Časopis pro pěstování matematiky

Cherim A. Skhalyakho

О неколеблемости решений одной системы двух дифференциальных уравнений

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 107 (1982), No. 2, 139--142

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/118115

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 107 (1982), Praha

О НЕКОЛЕБЛЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЧЕРИМ А. СХАЛЯХО, Тбилиси

(Поступило в редакцию 17/III. 1980 г.)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

(1) $$u_1' = a_1(t)\,|u_2|^{\lambda_1}\operatorname{sign} u_2\,,\quad u_2' = a_2(t)\,|u_1|^{\lambda_2}\operatorname{sign} u_1$$

являющуюся обобщением уравнения Эмдена-Фаулера

(2) $$u'' = a_0(t)\,|u|^{\lambda_0}\operatorname{sign} u\,.$$

Всюду в дальнейшем показатели $\lambda_k (k = 0, 1, 2)$ предполагаются положительными и коэффициенты $a_k : [0, +\infty[\to R$ $(k = 0, 1, 2)$ – локально абсолютно непрерывными. Под решением системы (I) понимаются решения, определенные в некоторой окрестности $+\infty$.[1])

Нетривиальное решение $(u_i)_{i=1}^2$ системы (1) называется *колеблющимся*, если каждая его компонента имеет последовательность нулей, сходящуюся $k + \infty$, *и неколеблющимся* — в противном случае.

Согласно известной теореме Курцвейля-Ясного [1, 2], если $\lambda_0 > 1$, $a_0(t) < 0$ и функция $t^{(3+\lambda_0)/2}|a_0(t)|$ не убывает, то уравнение (2) имеет нетривиальное колеблющееся решение.

И. Т. Кигурадзе [3] доказал, что если $\lambda_0 > 1$, $a_0(t) < 0$ и при некотором $\varepsilon > 0$ функция $t^{(3+\lambda_0)/2+\varepsilon}|a_0(t)|$ не возрастает, то любое нетривиальное решение уравнения (2) является неколеблющимся.

Из теоремы 2 работы Д. Д. Мирзова [4] для системы (1) получается следующий аналог теоремы Курцвейля-Ясного: если $\lambda_1 . \lambda_2 > 1$, $a_1(t) > 0$, $a_2(t) < 0$, $\int_0^{+\infty} a_1(s)\,ds = +\infty$ и функция

$$\frac{|a_2(t)|}{a_1(t)}\left(\int_0^t a_1(s)\,ds\right)^{(2+\lambda_1+\lambda_2)/(1+\lambda_1)}$$

не убывает, то система (1) имеет нетривиальное колеблющееся решение.

---

[1]) Как это показано в [4], если $a_1(t) > 0$, $a_2(t) < 0$ при $t \geqq 0$, то все максимально продолженные вправо решения являются таковыми.

Приведенная ниже теорема 1 является аналогом упомянутой теоремы И. Т. Кигурадзе. При ее доказательстве используется теорема 2.1 из [5], гласящая, что если $\lambda_1 . \lambda_2 = 1$, $\int_0^{+\infty} a_1(s)\,\mathrm{d}s = +\infty$ и для больших t соблюдаются неравенства

$$(-1)^{i-1}\, a_i(t) \geqq 0 \ (i = 1, 2)\,, \quad |a_2(t)| \leqq (1 + \lambda_1)^{-1-\lambda_2}\, a_1(t) \left(\int_0^t a_1(s)\,\mathrm{d}s \right)^{-1-\lambda_2},$$

то любое нетривиальное решение системы (1) является неколеблющимся.

Теорема 1. *Пусть* $\lambda_1 . \lambda_2 > 1$, $a_1(t) > 0$, $a_2(t) < 0$, $T > 0$, $\int_0^{+\infty} a_1(s)\,\mathrm{d}s = +\infty$ *и для некоторого* $\varepsilon > 0$ *фубкция*

$$A(t) = \frac{|a_2(t)|}{a_1(t)} \left(\int_0^t a_1(s)\,\mathrm{d}s \right)^{(2+\lambda_1+\lambda_2)/(1+\lambda_1)+\varepsilon}$$

не возрастает при $t \geqq T$. *Тогда любое нетривиальное решение системы* (1) *является неколеблющимся.*

Доказательство. Допустим противное, что система (1) имеет нетривиальное колеблющееся решение $(u_i)_{i=1}^2$.

