Časopis pro pěstování matematiky

Jiří Sedláček

O kubických grafech

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 107 (1982), No. 3, 301--306

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/118123

O KUBICKÝCH GRAFECH

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

(Došlo dne 4. června 1981)

Tento článek navazuje na jeden výsledek z autorovy práce [6]. Předmětem úvahy jsou i zde neorientované grafy G bez smyček a násobných hran. Jsou-li G, H dané grafy, pak $G \cong H$ nechť znamená, že G je izomorfní s H, zatímco $G \sim H$ nechť značí, že G je homeomorfní s H. Zápis K_n resp. $K_{m,n}$ má obvyklý význam (úplný graf resp. úplný sudý graf) a $\bar{G}$ značí graf komplementární ke G. Pojmy, jež zde nejsou definovány, se najdou např. v knížce [7].

Nechť G je graf a u jeho uzel aspoň 1. stupně. *Okolím* $N_1(u, G)$ (nebo stručně $N_1(u)$) jsme v práci [6] rozuměli podgraf grafu G indukovaný na množině všech uzlů sousedních s u. Soustředíme zde pozornost na konečné souvislé kubické grafy a třídu těchto grafů označíme $\mathfrak{K}$.

Dáme-li stranou graf K_4, pak v každém souvislém kubickém grafu jsou okolí trojího typu: buď $N_1(u) \cong K_{1,2}$ nebo $N_1(u) \cong \bar{K}_{1,2}$ nebo $N_1(u) \cong \bar{K}_3$. Každému grafu $G \in \mathfrak{K}$ s aspoň šesti uzly jsme v práci [6] přiřadili trojici (x, y, z) celých nezáporných čísel, přičemž x, y, z značí po řadě počet uzlů prvního, druhého a třetího typu. Říkáme stručně, že G je typu (x, y, z). Ve článku [6] jsme charakterizovali, jakého typu jsou grafy $G \in \mathfrak{K}$. Pro grafy s malým počtem uzlů jsme typy podali výčtem a pak jsme ukázali, že pro grafy s aspoň deseti uzly platí tato jednoduchá věta:

Věta 1. *Nechť n je sudé přirozené číslo, $n \geqq 10$, a nechť (x, y, z) je trojice celých nezáporných čísel. Potom existuje graf $G \in \mathfrak{K}$ na n uzlech, který je typu (x, y, z), právě tehdy, existují-li celá nezáporná čísla r, s tak, že*

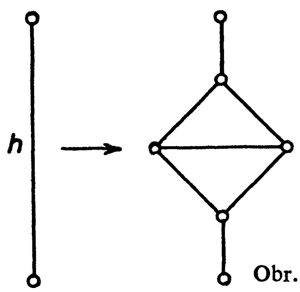
$$x = 2r\,, \quad y = 2r + 3s\,, \quad z = n - 4r - 3s\,. \tag{1}$$

V tomto článku výsledek „zjemníme“ tím, že se budeme zajímat zvlášť o grafy nerovinné a zvlášť o rovinné. Pro stručnost vyjadřování nechť $\mathfrak{N}$ (resp. $\mathfrak{R}$) je třída všech konečných souvislých kubických grafů, které jsou nerovinné (resp. rovinné).

V grafové literatuře se často vyskytuje pojem kontrakce (ne nutně kubického) grafu G podle jeho podgrafu T (viz např. [2], str. 28, contraction d'un ensemble, nebo [3], str. 7, contracting a subgraph to a vertex, nebo [5], str. 212 a 213, Kontraktion, Vergröbung eines Graphen). *Kontrakcí* $k(G, T)$ rozumíme graf, který vznikne z G tím, že podgraf T nahradíme jediným uzlem t a spojíme jej hranou se všemi uzly grafu G nepatřícími do T a sousedícími aspoň s jedním uzlem podgrafu T. Zde budeme potřebovat jen speciální druh kontrakce $k(G, T)$, kdy totiž T je trojúhelník. Je zřejmé toto: Je-li $G \in \mathfrak{K}$ a je-li T jeho trojúhelník, jehož všechny tři uzly jsou typu $\bar{K}_{1,2}$, pak $k(G, T) \in \mathfrak{K}$.

