Časopis pro pěstování matematiky, roč. 104 (1979), Praha

HOMOMORPHISMEN UND PSEUDOHOMOMORPHISMEN DER TERNÄRRINGE UND HOMOMORPHISMEN SCHWACHER PSEUDOEBENEN

FRANTIŠEK MACHALA, Olomouc

(Eingegangen am 2. November 1976)

M. HALL bewies in [2], daß jede projektive Ebene durch einen Ternärkörper algebraisch beschreibbar ist. In den Arbeiten [4], [7] werden solche Inzidenzstrukturen studiert, die vermittels algemeineren Ternärstrukturen koordinatisierbar sind. In vorliegender Arbeit versteht man unter schwacher Pseudoebene (kurz SP-Ebene) eine solche Inzidenzstruktur, die sich durch einen Ternärring (Definition 1) koordinatisieren läßt.

L. A. SKORNJAKOV beschrieb in [6] alle Homomorphismen einer projektiven Ebene durch T-Homomorphismen des zugehörigen Ternärkörpers und in [5] werden einige Ergebnisse über Homomorphismen der sog. Pseudoebenen angeführt. In vorliegender Arbeit werden die Ergebnisse aus [6] auf SP-Ebenen verallgemeinert. Dabei werden die Homomorphismen der Ternärringe, Ideale in den Ternärringen und Restklassen-Ternärringe angewendet, die in [3] eingeführt sind.

Im Paragraphen 1 werden Pseudohomomorpshimen eines Ternärringes definiert und es wird gezeigt, daß für einen Ternärkörper die Definitionen des Pseudohomomorphismus und T-Homomorphismus äquivalent sind.

Im Paragraphen 2 werden SP-Ebenen durch Anwendung der Ergebnisse aus [4] und [7] erklärt. Auf Grund des klassischen Verfahrens wird zu jeder SP-Ebene $\mathscr{M}$ ein Ternärring $T_{\mathscr{M}}$ und zu jedem Ternärring T eine SP-Ebene $\mathscr{M}_T$ konstruiert.

Im Paragraphen 3 werden v-Homomorphismen einer SP-Ebene $\mathscr{M}$ auf eine SP-Ebene $\mathscr{M}'$ untersucht. Es wird gezeigt, daß jeder v-Homomorphismus von $\mathscr{M}$ auf $\mathscr{M}'$ vermittels des Homomorphismus des Ternärringes $T_{\mathscr{M}}$ auf $T_{\mathscr{M}'}$ beschreibbar ist. Für eine SP-Ebene $\mathscr{M}$ werden mit Hilfe der Restklassen-Ternärringe von $T_{\mathscr{M}}$ alle ihre v-Homomorphismen (bis auf einen Isomorphismus) beschrieben.

Im Paragraphen 4 untersucht man Homomorphismen einer SP-Ebene, die keine v-Homomorphismen sind. Es wird gezeigt, daß jeder Homomorphismus einer SP-Ebene $\mathscr{M}$ auf eine SP-Ebene $\mathscr{M}'$ vermittels eines Pseudohomomorphismus von $T_{\mathscr{M}}$

beschreibbar ist. Mit Hilfe jedes Pseudohomomorphismus eines Ternärringes T auf einen Ternärring T' läßt sich umgekehrt ein Homomorphismus der SP-Ebene $\mathcal{M}_T$ auf die SP-Ebene $\mathcal{M}_{T'}$ bestimmen.

§ 1. Homomorphismen und Pseudohomomorphismen der Ternärringe

Definition 1. Ein *Ternärring* T ist ein Paar (R, t), wo R eine Menge, t eine Ternäroperation über R sind, wobei gilt:

(K1) Es existieren zwei verschiedene Elemente $0, 1 \in R$ mit $t(0, a, b) = t(a, 0, b) = b$, $t(1, a, 0) = t(a, 1, 0) = a$ für alle $a, b \in R$.

(K2) Zu je drei Elementen $a, b, c \in R$ existiert genau ein $x \in R$ mit $c = t(a, b, x)$.

Bemerkung 1. In jedem Ternärring $T = (R, t)$ gibt es nach Satz 1, [3] genau ein Paar $(0, 1)$, welches (K1) erfüllt. Die Elemente $0, 1 \in R$ aus (K1) werden ausgezeichnete Elemente von T genannt.

Definition 2. Es seien $T = (R, t)$ und $T' = (R', t')$ Ternärringe. Eine Abbildung φ der Menge R auf die Menge R' heißt *Homomorphismus* des Ternärringes T auf den Ternärring T', falls $[t(a, b, c)]^\varphi = t'(a^\varphi, b^\varphi, c^\varphi)$ für alle $a, b, c \in R$ gilt. Der Homomorphismus von T auf T' heißt *Isomorphismus*, falls φ eine bijektive Abbildung von R auf R' ist. Gibt es einen Isomorphismus von T auf T', dann heißen T und T' isomorph.

Satz 1. *Sind $T = (R, t)$ und $T' = (R', t')$ Ternärringe mit ausgezeichneten Elementen* $0, 1$ *und* $0', 1'$ *und ist φ ein Homomorphismus von T auf T', dann* $0^\varphi = 0'$ *und* $1^\varphi = 1'$.

Beweis. Es seien a', b' zwei Elemente aus R'. Dann gibt es zwei Elemente a, b aus R mit $a^\varphi = a'$, $b^\varphi = b'$. Es gilt $[t(0, a, b)]^\varphi = [t(a, 0, b)]^\varphi = b^\varphi = t'(0^\varphi, a^\varphi, b^\varphi) = t'(a^\varphi, 0^\varphi, b^\varphi) = t'(0^\varphi, a', b') = t'(a', 0^\varphi, b') = b'$ und zugleich $[t(1, a, 0)]^\varphi = [t(a, 1, 0)]^\varphi = a^\varphi = t'(1^\varphi, a', 0^\varphi) = t'(a', 1^\varphi, 0^\varphi) = a'$. Nach Bemerkung 1 ist also $0^\varphi = 0'$ und $1^\varphi = 1'$.

Definition 3. Ein Ternärring $T = (R, t)$ heißt *Ternärkörper*, wenn gilt:

(K3) Zu je vier Elementen $a, b, c, d \in R$ mit $a \neq c$ gibt es genau ein $x \in R$ mit $t(x, a, b) = t(x, c, d)$.

(K4) Zu je vier Elementen $a, b, c, d \in R$ mit $a \neq c$ gibt es genau ein Paar $(x, y) \in R \times R$ mit $b = t(a, x, y)$ und $d = t(c, x, y)$.

Definition 4. Ein Ternärring $T = (R, t)$ heißt *Pseudoternärkörper*, wenn gilt:

(K'3) Zu je drei Elementen $a, b, c \in R$ mit $a \neq 0$ gibt es genau ein $x \in R$ mit $c = t(x, a, b)$.

(K'4) Zu je drei Elementen $a, b, c \in R$ mit $a \neq 0$ gibt es genau ein $x \in R$ mit $c = t(a, x, b)$.

Definition 5. Ein Ternärring $T = (R, t)$ heißt *Semiternärkörper*, wenn gilt: Zu jedem Element $x \in R$ mit $x \neq 0$ gibt es genau ein $m \in R$ mit $1 = t(x, m, 0)$.

Bemerkung 2. Jeder Ternärkörper stellt einen Pseudoternärkörper dar und jeder Pseudoternärkörper ist zugleich ein Semiternärkörper.

Definition 6. Es sei $T = (R, t)$ ein Ternärring und R_0 eine Teilmenge aus R. Wir setzen $a \oplus r = t(1, a, r)\ \forall a \in R\ \forall r \in R_0$. R_0 heißt *Ideal* des Ternärringes T, wenn folgendes gilt:

(i) $0 \in R_0$, $R_0 \neq R$.

(ii) Gilt $b = a \oplus r$ für $a, b \in R$, $r \in R_0$, so existiert ein $r' \in R_0$ mit $a = b \oplus r'$.

(iii) Für alle $a, b, c \in R$ und $r_1, r_2, r_3 \in R_0$ existiert ein $r' \in R_0$ mit $t(a \oplus r_1, b \oplus r_2, c \oplus r_3) = t(a, b, c) \oplus r'$.