Пусть $\alpha = \varepsilon/(1 + \lambda_2)$, $b(t) = \int_0^t a_1(s)\,\mathrm{d}s$, а $(t_k)_{k=0}^{+\infty}$ – возрастающая последовательность нулей функции u_1, сходящаяся к $+\infty$, $t_0 \geqq T$. Умножив обе части второго равенства в (1) на

$$\frac{(b(t))^{(2+\lambda_1)/(1+\lambda_1)+\alpha}}{a_1(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[(b(t))^{-1/(1+\lambda_1)-\alpha} . u_1(t) \right]$$

и проинтегрировав от t_0 до t_k, получим

$$-\left(\frac{1}{1 + \lambda_1} + \alpha \right) \int_{t_0}^{t_k} u_1(s)\, u_2'(s)\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t_k} b(s)\, |u_2(s)|^{\lambda_1} . |u_2(s)|'\,\mathrm{d}s =$$

$$= -\frac{1}{1 + \lambda_2} \int_{t_0}^{t_k} A(s)\,\mathrm{d}\left[(b(s))^{-1/(1+\lambda_1)-\alpha} . |u_1(s)| \right]^{1+\lambda_2}.$$

Однако,

$$\int_{t_0}^{t_k} u_1(s)\, u_2'(s)\,\mathrm{d}s = -\int_{t_0}^{t_k} u_2(s)\, u_1'(s)\,\mathrm{d}s = -\int_{t_0}^{t_k} a_1(s)\, |u_2(s)|^{1+\lambda_1}\,\mathrm{d}s\,,$$

$$\int_{t_0}^{t_k} b(s)\, |u_2(s)|^{\lambda_1}\, |u_2(s)|'\,\mathrm{d}s = \frac{b(t_k)\, |u_2(t_k)|^{1+\lambda_1}}{1 + \lambda_1} - \frac{b(t_0)\, |u_2(t_0)|^{1+\lambda_1}}{1 + \lambda_1} -$$

$$- \frac{1}{1 + \lambda_1} \int_{t_0}^{t_k} a_1(s)\, |u_2(s)|^{1+\lambda_1}\,\mathrm{d}s\,.$$

Следовательно,

$$\alpha(1+\lambda_1)\int_{t_0}^{t_k} a_1(s)\,|u_2(s)|^{1+\lambda_1}\,\mathrm{d}s = -b(t_k)\,|u_2(t_k)|^{1+\lambda_1} + b(t_0)\,|u_2(t_0)|^{1+\lambda_1} +$$

$$+\frac{1+\lambda_1}{1+\lambda_2}\int_{t_0}^{t_k} A'(s)\,\big[(b(s))^{-1/(1+\lambda_1)-\alpha}\,.\,|u_1(s)|\big]^{1+\lambda_2}\,\mathrm{d}s\,.$$

Так как $A'(t) \leqq 0$, то из последнего равенства следует, что

$$\int_{t_0}^{+\infty} a_1(s)\,|u_2(s)|^{1+\lambda_1}\,\mathrm{d}s \leqq C_0\,, \tag{3}$$

где

$$C_0 = \frac{b(t_0)\,|u_2(t_0)|^{1+\lambda_1}}{\alpha(1+\lambda_1)}\,.$$

Применяя неравенство Гельдера, из (1) находим

$$|u_1(t)| \leqq \int_{t_0}^{t} a_1(s)\,|u_2(s)|^{\lambda_1}\,\mathrm{d}s \leqq \left(\int_{t_0}^{t} a_1(s)\,\mathrm{d}s\right)^{1/(1+\lambda_1)}\left(\int_{t_0}^{t} a_1(s)\,|u_2(s)|^{1+\lambda_1}\,\mathrm{d}s\right)^{\lambda_1/(1+\lambda_1)}$$

$$\text{при} \quad t \geqq t_0\,.$$

Отсюда ввиду (3) вытекает, что

$$|u_1(t)| \leqq \big[c_0^{\lambda_1}\,b(t)\big]^{1/(1+\lambda_1)} \quad \text{при} \quad t \geqq t_0\,. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь систему

$$v_1' = a_1(t)\,|v_2|^{\lambda_1}\operatorname{sign} v_2\,, \quad v_2' = a_2^*(t)\,|v_1|^{1/\lambda_1}\operatorname{sign} v_1\,, \tag{5}$$