Nechť G je graf a nechť t je jeho uzel 3. stupně; pak definujme graf $k^{-1}(G, t)$ takto: Vyhledejme ty tři uzly w_1, w_2, w_3, jež v G sousedí s t, nahraďme uzel t trojúhelníkem T a spojme po řadě každý uzel trojúhelníka T s jedním z uzlů w_1, w_2, w_3. Je vidět, že pro $G \in \mathfrak{N}$ platí $k^{-1}(G, t) \in \mathfrak{N}$, kde t je libovolný uzel grafu G. Obdobné tvrzení platí i pro třídu $\mathfrak{R}$.

Poslední operace, kterou budeme potřebovat, je tato: Nechť h je hrana grafu G. Označme $\omega(G, h)$ graf, jenž vznikne z G tak, že hranu h (spolu s jejími koncovými



Obr. 1.

uzly) nahradíme podgrafem, jak to schematicky ukazuje obr. 1. Opět je vidět, že $G \in \mathfrak{N}$ pro každou hranu h grafu G implikuje $\omega(G, h) \in \mathfrak{N}$ a podobně pro třídu $\mathfrak{R}$.

Věta 2. *Nechť n je sudé přirozené číslo, $n \geqq 6$, a nechť (x, y, z) je trojice celých nezáporných čísel. Potom existuje graf $G \in \mathfrak{N}$ na n uzlech, který je typu (x, y, z), právě tehdy, existují-li celá nezáporná čísla r, s tak, že platí (1) a současně*

$$4r + 2s \leqq n - 6 . \tag{2}$$

Důkaz. I. Nechť G existuje. Pro $n = 6$ je $G \cong K_{3,3}$ a příslušná trojice $(0, 0, 6)$ vyhovuje podmínkám (1), (2). Při $n = 8$ máme pro graf G dvě možnosti, jimž odpovídají trojice $(0, 0, 8)$ a $(0, 3, 5)$; i tyto trojice splňují podmínky (1), (2). Nechť tedy $n \geqq 10$, n sudé. Z věty 1 vyplývá, že x, y, z vyhovují podmínce (1). Ověřme ještě podmínku (2).

Nechť

$$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_r \ (r \geqq 1)$$

jsou všechny čtveřice uzlů grafu G, na nichž G indukuje podgraf izomorfní s $K_4 - h$, kde h je hrana grafu K_4. Pišme $r = 0$, neexistuje-li žádná taková čtveřice. Dále nechť

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_s \ (s \geqq 1)$$

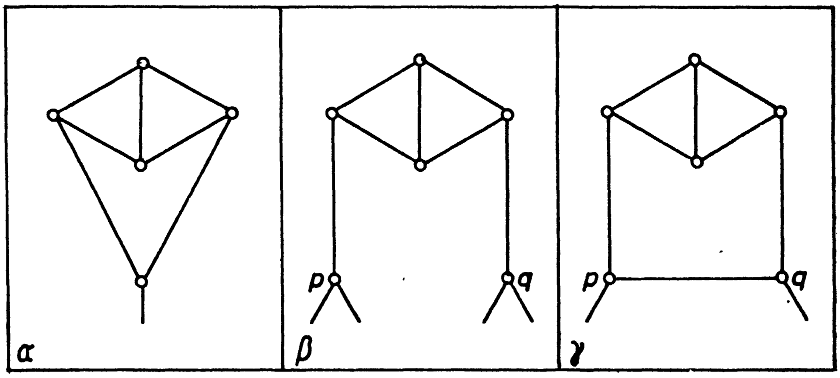
jsou všechny trojice uzlů grafu G, na nichž G indukuje trojúhelník, přičemž při $r \neq 0$ není $\Delta_i \subset Q_j$ pro žádné dva indexy i, j. (Všechny uzly z trojice Δ_i jsou tedy typu $\bar{K}_{1,2}$.) Opět pišme $s = 0$, neexistuje-li žádná taková trojice Δ_i. Při $r \neq 0$ položme

$$Q = \bigcup_{j=1}^{r} Q_j \, .$$

Z grafu G sestrojíme nový graf G' takto:

a) Je-li $r = s = 0$, pak nechť $G' = G$.

b) Je-li $r \neq 0$, $s = 0$, mohou pro jednotlivé čtveřice Q_i nastat tři případy, jež zachycuje obr. 2. Sestrojme graf $G^* = G - Q$, přičemž v případě, že v G existují též čtveřice Q_i typu β), doplňme G^* ještě vždy hranou pq. Tak nechť vznikne G'.