(iv) Gilt $t(a, b, x') = t(a, b, x) \oplus r$ für $a, b, x, x' \in R$, $r \in R_0$, so existiert ein $r' \in R_0$ mit $x' = x \oplus r$.

Bemerkung 3. In jedem Ternärring ist $\{0\}$ ein Ideal ([3], Satz 2).

Satz 2. *In jedem Semiternärkörper ist genau ein Ideal $\{0\}$ enthalten.*

Beweis. R_0 sei ein Ideal in einem Semiternärkörper $T = (R, t)$ mit $R_0 \neq \{0\}$. Ist $r \in R_0$ ein von Null verschiedenes Element, dann existiert nach Definition 5 ein $m \in R$ mit $1 = t(r, m, 0)$. Es gilt $1 = t(r, m, 0) = t(0 \oplus r, m \oplus 0, 0 \oplus 0)$ und nach (iii) gibt es ein $r' \in R_0$ mit $t(0 \oplus r, m \oplus 0, 0 \oplus 0) = t(0, m, 0) \oplus r' = 0 \oplus r' = r'$, was $1 \in R_0$ bedeutet. Für ein belibiges Element $d \in R$ gilt gemäß (K1) $d = t(1, d, 0)$ und wegen $0, 1 \in R_0$ erhält man nach (iii) $d \in R_0$. Daraus folgt $R_0 = R$ und nach Definition 6 ist R_0 kein Ideal in T.

Satz 3. *R_0 sei ein Ideal des Ternärringes $T = (R, t)$. Setzen wir $\bar{a} = \{a \oplus r \mid r \in R_0\}$ für jedes $a \in R$ und $R/R_0 = \{\bar{a} \mid a \in R\}$, dann ist R/R_0 eine Zerlegung der Menge R. Setzen wir weiter $\bar{t}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \overline{t(a, b, c)}$ für alle $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ aus R/R_0, dann ist $\bar{t}$ eine Ternäroperation über R/R_0 und das Paar $\bar{T} = (R/R_0, \bar{t})$ stellt einen Ternärring dar.*

Zum Beweis siehe die Beweise der Sätze 4 und 5, [3].

Definition 7. Es sei R_0 ein Ideal des Ternärringes $T = (R, t)$. Der im Satz 3 beschriebene Ternärring $\bar{T} = (R/R_0, \bar{t})$ heißt durch das Ideal R_0 bestimmter *Restklassen-Ternärring* von T.

Bemerkung 4. Ist $\bar{T}$ der durch das Ideal $\{0\}$ bestimmte Restklassen-Ternärring von T, dann $\bar{T} = T$.

Satz 4. *Es sei $\bar{T} = (R/R_0, \bar{t})$ ein durch ein Ideal R_0 des Ternärringes $T = (R, t)$ bestimmter Restklassen-Ternärring von T. Dann ist die Abbildung $\varphi : a \to \bar{a}$ $\forall a \in R$ ein Homomorphismus des Ternärringes T auf den Ternärring $\bar{T}$.*

2. *Es sei φ ein Homomorphismus des Ternärringes $T = (R, t)$ auf den Ternärring $T' = (R', t')$. Dann ist $R_0 = \{a \in R \mid a^\varphi = 0^\varphi\}$ ein Ideal in T und die Ternärringe $\bar{T} = (R/R_0, \bar{t})$, T' sind isomorph.*

Zum Beweis siehe den Beweis von Satz 6, [3].

Definition 8. $T = (R, t)$, $T' = (R', t')$ seien Ternärringe mit ausgezeichneten Elementen 0, 1 bzw. 0′, 1′ und u' sei ein in der Menge R' nicht enthaltenes Element. Eine Abbildung φ der Menge R auf die Menge $Q' = R' \cup \{u'\}$ heißt *Pseudohomomorphismus* des Ternärringes T auf den Ternärring T', wenn gilt:

(P0) $0^\varphi \in R'$.
(P1) Aus $a^\varphi, b^\varphi, c^\varphi \in R'$ folgt $[t(a, b, c)]^\varphi = t'(a^\varphi, b^\varphi, c^\varphi)$.
(P2) Aus $a^\varphi = u'$, $c^\varphi \in R'$ und $[t(a, b, c)]^\varphi \in R'$ folgt $b^\varphi = 0'$.
(P3) Aus $b^\varphi = u'$, $c^\varphi \in R'$ und $[t(a, b, c)]^\varphi \in R'$ folgt $a^\varphi = 0'$.
(P4) Gilt $[t(a, b, c)]^\varphi \in R'$ und $c^\varphi = u'$, so ist entweder $a^\varphi = u'$ oder $b^\varphi = u'$.
(P5) Gilt $d = t(a, b_1, c_1) = t(a, b_2, c_2)$ mit $a^\varphi = d^\varphi = u'$ und $c_1^\varphi, c_2^\varphi \in R'$, so ist $b_1^\varphi = b_2^\varphi$.
(P6) Gilt $d_1 = t(a_1, b, c)$, $d_2 = t(a_2, b, c)$ mit $b^\varphi = c^\varphi = u'$ und $d_1^\varphi, d_2^\varphi \in R'$, so ist $a_1^\varphi = a_2^\varphi$.
(P7) Es sei $d = t(a, b, c)$ für $a^\varphi, d^\varphi \in R'$, $b^\varphi = c^\varphi = u'$ und $y = t(x, b, c)$ für $x^\varphi = y^\varphi = u'$. Aus $y = t(x, m, k)$ folgt entweder $m^\varphi = u'$ oder $k^\varphi = u'$.

Bemerkung 5. In der Arbeit [6] wird folgende Definition angeführt: Sind $T = (R, t)$, $T' = (R', t')$ Ternärkörper und $u' \notin R'$, dann heißt eine Abbildung φ der Menge R auf die Menge $Q' = R' \cup \{u'\}$ ein *T-Homomorphismus, wenn die Forderungen* (P1)–(P4) und folgende (5)–(7) erfüllt sind:

(5) Aus $d = t(a, b_1, c_1) = t(a, b_2, 0)$ und $a^\varphi = d^\varphi = u'$, $c_1^\varphi \in R'$ folgt $b_1^\varphi = b_2^\varphi$.
(6) Aus $d_1 = t(a_1, b, c)$, $0 = t(a_2, b, c)$ und $b^\varphi = c^\varphi = u'$, $d_1^\varphi \in R'$ folgt $a_1^\varphi = a_2^\varphi$.
(7) Es sei $y = t(x, b, c) = t(x, m, 0)$ und $0 = t(a, b, c)$ mit $b^\varphi = c^\varphi = x^\varphi = y^\varphi = u'$. Dann gilt entweder $m^\varphi = u'$ oder $a^\varphi = u'$.

Satz 5. *Es seien $T = (R, t)$, $T' = (R', t')$ Ternärkörper. Eine Abbildung ist ein Pseudohomomorphismus von T auf T′ genau dann, wenn sie ein T-Homomorphismus ist.*

Beweis. 1. φ sei ein Pseudohomomorphismus von T. Wir beweisen, daß φ den Forderungen (5)–(7) genügt.

Ad (5) Nach (P0) ist $0^\varphi \in R'$. Setzt man in (P5) $c_2 = 0$, dann erhält man $b_1^\varphi = b_2^\varphi$, also die Behauptung (5).

Ad (6) Setzt man in (P6) $d_2 = 0$, so gilt $a_1^\varphi = a_2^\varphi$.

Ad (7) Es sei $t(x, b, c) = t(x, m, 0) = y$, $0 = t(a, b, c)$, wo $x^\varphi = y^\varphi = b^\varphi = u'$. Aus $a^\varphi \in R'$ folgt wegen $0^\varphi \in R'$ nach (P7) $m^\varphi = u'$. Es gilt daher entweder $m^\varphi = u'$ oder $a^\varphi = u'$.

2. φ sei ein T-Homomorphismus. Nach [6] gilt $0^\varphi = 0'$. Wir beweisen, daß (P5)–(P7) aus Definition 8 gelten.

