup \bigcup_{n > n_0} \bigcup_{i=1}^{m_n} K_i^n)$;

c) $h(x)$ appartient à l'inteıvalle $\overline{0y} = \{z \in Y : z = ty$ et $t \in [0, 1]\}$ lorsuqe $x \in$ $\in \bigcup_{n > n_0} \bigcup_{i=1}^{m_n} (K_i^n - J_i^n)$;

d) h est continue en tout point $x \in X - A_1$.

Cette fonction h satisfait à toutes les conditions exigées.

Démonstration du théorème 3. La condition est suffisante. En effet, il existe une suite de fonctions $f_n : X \to Y$ de première classe de Baire uniformément convergente vers la fonction f et telle que tout ensemble $f_n(X)$ est dénombrable et isolé ($n = 1, 2, \ldots$) (v. [5], p. 294–295). Démontrons d'abord qu'il existe pour toute fonction f_n une fonction $g_n : X \to Y$ approximativement continue par rapport à la base $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$, continue presque partout relativement à la mesure μ et telle que $\{x \in R :$ $: f_n(x) = g_n(x)\} \supset A$. Dans ce but fixons l'indice naturel n et rangeons tous les éléments de l'ensemble $f_n(X)$ en une suite $y_1^n, y_2^n, \ldots$ (finie ou infinie) telle que $y_i^n \neq y_j^n$ lorsque $i \neq j$. Tout ensemble $Cl(A) \cap f^{-1}(y_i^n)$ est du type F_σ et de mesure μ zéro, il est donc de première catégorie. On peut donc l'écrire

$$Cl(A) \cap f^{-1}(y_i^n) = \bigcup_j F_{ij}^n ,$$

où tous les ensembles F_{ij}^n sont fermés, bornés et disjoints deux à deux (v. [8]). Rangeons tous les ensembles F_{ij}^n ($i = 1, 2, \ldots$ et $j = 1, 2, \ldots$) en une suite $A_1, A_2, \ldots$ telle que $A_i \neq A_j$ lorsque $i \neq j$.

On voit facilement que $Cl(A) = \bigcup_i A_i$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ lorsque $i \neq j$.

D'après le lemme 3 il existe pour tout j une fonction $h_j : X \to Y$ approximativement continue par rapport à la base $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$, continue en tout point $x \notin A_j$ et telle que

$h_j(x) = f_n(x)$ pour tout $x \in A_j$, $h_j(x) = 0$ lorsque $\varrho(x, A_j) \geqq 1/j$ et $h_j(x) = 0$ lorsque $x \in Cl(A) - A_j$ et $\{x \in R : h_i(x) \neq 0\} \cap \{x \in X : h_j(x) \neq 0\} = \emptyset$ lorsque $i \neq j$. Posons

$$g_n(x) = \sum_j h_j(x) .$$

On voit que la fonction g_n est approximativement continue en tout point $x \in A$ par rapport à la base $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$ et continue en tout point $x \in A$ et que

$$\{x \in R : f_n(x) = g_n(x)\} \supset Cl(A) \supset A .$$

Soit $\{f_{n_k}\}$ une sous-suite de la suite $\{f_n\}$ telle que $\|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\| \leqq 1/2^{k+1}$ pour tout $x \in R$. Posons $\bar{\varphi}_{n_1}(x) = g_{n_1}(x)$ pour tout $x \in R$ et

$$\varphi_{n_i}(x) = \begin{cases} g_{n_i}(x) - g_{n_{i-1}}(x) & \text{lorsque} \quad \|g_{n_i}(x) - g_{n_{i-1}}(x)\| \leqq \dfrac{1}{2^i} \\ \dfrac{1}{2^i} \dfrac{g_{n_i}(x) - g_{n_{i-1}}(x)}{\|g_{n_i}(x) - g_{n_{i-1}}(x)\|} & \text{lorsque} \quad \|g_{n_i}(x) - g_{n_{i-1}}(x)\| > \dfrac{1}{2^i} \end{cases}$$

$(i = 2, 3, \ldots)$ et

$$\bar{\varphi}_{n_i}(x) = \bar{\varphi}_{n_{i-1}}(x) + \varphi_{n_i}(x) \quad \text{pour} \quad i \geqq 2 .$$

Toutes les fonctions $\bar{\varphi}_{n_i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ sont approximativement continues relativement à la base $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$ et continues en $x \in R - Cl(A)$ et la suite $\{\bar{\varphi}_{n_i}\}$ est uniformément convergente. Il en résulte que la fonction $g(x) = \lim_{i \to \infty} \bar{\varphi}_{n_i}(x)$ est approximativement continue relativement à la base $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$ et continue en tout point $x \in R - Cl(A)$. Comme, de plus, $\bar{\varphi}_{n_i}(x) = g_{n_i}(x) = f_{n_i}(x)$ pour tout point $x \in Cl(A)$, on a $f(x) = g(x)$ pour tout point $x \in Cl(A) \supset A$.

La condition est nécessaire. Soit $A \subset R$ un ensemble tel que $\mu(Cl(A)) > 0$. Il existe un ensemble $B \subset Cl(A)$ non-dense dans $Cl(A)$, dense en soi et de mesure μ positive. Désignons par $\mathcal{J}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ les complémentaires $R - B$ de l'ensemble B. Fixons un point x_n de l'ensemble A dans toute composante $\mathcal{J}_n$ qui coupe l'ensemble A. Il existe deux sous-ensembles $\{x_{n_k}\}$ et $\{x_{m_k}\}$ de l'ensemble $\{x_n\}$ qui sont disjoints et denses dans B. Fixons le point $y \in Y$ tel que $y \neq 0$ et posons

$$f(x) = \begin{cases} y & \text{lorsque} \quad x = x_{n_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{lorsque} \quad x \in R - \{x_{n_k} : k = 1, 2, \ldots\} . \end{cases}$$

On vérifie facilement que la fonction f est de première classe de Baire et que toute fonction $g : X \to Y$ telle que $f(x) = g(x)$ pour tout point $x \in A$ n'est continue en aucun point $x \in B$.

Remarque 5. Dans le théorème 3, si, en outre, la fonction f est bornée, la fonction g peut être bornée, aussi.

Remarque 6. Dans le cas où $Y = R$ et μ est la mesure de Lebesgue, le théorème 3 est démontré dans l'article [4].

Travaux cités

[1] *C. Goffman, C. J. Neugebauer, T. Nishiura:* Density topology and approximate continuity, Duke Math. J. *28* (1961), p. 497—505.
[2] *Z. Grande:* Granice ciągów funkcji approksymatywnie ciągłych, Zeszyty Naukowe Wydziału Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Gdańskiego, Matematyka Nr. *3* (1976), p. 5—9.
[3] *Z. Grande:* O przedłużaniu funkcji pierwszej klasy Baire'a, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Matematyka *XI* (1978), p. 71—74.
[4] *Z. Grande:* Sur le prolongement des fonctions, Acta Mathematica Acad. Sci. Hungaricae *34* (1979), p. 43—45.
[5] *K. Kuratowski:* Topologie I, Warszawa 1958.
[6] *M. Laczkovich, G. Petruska:* Baire 1 functions, approximately continuous functions and derivatives, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *25* (1974), p. 189—212.
[7] *D. Preiss:* Limits of approximately continuous functions, Czech. Math. J. *96* (1971), p. 371—372.
[8] *W. Sierpiński:* Sur l'ensemble des points de convergence d'une suite de fonctions continues, Fund. Math. *2* (1921), p. 41—49.

Adresse des auteurs: Wyższa Szkoła Pedagogiczna, Bydgoszcz, Pologne.