где

$$a_2^*(t) = a_2(t)\,|u_1(t)|^{(\lambda_1\lambda_2-1)/\lambda_1}\,.$$

Ввиду неравенства (4) очевидно, что при достаточно больших t

$$|a_2^*(t)| \leqq c_0^{(\lambda_1\lambda_2-1)/(1+\lambda_1)}\,A(t)\,b^{-\varepsilon}(t)\,a_1(t)\,(b(t))^{-(1+\lambda_1)/\lambda_1} \leqq$$

$$\leqq (1+\lambda_1)^{-(1+\lambda_1)/\lambda_1}\,a_1(t)\,(b(t))^{-(1+\lambda_1)/\lambda_1}\,.$$

Согласно сформулированной выше теореме из [5] последнее неравенство гарантирует неколеблемость всех нетривиальных решений системы (5). Но это невозможно, так как $(u_i)_{i=1}^2$ является колеблющимся решением этой системы. Получили противоречие, что и доказывает теорему.

Предложение аналогичного характера можно доказать и для более общей системы

$$u_1' = a(t)\,|u_2|^{\lambda}\operatorname{sign} u_2\,, \quad u_2' = f(t, |u_1|)\operatorname{sign} u_1\,, \tag{6}$$

где $\lambda > 0$, функция $a : [0, +\infty[\to]0, +\infty[$ абсолютно непрерывна на каждом конечном отрезке промежутка $[0, +\infty[$, $f : [0, +\infty[\times [0, +\infty[\to] - \infty, 0]$ — непрерывная функция. А именно, имеет место

Теорема 2. *Пусть* $\int_0^{+\infty} a(s)\,\mathrm{d}s = +\infty$ *и для любого* $t \geqq 0$ *выполняются условия*

$$\lim_{x \to 0+} x^{-1/\lambda} f(t, x) = 0\,,$$

$$x_1^{-1/\lambda} f(t, x_1) \geqq x_2^{-1/\lambda} f(t, x_2) \quad \textit{при} \quad 0 < x_1 \leqq x_2\,.$$

Пусть, далее, найдется такое число $\gamma > 1/(1 + \lambda)$, *что при всяком фиксированном* $x > 0$ *функция*

$$\frac{\left(\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s\right)^{\gamma+1}}{a(t)} \cdot \left| f\left(t, \left(\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s\right)^{\gamma} x\right)\right|$$

абсолютно непрерывна на каждом конечном отрезке промежутка $[0, +\infty[$ *и не возрастает по* t. *Тогда любое нетривиальное решение системы* (6) *является некочеблющимся.*

Литература

[1] *М. Ясны:* О существовании колебющегося решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + f(x)\,y^{2n-1} = 0$. Čas. pěst. mat., *85* (1960), 1, 78—83.

[2] *Я. Курцвейль:* Заметка по колеблющимся решениям уравнения $y'' + f(x)\,y^{2n-1} = 0$. Čas. pěst. mat., *85* (1960), 3, 357—358.

[3] *И. Т. Кигурадзе:* Об условиях колеблемости решений уравнения $u'' + a(t)\,|u|^n \operatorname{sign} u = 0$. Čas. pěst. mat., *87* (1962), 3, 492—495.

[4] *Д. Д. Мирзов:* Об одном аналоге теоремы Курцвейля-Ясного для системы двух дифференциальных уравнений. Čas. pěst. mat., *101* (1976), 1, 45—52.

[5] *J. D. Mirzov:* On some analogs of Sturm's and Kneser's theorems for nonlinear systems. J. Math. Anal. and Appl., *53* (1976), 2, 418—425.

Адрес автора: СССР, г. Тбилиси, 380043, Университетская ул. 2 (Институт прикладной математики им. И. Н. Векуа Тбилисского государственного университета).