Ad (P5) Es sei $d = t(a, b_1, c_1) = t(a, b_2, c_2)$ mit $a^\varphi = d^\varphi = u'$ und $c_1^\varphi, c_2^\varphi \in R'$. Wegen $0^\varphi = 0'$ und $a^\varphi = u'$ gilt $a \neq 0$. Nach (K'4) gibt es ein einziges Element $n \in R$ mit $d = t(a, n, 0)$ und aus den Gleichheiten $d = t(a, b_1, c_1) = t(a, n, 0) = t(a, b_2, c_2)$ folgt gemäß (5) $b_1^\varphi = n^\varphi = b_2^\varphi$.

Ad (P6) Es sei $d_1 = t(a_1, b, c)$, $d_2 = t(a_2, b, c)$ mit $b^\varphi = c^\varphi = u'$ und $d_1^\varphi, d_2^\varphi \in R'$. Wegen $b \neq 0$ gibt es nach (K'3) ein einziges Element $a \in R$ mit $0 = t(a, b, c)$. Aus den Beziehungen $d_1 = t(a_1, b, c)$, $0 = t(a, b, c)$ bzw. $d_2 = t(a_2, b, c)$, $0 = t(a, b, c)$ folgt dann gemäß (6) $a_1^\varphi = a^\varphi = a_2^\varphi$.

Ad (P7) Es sei $d = t(a, b, c)$, $y = t(x, b, c)$ mit $a^\varphi, d^\varphi \in R'$ und $b^\varphi = c^\varphi = x^\varphi = y^\varphi = u'$.

a) Es sei $y = t(x, m, 0)$ für ein $m \in R$. Wegen $b^\varphi = u'$ gilt $b \neq 0$ und nach (K'3) gibt es ein einziges Element $n \in R$ mit $0 = t(n, b, c)$. Aus den Beziehungen $d = t(a, b, c)$, $0 = t(n, b, c)$ mit $b^\varphi = c^\varphi = u'$ und $0^\varphi, d^\varphi \in R'$ folgt nach (6) $a^\varphi = n^\varphi$. Wegen $a^\varphi \in R'$ ergibt sich also $n^\varphi \in R'$. Aus $y = t(x, b, c) = t(x, m, 0)$, $0 = t(n, b, c)$ erhält man nach (7) entweder $m^\varphi = u'$ oder $n^\varphi = u'$. Wegen $n^\varphi \in R'$ gilt $m^\varphi = u'$.

b) Es sei nun $y = t(x, m, k)$ mit $k^\varphi \in R'$. Nach (K'4) gibt es ein einziges Element $n \in R$ mit $y = t(x, n, 0)$ und nach Fall a) gilt $n^\varphi = u'$. Da $y = t(x, m, k) = t(x, n, 0)$ und $x^\varphi = y^\varphi = u'$, $0^\varphi; k^\varphi \in R'$ ist, erhalten wir gemäß (5) $m^\varphi = n^\varphi = u'$. Aus $y = t(x, m, k)$ folgt also entweder $m^\varphi = u'$ oder $k^\varphi = u'$.

Bemerkung 6. Aus dem vorhergehenden Beweis folgt, daß der Satz 5 auch im allgemeineren Fall gilt, falls T nur ein Pseudoternärkörper und T' ein Ternärring sind.

Satz 6. *Es gebe einen Pseudohomomorphismus φ des Ternärringes $T = (R, t)$ auf den Ternärring $T' = (R', t')$ und sei $M = \{x \in R \mid x^\varphi \in R'\}$, $U = \{x \in R \mid x^\varphi = u'\}$. Das Paar $\mathcal{T} = (M, t)$ ist ein Ternärring und die Einschränkung $\varphi \mid M$ der Abbildung φ auf die Menge M ist ein Homomorphismus des Ternärringes $\mathcal{T}$ auf T'.*

Beweis. Es sei $T = (R, t)$ ein Ternärring mit ausgezeichneten Elementen 0, 1 und sei φ ein Pseudohomomorphismus von T auf T'. Nach (P1) ist die Ternäroperation t auf der Menge M abgeschlossen und nach (P0) gilt $0 \in M$. Setzen wir $1 \in U$ voraus. Da φ eine Abbildung auf die Menge $Q' = R' \cup \{u'\}$ ist, gibt es in R ein Element b mit $b^\varphi \neq 0'$. Dann gilt $b = t(1, b, 0)$ und $[t(1, b, 0)]^\varphi = b^\varphi \neq 0'$, was ein Widerspruch zur Forderung (P2) ist. Es gilt also $1 \in M$. Da die Forderung (K1) für alle Elemente a, b aus R erfüllt ist, ist sie auch für alle a, b aus M erfüllt.

Es seien a, b, d aus M. Gemäß (K2) existiert genau ein Element $c \in R$ mit $d = t(a, b, c)$. Wird $c \in U$ angenommen, so gilt nach (P4) entweder $a^\varphi = u'$ oder

$b^\varphi = u'$, was aber ein Widerspruch ist. Somit ergibt sich $c \in M$ und $\mathscr{T}$ bildet einen Ternärring. Nach (P1) ist $\varphi \mid M$ ein Homomorphismus des Ternärringes $\mathscr{T}$ auf T'.

Bemerkung 7. φ sei ein Pseudohomomorphismus des Ternärringes $T = (R, t)$ auf den Ternärring $T' = (R', t')$. Nach Sätzen 4 und 6 ist $R_0 = \{x \in R \mid x^\varphi = 0'\}$ ein Ideal in $\mathscr{T} = (M, t)$. Ist $\bar{\mathscr{T}} = (M/R_0, \bar{t})$ der durch das Ideal R_0 bestimmte Resklassen-Ternärring von $\mathscr{T}$, dann sind $\bar{\mathscr{T}}$ und T' isomorph.

§ 2. Schwache Pseudoebenen und Ternärringe

Definition 9. Eine Inzidenzstruktur $\mathscr{M} = (P, L, \mathrm{I})$ (vgl. [1]) heißt *schwache Pseudoebene*, kürzlich *SP-Ebene*, wenn gilt:

(M1) Es existieren vier Punkte o, e, u, v aus P, von denen keine drei auf einer Geraden aus L liegen und es existiert genau eine Gerade a, die mit o, e inzidiert.

(M2) Zu jedem Punkt x mit $x \neq u$ existiert genau eine Gerade, die mit x, u inzidiert.

(M3) Zu jedem Punkt x mit $x \neq v$ existiert genau eine Gerade, die mit x, v inzidiert.

(M4) Geht eine Gerade p durch den Punkt u, so existiert genau ein Punkt, der mit p, a inzidiert.

(M5) Geht eine Gerade p durch den Punkt v und ist q eine mit p verschiedene Gerade, so existiert genau ein Punkt, der mit p, q inzidiert.

(M6) Ist q eine Gerade, die mit v, e inzidiert und gilt $m \,\mathrm{I}\, q$, so existiert genau eine Gerade, die mit o, m inzidiert.

(M7) Ist r eine Gerade, die mit u, v inzidiert und sind m, n Punkte mit $m \,\mathrm{I}\, r$, n non $\mathrm{I}\, r$, so existiert genau eine Gerade, die mit m, n inzidiert.

Bemerkung 8. Sei $\mathscr{M}$ eine SP-Ebene. Geht durch die Punkte x, y genau eine Gerade p, so schreibt man $p = xy$. Haben die Geraden p, q genau einen Punkt x gemeinsam, so schreibt man $x = p \sqcap q$.

Definition 10. Das Quadrupel $\mathscr{B} = (o, e, u, v)$ von Punkten aus (M1) heißt *Koordinatenviereck* der SP-Ebene $\mathscr{M}$.

Definition 11. Eine SP-Ebene $\mathscr{M}$ heißt *Semiebene*, wenn gilt:

(M8) Ist $m \,\mathrm{I}\, eu$, so existiert genau eine Gerade om.

Bemerkung 9. Jede projektive Ebene [2] ist zugleich eine Semiebene. Je vier Punkte einer projektiven Ebene $\mathscr{M}$, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, bilden ein Koordinatenviereck von $\mathscr{M}$.