Obr. 2.

c) Při $r = 0$, $s \neq 0$ sestrojme po řadě kontrakce

$${}^{j}G = k({}^{j-1}G, T_j)\,, \quad j = 1, 2, \ldots, s\,,$$

kde T_j je trojúhelník grafu G indukovaný na trojici uzlů Δ_j a ${}^{0}G = G$. Dá se ukázat, že ${}^{s}G$ nezávisí na pořadí, v němž kontrakce provádíme. Položme $G' = {}^{s}G$.

d) Při $r \neq 0$, $s \neq 0$ proveďme nejprve konstrukci popsanou pod b) a pak konstrukci popsanou pod c). Tím nechť vznikne graf G'.

Ověříme, že ve všech případech G' je nerovinný. Pro a) je to jasné, pro ostatní případy si smluvíme toto označení:

Nechť $G_1 \sim K_{3,3}$ je podgraf grafu G, jehož existence plyne z nerovinnosti*) podle Kuratowského věty. Označme u_k^* resp. v_k^* $(k = 1, 2, 3)$ uzly grafu $K_{3,3}$, jež jsou 1. resp. 2. třídy, a nechť u_k resp. v_k jsou uzly grafu G, jež jim odpovídají v homeomor-

*) Rovinnost (resp. nerovinnost) kubického grafu byla nedávno zkoumána i z jiného hlediska (viz [4]).

fismu. Nechť $c(u_k, v_l)$ je cesta v G_1 spojující uzly u_k, v_l a konečně položme

$$U = \{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}.$$

V případě b) sestrojíme v grafu G' podgraf $G_2 \sim K_{3,3}$ takto: Nejprve si uvědomíme, že $|Q \cap U| = 0$ a že žádné dvě různé**) cesty $c(u_k, v_l)$, $c(u_{k*}, v_{l*})$ nemohou mít s týmž Q_i neprázdný průnik. Je-li Q_i typu α), nemá $c(u_k, v_l)$ s Q_i žádný společný uzel. Je-li Q_i tvaru β) nebo γ) a není-li Q_i s $c(u_k, v_l)$ disjunktní, upravíme každou cestu $c(u_k, v_l)$ tak, že vynecháme část mezi p a q a novou cestu (ležící v G') vedeme přes hranu pq. Po všech těchto úpravách vznikne z G_1 graf G_2 a G' je tedy nerovinný.

V případě c) je zřejmě $|\Delta_j \cap U| \leqq 1$ pro každé j. Mají-li dvě různé cesty $c(u_k, v_l)$, $c(u_{k*}, v_{l*})$ s týmž Δ_j grafu G neprázdný průnik, pak (po eventuální změně označení) musí být

$$u_k = u_{k*}, \quad u_k \in \Delta_j.$$

Existují-li indexy j, pro něž $|\Delta_j \cap U| = 1$, můžeme předpokládat, že jsou to čísla $1, 2, \ldots, s_0$ a sestrojíme kontrakci ${}^{s_0}G$. V grafu G_1 se při změně G v graf ${}^{s_0}G$ změní některé (případně všechny) uzly z množiny U a z G_1 vznikne opět graf homeomorfní s $K_{3,3}$. Další kontrakce odpovídající indexům $s_0 + 1, s_0 + 2, \ldots, s$ ponechávají už na každé cestě $c(u_k, v_l)$ beze změny počáteční a koncový uzel a zkrátí ji vždy o žádnou, o jednu nebo dvě hrany. Vlastnost „být cestou“ se však neporuší. Celkem tak z G_1 získáme $G_2 \sim K_{3,3}$.

Konečně v případě d) projdeme nejprve postupem popsaným pod b) a pak postupem popsaným pod c), čímž G modifikujeme na G' a G_1 na $G_2 \sim K_{3,3}$.

Graf G' má o $4r + 2s$ uzlů méně než graf G a z nerovinnosti plyne, že má aspoň šest uzlů. Z toho už vychází vztah (2).