Definition 12. Es seien $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ zwei SP-Ebenen mit den Koordinatenvierecken $\mathcal{B} = (o, e, u, v)$ und $\mathcal{B}' = (o', e', u', v')$. Ein Homomorphismus $\varkappa$ der Inzidenzstruktur $\mathcal{M}$ auf die Inzidenzstruktur $\mathcal{M}'$([1]) heißt *Homomorphismus* der SP-Ebene $\mathcal{M}$ auf die SP-Ebene $\mathcal{M}'$, wenn $o\varkappa = o'$, $e\varkappa = e'$, $u\varkappa = u'$, $v\varkappa = v'$ (kurz $\mathcal{B}\varkappa = \mathcal{B}'$) gilt. Ist $\varkappa$ ein Isomorphismus der Inzidenzstruktur $\mathcal{M}$ auf die Inzidenzstruktur $\mathcal{M}'$, der zugleich ein Homomorphismus der SP-Ebene $\mathcal{M}$ auf die SP-Ebene $\mathcal{M}'$ ist, dann ist $\varkappa$ ein *Isomorphismus* der SP-Ebenen $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$.

Bemerkung 10. Es seien $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ die SP-Ebenen. Unter einem Homomorphismus $\varkappa$ von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{M}'$ (kurz $\varkappa : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$) wird weiter stets ein Homomorphismus der SP-Ebene $\mathcal{M}$ auf die SP-Ebeue $\mathcal{M}'$ verstanden.

Sei $\mathcal{M} \doteq (P, L, \mathrm{I})$ eine SP-Ebene mit dem Koordinatenviereck $\mathcal{B} = (o, e, u, v)$. Wir setzen $Q = \{x \in P \mid x \,\mathrm{I}\, ou\}$, $R = Q \setminus \{u\}$ und definieren eine Abbildung $\xi : (R \times R) \cup Q \to P$ durch folgende Vorschriften (A1) und (A2):

(A1) Für $(x, y) \in R \times R$ setzen wir $w = a \sqcap vy$, $s = xv \sqcap uw$ und $s = (x, y)^\xi$.
(A2) Für $x \in Q$ setzen wir $n = xv \sqcap a$, $n' = nu \sqcap ve$, $s = on' \sqcap uv$ und $s = x^\xi$.

Mit Anwendung der Axiome (M1)–(M7) läßt sich zeigen, daß ξ eine bijektive Abbildung der Menge $(R \times R) \cup Q$ auf P ist.

Weiter definieren wir eine Abbildung $\eta : (R \times R) \cup Q \to L$ durch folgende Vorschriften (B1) und (B2):

(B1) Für $(m, k) \in R \times R$ setzen wir $n = mv \sqcap a$, $n' = nu \sqcap ve$, $p = on' \sqcap uv$, $z = kv \sqcap a$, $q = uz \sqcap ov$, $r = pq$ und $r = (m, k)^\eta$.
(B2) Für $m \in Q$ setzen wir $r = mv$ und $m^\eta = r$.

Die Abbildung η ist eine bijektive Abbildung der Menge $(R \times R) \cup Q$ auf die Menge L.

Wir setzen $(x, y)^\xi = [x, y]$ und $(x, y)^\eta = \langle x, y\rangle$ für alle Paare $(x, y) \in R \times R$ und $x^\xi = [x]$, $x^\eta = \langle x\rangle$ für alle $x \in Q$. Aus den Konstruktionen (A1) und (B2) folgt $[x, y] \,\mathrm{I}\, \langle x\rangle$ für alle $x, y \in R$ und aus (A2), (B1) folgt $[m] \,\mathrm{I}\, \langle m, k\rangle$ für alle $m, k \in R$. Nach (A2), (B2) ergibt sich $[m] \,\mathrm{I}\, \langle u\rangle$ und $[u] \,\mathrm{I}\, \langle m\rangle$ für alle $m \in Q$. Setzt man $y = t(x, m, k) \Leftrightarrow [x, y] \,\mathrm{I}\, \langle m, k\rangle$, so t ist eine Ternäroperation über der Menge R.

Mit den Axiomen (M1)–(M7) läßt sich unter Anwendung der Verfahren aus [2], [4], [7] beweisen, daß der folgende Satz gilt:

Satz 7. *Es sei $\mathcal{M}$ eine SP-Ebene mit dem Koordinatenviereck $\mathcal{B} = (o, e, u, v)$. Ist t die oben beschriebene Ternäroperation über $R = \{x \mid x \,\mathrm{I}\, ou,\ x \neq u\}$, dann ist $T_\mathcal{M} = (R, t)$ ein Ternärring.*

Bemerkung 11. Der zu einer Semiebene $\mathcal{M}$ gehörige Ternärring $T_\mathcal{M}$ ist ein Semiternärkörper.

Sei $T = (R, t)$ ein Ternärring und u ein Element mit $u \notin R$. Wir setzen $Q = R \cup \{u\}$. Ferner seien P, L elementfremde Mengen und ξ, η bijektive Abbildungen der Menge $(R \times R) \cup Q$ auf die Mengen P und L. Wir setzen $(x, y)^\xi = [x, y]$, $(x, y)^\eta = \langle x, y \rangle$ $\forall (x, y) \in R \times R$, $x^\xi = [x]$, $x^\eta = \langle x \rangle$ $\forall x \in Q$ und erklären eine Inzidenzrelation $\mathrm{I} \subset P \times L$ durch

$$[x, y]\, \mathrm{I}\, \langle m, k \rangle \Leftrightarrow y = t(x, m, k),$$
$$[x, y]\, \mathrm{I}\, \langle x \rangle \;\; \forall x, y \in R,$$
$$[m]\, \mathrm{I}\, \langle m, k \rangle \;\; \forall m, k \in R,$$
$$[m]\, \mathrm{I}\, \langle u \rangle \;\; \forall m \in Q,$$
$$[u]\, \mathrm{I}\, \langle m \rangle \;\; \forall m \in Q.$$

Satz 8. *Das Tripel $\mathcal{M}_T = (P, L, \mathrm{I})$ aus der vorherigen Konstruktion ist eine SP-Ebene mit dem Koordinatenviereck $\mathcal{B} = ([0, 0], [1, 1], [0], [u])$.*

Zum Beweis muß man die Gültigkeit der Forderungen (M1) bis (M7) nachweisen.

Bemerkung 12. Ist $T = (R, t)$ ein Semiternärkörper, dann ist $\mathcal{M}_T$ eine Semiebene.

Definition 13. Es sei $\mathcal{M}$ eine SP-Ebene. Sind $\bar{T}_\mathcal{M}$ ein Restklassen-Ternärring von $T_\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}_{\bar{T}_\mathcal{M}}$ die zu $\bar{T}_\mathcal{M}$ gehörige SP-Ebene, dann $\mathcal{M}_{\bar{T}_\mathcal{M}}$ heißt *Restklassen-SP-Ebene* von $\mathcal{M}$.

§ 3. v-Homomorphismen der SP-Ebenen und Homomorphismen der Ternärringe

Definition 14. Es seien $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ SP-Ebenen mit den Koordinatenvierecken $\mathcal{B} = (o, e, u, v)$, $\mathcal{B}' = (o', e', u', v')$. Ein Homomorphismus $\varkappa$ von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{M}'$ heißt *v-Homomorphismus*, wenn $x\varkappa = v' \Rightarrow x = v$.

Satz 9. *Es seien $\mathcal{M} = (P, L, \mathrm{I})$, $\mathcal{M}' = (P', L', \mathrm{I}')$ die SP-Ebenen mit den Koordinatenvierecken $\mathcal{B} = (o, e, u, v)$, $\mathcal{B}' = (o', e', u', v')$ und $\varkappa$ ein Homomorphismus von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{M}'$. $\varkappa$ ist ein v-Homomorphismus genau dann, wenn gilt: Ist r eine Gerade mit $r\varkappa = u'v'$, so folgt $r = uv$.*

Beweis. 1. Sei $\varkappa$ ein v-Homomorphismus und nehmen wir an, daß eine Gerade r mit $r \neq uv$ und $r\varkappa = u'v'$ existiert. Gilt v non $\mathrm{I}\, r$, so gibt es nach (M5) einen Punkt $m = r \sqcap ov$, wo $m \neq v$. Da $\varkappa$ ein Homomorphismus ist und $r\varkappa = u'v'$ gilt, so ergibt sich $m\varkappa\, \mathrm{I}'\, u'v'$ und gleichzeitig $m\varkappa\, \mathrm{I}'\, o'v'$. Daraus folgt aber $m\varkappa = v'$, also ein Widerspruch, denn $\varkappa$ ist ein v-Homomorphismus. Es sei $v\, \mathrm{I}\, r$. Dann gibt es einen Punkt $m = r \sqcap a$, wobei m non $\mathrm{I}\, uv$. Wegen $r\varkappa = u'v'$ ergibt sich dabei $m\varkappa\, \mathrm{I}'\, u'v'$. Es gibt eine Gerade $p = um$ mit $p \neq uv$ und aus $m\varkappa\, \mathrm{I}'\, u'v'$ folgt $p\varkappa = u'v'$. Setzt man $n = p \sqcap ov$, so gilt $n \neq v$ und $n\varkappa\, \mathrm{I}'\, u'v'$. Wegen $n\varkappa\, \mathrm{I}'\, o'v'$ erhält man $n\varkappa = v'$, also wieder ein Widerspruch.

2. Nehmen wir an, daß $r\varkappa = u'v' \Rightarrow r = uv$ gilt. Es sei x ein Punkt mit $x \neq v$, $x\varkappa = v'$. Dann gilt $x \neq o$ und $x \neq u$. Aus x non I uv folgt $ux \neq uv$ und wegen $x\varkappa = v'$ erhält man $(ux)\varkappa = u'v'$, also ein Widerspruch. Nehmen wir also x I uv an. Wegen $x \neq v$ erhält man $ox \neq ov$ und es gibt einen Punkt $m = ox \sqcap ve$, wobei $m \neq v$. Aus $x\varkappa = v'$ folgt dann $(ox)\varkappa = o'v'$ und $m\varkappa = v\varkappa$. Somit gilt $um \neq uv$ und $(um)\varkappa = u'v'$, was wieder ein Widerspruch ist.

Satz 10. *Jeder v-Homomorphismus einer SP-Ebene $\mathcal{M}$ auf eine SP-Ebene $\mathcal{M}'$ induziert einen Homomorphismus des Ternärringes $T_{\mathcal{M}}$ auf den Ternärring $T_{\mathcal{M}'}$.*

Beweis. Es seien $\mathcal{M} = (P, L, \mathrm{I})$, $\mathcal{M}' = (P', L', \mathrm{I}')$ die SP-Ebenen mit den Koordinatenvierecken $\mathcal{B} = (o, e, u, v)$, $\mathcal{B}' = (o', e', u', v')$ und $T_{\mathcal{M}} = (R, t)$, $T_{\mathcal{M}'} = (R', t')$ die zu $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ gehörige Ternärringe. $\varkappa$ sei ein v-Homomorphismus von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{M}'$. Nach Satz 9 und nach (A1), (B1) gilt $[x, y]\varkappa = [x\varkappa, y\varkappa]$ und $\langle x, y\rangle\varkappa = \langle x\varkappa, y\varkappa\rangle$ für alle $x, y \in R$. Es sei $y = t(x, m, k)$, also $[x, y]\,\mathrm{I}\,\langle m, k\rangle$. Daraus folgt $[x, y]\varkappa\,\mathrm{I}'\,\langle m, k\rangle\varkappa$, $[x\varkappa, y\varkappa]\,\mathrm{I}'\,\langle m\varkappa, k\varkappa\rangle$ und $y\varkappa = t'(x\varkappa, m\varkappa, k\varkappa)$. Die Abbildung $\varphi : R \to R'$ mit $x^{\varphi} = x\varkappa\ \forall x \in R$ ist also ein Homomorphismus von $T_{\mathcal{M}}$ auf $T_{\mathcal{M}'}$.

Bemerkung 13. Sind die SP-Ebenen $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ isomorph, dann sind auch $T_{\mathcal{M}}$ und $T_{\mathcal{M}'}$ isomorph.

Satz 11. *Jeder Homomorphismus des Ternärringes T auf den Ternärring T' induziert einen v-Homomorphismus von $\mathcal{M}_T$ auf $\mathcal{M}_{T'}$.*

Beweis. Es sei φ ein Homomorphismus des Ternärringes $T = (R, t)$ auf den Ternärring $T' = (R', t')$ und seien $\mathcal{M}_T = (P, L, \mathrm{I})$, $\mathcal{M}_{T'} = (P', L', \mathrm{I}')$ die zugehörigen SP-Ebenen, wo $P = \{[x, y] \mid (x, y) \in R \times R\} \cup \{[x] \mid x \in R\} \cup \{[u]\}$, $L = \{\langle m, k\rangle \mid (m, k) \in R \times R\} \cup \{\langle m\rangle \mid m \in R\} \cup \{\langle u\rangle\}$, $P' = \{[x', y'] \mid (x', y') \in R' \times R'\} \cup \{[x'] \mid x' \in R'\} \cup \{\langle u'\rangle\}$, $L' = \{\langle m', k'\rangle \mid (m', k') \in R' \times R'\} \cup \{\langle m'\rangle \mid m' \in R'\} \cup \{\langle u'\rangle\}$ mit $u \notin R$ und $u' \notin R'$. Wir definieren eine Abbildung $\varkappa$ von $P \cup L$ auf $P' \cup L'$ durch

$$\begin{aligned} [x, y]\varkappa &= [x^{\varphi}, y^{\varphi}]\,, & \langle x, y\rangle\varkappa &= \langle x^{\varphi}, y^{\varphi}\rangle\,,\\ [m]\varkappa &= [m^{\varphi}]\,, & \langle m\rangle\varkappa &= \langle m^{\varphi}\rangle\,,\\ [u]\varkappa &= [u']\,, & \langle u\rangle\varkappa &= \langle u'\rangle\,. \end{aligned}$$

Es läßt sich leicht nachprüfen, daß so definierte $\varkappa$ ein v-Homomorphismus von $\mathcal{M}_T$ auf $\mathcal{M}_{T'}$ ist.

Bemerkung 14. Sind die Ternärringe T, T' isomorph, so sind auch $\mathcal{M}_T, \mathcal{M}_{T'}$ isomorph.

Satz 12. *Es sei $\varkappa$ ein v-Homomorphismus der SP-Ebene $\mathcal{M}$ auf die SP-Ebene $\mathcal{M}'$. Dann existieren eine Resklassen-SP-Ebene $\mathcal{N}$ von $\mathcal{M}$, ein v-Homomorphismus $\varrho : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ und ein Isomorphismus $\sigma : \mathcal{N} \to \mathcal{M}'$ mit $\varkappa = \varrho\sigma$.*

Beweis. Es seien $\mathcal{M} = (P, L, \mathrm{I})$, $\mathcal{M}' = (P', L', \mathrm{I}')$ die SP-Ebenen mit den Koordinatenvierecken $\mathcal{B} = (o, e, u, v)$, $\mathcal{B}' = (o', e', u', v')$ und $\varkappa$ ein v-Homomorphismus von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{M}'$. Nach Beweis von Satz 10 ist die Abbildung φ mit $x^\varphi = x\varkappa$ $\forall x \in R = \{x \in P \mid x \,\mathrm{I}\, ou,\ x \neq u\}$ ein Homomorphismus von $T_{\mathcal{M}} = (R, t)$ auf $T_{\mathcal{M}'}$. Dabei gilt

$$[x, y]\,\varkappa = [x^\varphi, y^\varphi],\ \langle x, y\rangle\,\varkappa = \langle x^\varphi, y^\varphi\rangle\ \forall (x, y) \in R \times R,$$
$$[m]\,\varkappa = [m^\varphi],\ \langle m\rangle\,\varkappa = \langle m^\varphi\rangle\ \forall m \in R,$$
$$[u]\,\varkappa = [u'],\ \langle u\rangle\,\varkappa = \langle u'\rangle.$$

Nach Satz 4 gibt es einen Resklassen-Ternärring $\bar{T}_{\mathcal{M}} = (\bar{R}, \bar{t})$ von $T_{\mathcal{M}}$, der zu $T_{\mathcal{M}'}$ isomorph ist. Ein Isomorphismus ξ von $\bar{T}_{\mathcal{M}}$, $T_{\mathcal{M}'}$ läßt sich dann durch die Vorschrift $\xi : \bar{x} \to x^\varphi$ $\forall x \in R$ erklären. Wir wählen ein Element $\bar{u} \notin \bar{R}$ und definieren eine Abbildung ϱ mit

$$[x, y]\,\varrho = [\bar{x}, \bar{y}],\ \langle x, y\rangle\,\varrho = \langle \bar{x}, \bar{y}\rangle\ \forall (x, y) \in R \times R,$$
$$[m]\,\varrho = [\bar{m}],\ \langle m\rangle\,\varrho = \langle \bar{m}\rangle\ \forall m \in R,$$
$$[u]\,\varrho = [\bar{u}],\ \langle u\rangle\,\varrho = \langle \bar{u}\rangle.$$