II. Nechť obráceně je dána trojice (x, y, z) splňující podmínky (1), (2). Existenci grafu $G \in \mathfrak{N}$ na n uzlech dokážeme matematickou indukcí podle n. Pro $n = 6$ přichází v úvahu jen trojice $(0, 0, 6)$ a pro $n = 8$ dvě trojice $(0, 0, 8)$ a $(0, 3, 5)$. Pohled do tabulky v práci [1] nás přesvědčí, že každá z těchto tří trojic se dá realizovat grafem $G \in \mathfrak{N}$ na šesti resp. osmi uzlech. Nechť n je sudé, $n \geqq 6$, a nechť se každá přípustná trojice se součtem n nebo $n + 2$ dá realizovat grafem $G \in \mathfrak{N}$. Budiž (x_0, y_0, z_0) přípustná trojice se součtem $n + 4$.

Je-li $x_0 < y_0$, pak $(x_0, y_0 - 3, z_0 + 1)$ je přípustná trojice se součtem $n + 2$ a dá se tedy pokládat za typ nějakého grafu $G^{(1)} \in \mathfrak{N}$ na $n + 2$ uzlech. Aspoň jeden jeho uzel t je typu $\bar{K}_3$. Graf $G^{(2)} = k^{-1}(G^{(1)}, t)$ má o tři uzly typu $\bar{K}_{1,2}$ více a o jeden uzel typu $\bar{K}_3$ méně než graf $G^{(1)}$. Graf $G^{(2)}$ na $n + 4$ uzlech je tedy typu (x_0, y_0, z_0) a patří do $\mathfrak{N}$.

Je-li $x_0 = y_0 > 0$, pak $(x_0 - 2, y_0 - 2, z_0)$ je zřejmě přípustná trojice pro součet n a můžeme ji tedy pokládat za typ jistého grafu $G^{(3)} \in \mathfrak{N}$ na n uzlech. V $G^{(3)}$ lze zřejmě zvolit hranu h neležící v trojúhelníku. Graf $\omega(G^{(3)}, h)$ je na $n + 4$ uzlech, je typu (x_0, y_0, z_0) a patří do $\mathfrak{N}$.

**) Za různé tu nepokládáme dvě cesty, jež se liší jen orientací.

Je-li konečně $x_0 = y_0 = 0$, pak uvažovanou trojici realizujeme např. Möbiusovým žebříkem M_{n+4} (viz [7], str. 118). Tím důkaz končí.

Obraťme se nyní ke grafům na n uzlech, jež patří do $\mathfrak{R}$. Pro $n = 6$ existuje jediný a ten je typu $(0, 6, 0)$, pro $n = 8$ jsou tři a ty jsou po řadě typů $(0, 0, 8)$, $(0, 6, 2)$ a $(4, 4, 0)$ a pro $n = 10$ je takových grafů devět a mají typy

$$(0, 0, 10),\ (0, 3, 7),\ (0, 6, 4),\ (0, 9, 1),\ (2, 5, 3),\ (2, 8, 0),\ (4, 4, 2),$$

přičemž prvnímu a třetímu typu odpovídají dva grafy ze třídy $\mathfrak{R}$. Pro $n = 10$ tedy chybí trojice $(2, 2, 6)$, abychom mohli říci, že všechny typy splňují podmínku (1). Teprve pro $n \geqq 12$ máme tuto přehlednou větu:

Věta 3. *Nechť n je sudé přirozené číslo, $n \geqq 12$, a nechť (x, y, z) je trojice celých nezáporných čísel. Potom existuje graf $G \in \mathfrak{R}$ na n uzlech, který je typu (x, y, z), právě tehdy, existují-li celá nezáporná čísla r, s tak, že platí* (1).

Důkaz. Vzhledem k větě 1 stačí dokázat, že každá trojice (x, y, z) se součtem n splňující podmínku (1) je typem nějakého grafu na n uzlech patřícího do $\mathfrak{R}$. To dokážeme matematickou indukcí podle n. Pro $n = 12$ jsou přípustné trojice

$$(0, 0, 12),\ (0, 3, 9),\ (0, 6, 6),\ (0, 9, 3),\ (0, 12, 0),\ (2, 2, 8),\ (2, 5, 5),$$
$$(2, 8, 2),\ (4, 4, 4),\ (4, 7, 1),\ (6, 6, 0)$$

a lze je realizovat po řadě např. grafy, jejichž očíslování ve shodě s prací [1] je

$$66,\ 38,\ 11,\ 12,\ 14,\ 25,\ 2,\ 3,\ 5,\ 1,\ 22.$$

Podobně se přesvědčíme, že se pro $n = 14$ všechny přípustné trojice dají pokládat za typ nějakého grafu ze třídy $\mathfrak{R}$.