ϱ ist ein v-Homomorphismus von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{M}_{\bar{T}_{\mathcal{M}}}$. Zugleich ist die Abbildung σ:

$$[\bar{x}, \bar{y}]\,\sigma = [x^\xi, y^\xi],\ \langle \bar{x}, \bar{y}\rangle\,\sigma = \langle x^\xi, y^\xi\rangle\ \forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{R} \times \bar{R},$$
$$[\bar{m}]\,\sigma = [m^\xi],\ \langle \bar{m}\rangle\,\sigma = \langle m^\xi\rangle\ \forall \bar{m} \in \bar{R},$$
$$[\bar{u}]\,\sigma = [u'],\ \langle \bar{u}\rangle\,\sigma = \langle u'\rangle$$

ein Isomorphismus von $\mathcal{M}_{\bar{T}_{\mathcal{M}}}$ auf $\mathcal{M}'$.

Nach den Definitionen von ϱ und σ ergibt sich $[x, y]\,\varrho\sigma = [\bar{x}, \bar{y}]\,\sigma = [x^\xi, y^\xi] = [x^\varphi, y^\varphi] = [x, y]\,\varkappa$ $\forall (x, y) \in R \times R$ usw., also $\varkappa = \varrho\sigma$.

Bemerkung 15. Jede SP-Ebene $\mathcal{M}$ ist zu $\mathcal{M}_{T_{\mathcal{M}}}$ isomorph.

Satz 13. *Jeder v-Homomorphismus einer Semiebene auf eine SP-Ebene ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Sei $\varkappa$ ein v-Homomorphismus einer Semiebene $\mathcal{M}$ auf eine SP-Ebene $\mathcal{M}'$ und seien $T_{\mathcal{M}} = (R, t)$, $T_{\mathcal{M}'} = (R', t')$ die zu $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ gehörigen Ternärringe. Die Abbildung $\varphi : R \to R'$ mit $x^\varphi = x\varkappa$ $\forall x \in R$ ist ein Homomorphismus des Ternärringes $T_{\mathcal{M}}$ auf $T_{\mathcal{M}'}$ und $R_0 = \{x \in R \mid x^\varphi = o'\}$ ist ein Ideal in $T_{\mathcal{M}}$. Nach Bemerkung 11 ist $T_{\mathcal{M}}$ ein Semiternärkörper und nach Satz 2 gilt $R_0 = \{o\}$. Die

Ternärringe $T_{\mathcal{M}}$, $\bar{T}_{\mathcal{M}} = (R/R_0, \bar{t})$ sind also isomorph und die im Satz 12 beschriebenen Abbildungen $\varrho : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_{T_{\mathcal{M}}}$, $\sigma : \mathcal{M}_{T_{\mathcal{M}}} \to \mathcal{M}'$ sind Isomorphismen und mithin ist auch $\varkappa = \varrho\sigma$ ein Isomorphismus.

Bemerkung 16. Sei $\varkappa$ ein Homomorphismus einer projektiven Ebene $\mathcal{M}$ auf eine SP-Ebene. Gilt $y\varkappa = x\varkappa \Rightarrow y = x$ für einen Punkt x aus $\mathcal{M}$, so ist $\varkappa$ nach Bemerkung 9 und nach Satz 13 ein Isomorphismus.

§ 4. Homomorphismen der SP-Ebenen und Pseudohomomorphismen der Ternärringe

In diesem Paragraphen werden solche Homomorphismen der SP-Ebenen untersucht, die keine v-Homomorphismen sind.

Es seien $\mathcal{M} = (P, L, \mathrm{I})$, $\mathcal{M}' = (P', L', \mathrm{I}')$ SP-Ebenen mit den Koordinatenvierecken $\mathcal{B} = (o, e, u, v)$, $\mathcal{B}' = (o', e', u', v')$. Setzen wir $Q = \{x \in P \mid x \mathrm{I}\, ou\}$, $R = Q \setminus \{u\}$, $Q' = \{x' \in P' \mid x' \mathrm{I}'\, o'u'\}$, $R' = Q' \setminus \{u'\}$.

Satz 14. *Es sei $\varkappa$ ein Homomorphismus der SP-Ebene $\mathcal{M}$ auf die SP-Ebene $\mathcal{M}'$ und sei $U = \{x \in R \mid x\varkappa = u'\}$, $M = R \setminus U = \{x \in R \mid x\varkappa \in R'\}$ gesetzt.*

1. *Für einen Punkt $s = [x, y] \in P$ gilt*

a) $x, y \in M \Leftrightarrow s\varkappa$ non $\mathrm{I}'\, u'v'$,

b) $x \in U,\ s\varkappa \neq u' \Rightarrow y \in U$,

c) $s\varkappa = v' \Rightarrow y \in U$.

2. *Es sei $r = \langle m, k \rangle$ eine Gerade aus L. Setzt man nach* (B1) $r = pq$, *dann gilt*

a) $p\varkappa = v' \Leftrightarrow m \in U$,

b) $q\varkappa = v' \Leftrightarrow k \in U$,

c) $v' \mathrm{I}'\, r\varkappa \Rightarrow m \in U \vee k \in U$.

Beweis. Nach (A1) gilt $s = [x, y]$ non I uv. Wir setzen $w = yv \sqcap a = su \sqcap a$.

a) Es sei $x, y \in M$, d. h. $x\varkappa \neq u'$, $y\varkappa \neq u'$. Daraus folgt $(yv)\varkappa \neq u'v'$ und $w\varkappa$ non I' non $\mathrm{I}'\, u'v'$, $(uw)\varkappa \neq u'v'$. Nach (A1) ist $s = xv \sqcap uw$ und wegen $(uw)\varkappa \neq u'v'$ erhält man $s\varkappa$ non $\mathrm{I}'\, u'v'$. Durch umgekehrtes Verfahren läßt sich $s\varkappa$ non $\mathrm{I}'\, u'v' \Rightarrow$ $\Rightarrow x, y \in M$ beweisen.

b) Es sei $x \in U$ und $s\varkappa \neq u'$. Wegen $x\varkappa = u'$ gilt $(xv)\varkappa = u'v'$, woraus sich nach (A1) $s\varkappa \mathrm{I}'\, u'v'$ ergibt. Wegen $s\varkappa \neq u'$ ist $(su)\varkappa = s\varkappa\, u\varkappa = u'v'$. Aus $w \mathrm{I}\, su$ folgt $w\varkappa \mathrm{I}'\, u'v'$ und $(vw)\varkappa = u'v'$. Nach (A1) gilt dann $y = vw \sqcap ou$, also $y \in U$.

c) Gilt $s\varkappa = v'$, so $(su)\varkappa = u'v'$ und $w\varkappa \mathrm{I}'\, u'v'$, $(vw)\varkappa = u'v'$. Wegen $y = ou \sqcap vw$ ergibt sich $y\varkappa = u'$, also $y \in U$.

2. Gemäß (B1) gilt $r = \langle m, k\rangle \Rightarrow v$ non I r.

a) Es sei $p\varkappa = v'$. Setzt man $n' = op \sqcap ve$, $n = n'u \sqcap a$, so $n'\varkappa = v'$ und $n\varkappa \, \mathrm{I}' \, u'v'$. Da nach (B1) $m = vn \sqcap ou$ gilt, ergibt sich daraus $m\varkappa = u'$, also $m \in U$. Gilt $m \in U$, so läßt sich durch umgekehrtes Verfahren $p\varkappa = v'$ beweisen.

b) Es sei $q\varkappa = v'$. Dann gilt $(qu)\varkappa = u'v'$, $z\varkappa \, \mathrm{I}' \, u'v'$, $(vz)\varkappa = u'v'$, wo $z = uq \sqcap a$. Nach (B1) ist $k = vz \sqcap ou$ und mithin $k \in U$. Durch umgekehrtes Verfahren beweisen wir, daß $k \in U \Rightarrow q\varkappa = v'$ gilt.

c) Nehmen wir an, daß $v' \, \mathrm{I}' \, r\varkappa$ und gleichzeitig $m, k \in M$ gilt. Nach a) und b) ist $p\varkappa \neq v'$ und $q\varkappa \neq v'$, woraus v' non $\mathrm{I}' \, r\varkappa$, also ein Widerspruch, folgt.

Satz 15. *Es sei $\varkappa$ ein Homomorphismus der SP-Ebene $\mathcal{M} = (P, L, \mathrm{I})$ auf die SP-Ebene $\mathcal{M}' = (P', L', \mathrm{I}')$. Die Abbildung $\varphi : R \to Q'$ mit $x^\varphi = x\varkappa \; \forall x \in R$ ist ein Pseudohomomorphismus des Ternärringes $T_{\mathcal{M}}$ auf den Ternärring $T_{\mathcal{M}'}$.*

Beweis. Es sei wieder $U = \{x \in R \mid x\varkappa = u'\}$, $M = R \setminus U$. Da $\varkappa$ kein v-Homomorphismus ist, gilt $U \neq \emptyset$; da $\varkappa$ ein Homomorphismus auf $\mathcal{M}'$ ist, ist φ eine Abbildung auf die Menge Q'. Wir wollen beweisen, daß φ den Forderungen (P0)–(P7) der Definition 8 genügt.

Ad (P0) Wegen $\mathcal{B}\varkappa = \mathcal{B}'$ gilt $o\varkappa = o'$ und daher $o^\varphi \neq u'$, also $o^\varphi \in R'$.

Ad (P1) Es seien $x, m, k \in M$ und sei $y = t(x, m, k)$. Setzt man $s = [x, y]$ und $r = \langle m, k\rangle$, so gilt $s \, \mathrm{I} \, r$. Da $\varkappa$ ein Homomorphismus ist, ergibt sich daraus $s\varkappa \, \mathrm{I}' \, r\varkappa$ und aus (A1) und (B1) folgt dann $s\varkappa = [x\varkappa, y\varkappa] = [x^\varphi, y^\varphi]$, $r\varkappa = \langle m\varkappa, k\varkappa\rangle = \langle m^\varphi, k^\varphi\rangle$. Wegen $x^\varphi, m^\varphi, k^\varphi \in R'$ erhält man $y^\varphi = [t(x, m, k)]^\varphi = t'(x^\varphi, m^\varphi, k^\varphi)$.

Ad (P2) Nehmen wir an, daß $x \in U$, $k \in M$ und $y = t(x, m, k) \in M$ gilt. Setzt man $s = [x, y]$ und $r = \langle m, k\rangle = pq$, so $s \, \mathrm{I} \, r$ und nach Satz 14 gilt $s\varkappa = u'$. Wegen $p \, \mathrm{I} \, uv$ und $s\varkappa \, \mathrm{I}' \, r\varkappa$ erhält man daraus $p\varkappa = u'$. Gemäß (B1) gilt dann $m\varkappa = o'$ und mithin $m^\varphi = o'$.

Ad (P3) Es sei $m \in U$, $k \in M$ und $y = t(x, m, k) \in M$. Setzt man $s = [x, y]$, $r = \langle m, k\rangle = pq$, so $s \, \mathrm{I} \, r$. Aus unseren Voraussetzungen ergibt sich nach Satz 14 $s\varkappa \neq v'$, $p\varkappa = v'$, $q\varkappa \neq v'$. Gemäß (B1) gilt dann $r\varkappa = o'v'$. Wegen $s\varkappa \, \mathrm{I}' \, r\varkappa$ ist $(vs)\varkappa = o'v'$. Nach (A1) ergibt sich daraus $x^\varphi = o'$.

Ad (P4) Es sei $k \in U$ und $y = t(x, m, k) \in M$. Setzt man wieder $s = [x, y]$, $r = \langle m, k\rangle = pq$, so gilt $s \, \mathrm{I} \, r$ und nach Satz 14 ist $q\varkappa = v'$. Wir setzen $x, m \in M$ voraus. Nach Satz 14 gilt dann $s\varkappa$ non $\mathrm{I}' \, u'v'$ und $p\varkappa \neq v'$. Wegen $q\varkappa = v'$, $s\varkappa$ non I' non $\mathrm{I}' \, u'v'$ und $s\varkappa \, \mathrm{I}' \, r\varkappa$ folgt $v' \, \mathrm{I}' \, r\varkappa$, $r\varkappa \neq u'v'$, was $p\varkappa = v'$ bedeutet. Nach Satz 14 gilt dann $m \in U$ im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Es gilt also entweder $x \in U$ oder $m \in U$.

Ad (P5) Es sei $y = t(x, m_1, k_1) = t(x, m_2, k_2)$, wo $x, y \in U$, $k_1, k_2 \in M$. Setzt man $s = [x, y]$, $r_1 = \langle m_1, k_1\rangle = p_1q_1$, $r_2 = \langle m_2, k_2\rangle = p_2q_2$, dann gilt nach Satz 14 $s\varkappa \, \mathrm{I}' \, u'v'$, $q_1\varkappa \neq v'$, $q_2\varkappa \neq v'$. Daraus folgt $r_1\varkappa \neq u'v'$ und $r_2\varkappa \neq u'v'$. Wegen

$s \,\mathrm{I}\, r_1$, $s \,\mathrm{I}\, r_2$ ergibt sich $s\varkappa \,\mathrm{I}'\, r_1\varkappa$, $s\varkappa \,\mathrm{I}'\, r_2\varkappa$ und wegen $s\varkappa \,\mathrm{I}'\, u'v'$, $r_1\varkappa \neq u'v'$, $r_2\varkappa \neq u'v'$ gilt $p_1\varkappa = p_2\varkappa = s\varkappa$. Nach (B1) ergibt sich dann $m_1\varkappa = m_2\varkappa$, also $m_1^\varphi = m_2^\varphi$.

Ad (P6) Es sei $y_1 = t(x_1, m, k)$, $y_2 = t(x_2, m, k)$, wo $m, k \in U$ und $y_1, y_2 \in M$. Setzt man $s_1 = [x_1, y_1]$, $s_2 = [x_2, y_2]$, $r = \langle m, k\rangle = pq$, dann gilt $s_1, s_2 \,\mathrm{I}\, r$. Nach Satz 14 erhält man $v' \,\mathrm{I}'\, r\varkappa$, $s_1\varkappa \neq v'$, $s_2\varkappa \neq v'$ und daraus folgt $(vs_1)\varkappa = (vs_2)\varkappa = r\varkappa$. Gemäß (A1) gilt $x_1\varkappa = x_2\varkappa$, also $x_1^\varphi = x_2^\varphi$.

Ad (P7) Es sei $d = t(a, b, c)$ mit $a, d \in M$, $b, c \in U$ und $y = t(x, b, c)$ mit $x, y \in U$ und $y = t(x, m, k)$. Setzt man $w = [a, d]$ und $r = \langle b, c\rangle$, so $w \,\mathrm{I}\, r$. Nach Satz 14 gilt dabei $w\varkappa$ non $\mathrm{I}'\, u'v'$ und $v' \,\mathrm{I}'\, r\varkappa$. Wegen $w\varkappa \,\mathrm{I}'\, r\varkappa$ ergibt sich $r\varkappa \neq u'v'$. Wird $s = [x, y]$ gesetzt, dann auch $s \,\mathrm{I}\, r$. Wegen $x, y \in U$ gilt $s\varkappa \,\mathrm{I}'\, u'v'$ und wegen $s\varkappa \,\mathrm{I}'\, r\varkappa$, $r\varkappa \neq u'v'$, $v' \,\mathrm{I}'\, r\varkappa$ ist $s\varkappa = v'$. Setzt man $r_1 = \langle m, k\rangle$, dann unserer Voraussetzung $y = t(x, m, k)$ nach, gilt $s \,\mathrm{I}\, r_1$. Wegen $s\varkappa \,\mathrm{I}'\, r_1\varkappa$ ist $v' \,\mathrm{I}'\, r_1\varkappa$ und nach Satz 14 gilt entweder $m \in U$ oder $k \in U$.