Nechť n je přirozené a sudé, $n \geqq 12$, a nechť každou přípustnou trojici (x, y, z) se součtem n nebo $n + 2$ můžeme pokládat za typ vhodného grafu ze třídy $\mathfrak{R}$. Označme (x_0, y_0, z_0) přípustnou trojici se součtem $n + 4$.

Je-li $x_0 < y_0$, pak úvaha o trojici $(x_0, y_0 - 3, z_0 + 1)$ nás obdobně jako v důkaze věty 2 vede ke grafu $G^{(1)} \in \mathfrak{R}$ na $n + 2$ uzlech. Budiž t uzel grafu $G^{(1)}$ a nechť t je typu $\bar{K}_3$. Graf $k^{-1}(G^{(1)}, t)$ má $n + 4$ uzly, je typu (x_0, y_0, z_0) a patří do $\mathfrak{R}$.

Je-li $x_0 = y_0 > 0$, pak nám zase pomůže trojice $(x_0 - 2, y_0 - 2, z_0)$. Graf, jehož je tato trojice typem, upravíme zase operací ω a sestrojíme tak potřebnou realizaci trojice (x_0, y_0, z_0) grafem ze třídy $\mathfrak{R}$.

Konečně případ $x_0 = y_0 = 0$ lze realizovat grafem m-bokého hranolu pro $m = \frac{1}{2}(n + 4)$. Konec důkazu.

Literatura

[1] *F. C. Bussemaker - S. Čobeljić - D. M. Cvetković - J. J. Seidel:* Computer investigation of cubic graphs. Technological University Eindhoven, The Netherlands, Department of Mathematics, January 1976.

[2] *C. Berge:* Graphes et hypergraphes, Dunod, Paris 1970.
[3] *S. Fiorini - R. J. Wilson:* Edge-colourings of graphs. Research Notes in Mathematics 16, London—San Francisco—Melbourne, Pitman 1977.
[4] *C. H. Little:* A characterization of planar cubic graphs. J. Combinatorial Theory, Ser. B 29 (1980), 185—194.
[5] *H. Sachs:* Einführung in die Theorie der endlichen Graphen II. Leipzig 1972.
[6] *J. Sedláček:* Lokální vlastnosti grafů. Čas. pěst. mat. *106* (1981), 290—298.
[7] *J. Sedláček:* Úvod do teorie grafů (druhé vydání). Praha 1977.

Adresa autora: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

Summary

ON CUBIC GRAPHS

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

The *neighborhood* of a vertex u in a graph G is understood to be the subgraph $N_1(u, G)$ of G induced by all vertices adjacent to u. Let $\mathfrak{K}$ be the class of all finite connected cubic graphs with more then four vertices each. If $G \in \mathfrak{K}$ then $N_1(u, G)$ is isomorphic either to $K_{1,2}$ or to $\overline{K}_{1,2}$ or to $\overline{K}_3$. Construct the triple (x, y, z), where x, y, and z are the numbers of vertices of the first type, of the second type, and of the third type, respectively. The triple (x, y, z) is called the *type* of G. In [6] the types of all graphs from $\mathfrak{K}$ were characterized.

Let $\mathfrak{N}$ be the class consisting of all nonplanar graphs from $\mathfrak{K}$. In the present note the following two results are obtained:

A) *Let n be an even integer, $n \geqq 6$. Let (x, y, z) be a triple of nonnegative integers. Then there exists a graph $G \in \mathfrak{N}$ on n vertices which is of type (x, y, z) if and only if there exist nonnegative integers r, s satisfying*

$$(1) \qquad x = 2r\,, \quad y = 2r + 3s\,, \quad z = n - 4r - 3s$$

and simultaneously

$$4r + 2s \leqq n - 6\,.$$

B) *Let n be an even integer, $n \geqq 12$. Let (x, y, z) be a triple of nonnegative integers. Then there exists a graph $G \in \mathfrak{K} - \mathfrak{N}$ on n vertices which is of type (x, y, z) if and only if there exist nonnegative integers r, s fulfilling* (1).