Bemerkung 17. Nach Satz 6 ist $\mathcal{T} = (M, t)$ ein Ternärring und die Einschränkung $\varphi \mid M$ ist ein Homomorphismus des Ternärringes $\mathcal{T}$ auf $T_{\mathcal{M}'}$. Dann ist $R_0 = \{x \in R \mid x^\varphi = o'\}$ ein Ideal im Ternärring $\mathcal{T}$ und nach Satz 4 sind die Ternärringe $\bar{\mathcal{T}} = (M/R_0, \bar{t})$, $T_{\mathcal{M}'}$ isomorph. Nach Bemerkung 14 sind die SP-Ebenen $\mathcal{M}_{\bar{\mathcal{T}}}$, $\mathcal{M}_{T_{\mathcal{M}'}}$ isomorph. Nach Bemerkung 15 sind auch die SP-Ebenen $\mathcal{M}'$, $\mathcal{M}_{T_{\mathcal{M}'}}$ isomorph, woraus folgt, daß die SP-Ebenen $\mathcal{M}_{\bar{\mathcal{T}}}$, $\mathcal{M}'$ isomorph sind.

Es seien $T = (R, t)$, $T' = (R', t')$ Ternärringe mit den ausgezeichneten Elementen 0, 1 bzw. 0', 1' und u' sei ein Element mit $u' \notin R'$. Wir setzen $Q' = R' \cup \{u'\}$. φ sei ein Pseudohomomorphismus des Ternärringes T auf den Ternärring T'. Ferner wählen wir ein Element u mit $u \notin R$, bezeichnen wir $Q = R \cup \{u\}$ und setzen wir formell $u^\varphi = u'$. Es sei $U = \{x \in R \mid x^\varphi = u'\}$, $M = R \setminus U$. Nach Satz 8 erklären wir die SP-Ebenen $\mathcal{M}_T = (P, L, \mathrm{I})$, $\mathcal{M}_{T'} = (P', L', \mathrm{I}')$. Durch φ definieren wir eine Abbildung $\varkappa$: $P \cup L \to P' \cup L'$ und weiter beweisen wir, daß $\varkappa$ ein Homomorphismus von $\mathcal{M}_T$ auf $\mathcal{M}_{T'}$ ist:

$[x, y]\varkappa = [x^\varphi, y^\varphi]$ $\forall (x, y) \in M \times M$,

$[x]\varkappa = [x^\varphi]$ $\forall x \in Q$,

$[x, y]\varkappa = [0']$ $\forall x \in U$ $\forall y \in M$,

$[x, y]\varkappa = [u']$ $\forall x \in M$ $\forall y \in U$,

$[x, y]\varkappa = [m^\varphi]$, wenn $x, y \in U$ und wenn es $k \in M$, $m \in R$ derart gibt, daß $y = t(x, m, k)$,

$[x, y]\varkappa = [u']$, wenn $x, y \in U$ und wenn für ein beliebiges $m \in R$ aus $y = t(x, m, k)$ stets $k \in U$ folgt.

$\langle m, k\rangle\varkappa = \langle m^\varphi, k^\varphi\rangle$ $\forall (m, k) \in M \times M$,

$\langle m\rangle\varkappa = \langle m^\varphi\rangle$ $\forall m \in Q$,

$\langle m, k\rangle\varkappa = \langle 0'\rangle$ $\forall m \in U$ $\forall k \in M$,

$\langle m, k\rangle \varkappa = \langle u'\rangle \quad \forall m \in M \quad \forall k \in U$,

$\langle m, k\rangle \varkappa = \langle x^\varphi\rangle$, wenn $m, k \in U$ und wenn es $x \in R$, $b \in M$ derart gibt, daß $b = t(x, m, k)$.

$\langle m, k\rangle \varkappa = \langle u'\rangle$, wenn $m, k \in U$ und wenn für ein beliebiges $x \in R$ aus $b = t(x, m, k)$ stets $b \in U$ folgt.

Satz 16. *Die oben beschriebene Abbildung $\varkappa$ ist ein Homomorphismus der SP-Ebene $\mathcal{M}_T$ auf die SP-Ebene $\mathcal{M}_{T'}$.*

Beweis. I. Zunächst zeigen wir, daß $\varkappa$ wohl definiert ist.

a) Die Einschränkung $\varkappa \mid P$ ist eine Abbildung: Es genügt nur den Fall $[x, y]$ für $x, y \in U$ nachzuprüfen. Gilt $y = t(x, m, k) \Rightarrow k \in U$ für alle $m \in R$, so $[x, y]\varkappa = [u']$. Nehmen wir an, daß es ein $k \in M$ derart gibt, daß $y = t(x, m, k)$ für ein $m \in R$ gilt. Dann $[x, y]\varkappa = [m^\varphi]$. Gilt $y = t(x, m_1, k_1)$ für $k_1 \in M$, $m_1 \in R$, dann ist nach unserer Vorschrift $[x, y]\varkappa = [m_1^\varphi]$. Gemäß (P5) ergibt sich aber $m_1^\varphi = m^\varphi$.

b) Die Einschränkung $\varkappa \mid L$ ist eine Abbildung: Es genügt nur den Fall $\langle m, k\rangle$ für $m, k \in U$ nachzuprüfen. Gilt $b = t(x, m, k) \Rightarrow b \in U$ für alle $x \in R$, dann $\langle m, k\rangle \varkappa = \langle u'\rangle$. Nehmen wir an, daß es ein $b \in M$ derart gibt, daß $b = t(x, m, k)$ für ein $x \in R$ gilt. Dann $\langle m, k\rangle \varkappa = \langle x^\varphi\rangle$. Gilt zugleich $b_1 = t(x_1, m, k)$ für $b_1 \in M$, $x_1 \in R$, dann ist $\langle m, k\rangle \varkappa = \langle x_1^\varphi\rangle$. Gemäß (P6) ergibt sich aber $x^\varphi = x_1^\varphi$.

II. Nach Satz 8 ist $\mathcal{B} = ([0, 0], [1, 1], [0], [u])$ bzw. $\mathcal{B}' = ([0', 0'], [1', 1'], [0'], [u'])$ die Koordinatenvierecken von $\mathcal{M}_T$ bzw. $\mathcal{M}_{T'}$. Nach Sätzen 6 und 1 gilt $0^\varphi = 0'$ und $1^\varphi = 1'$. Daraus erhält man $[0, 0]\varkappa = [0^\varphi, 0^\varphi] = [0', 0']$, $[1, 1]\varkappa = [1^\varphi, 1^\varphi] = [1', 1']$, $[0]\varkappa = [0']$, $[u]\varkappa = [u']$.

III. Wir beweisen, daß $s \mathrm{I} r \Rightarrow s\varkappa \mathrm{I}' r\varkappa \; \forall s \in P \; \forall r \in L$ gilt. Es sei also $s \mathrm{I} r$. Zuerst nehmen wir $s = [x, y]$, $r = \langle m, k\rangle$, also $y = t(x, m, k)$, an.

1. Es sei $(x, y) \in M \times M$. Dann gilt $[x, y]\varkappa = [x^\varphi, y^\varphi]$.

a) Es seien $m, k \in M$. Nach (P1) ergibt sich $y = t(x, m, k) \Rightarrow y^\varphi = t'(x^\varphi, m^\varphi, k^\varphi)$, woraus $[x^\varphi, y^\varphi] \mathrm{I}' \langle m^\varphi, k^\varphi\rangle$ und $[x, y]\varkappa \mathrm{I}' \langle m, k\rangle \varkappa$ folgt.

b) Es seien $m \in M$, $k \in U$. Dann folgt aus (P4) entweder $x \in U$ oder $m \in U$, was ein Widerspruch ist. Dieser Fall kann also nicht eintreten.

c) Es seien $m \in U$, $k \in M$. Dann gilt $\langle m, k\rangle \varkappa = \langle 0'\rangle$ und aus $y = t(x, m, k)$ folgt nach (P3) $x^\varphi = 0'$. Wegen $[0', y^\varphi] \mathrm{I}' \langle 0'\rangle$ ergibt sich $[x, y]\varkappa \mathrm{I}' \langle m, k\rangle \varkappa$.

d) Es seien $m, k \in U$. Da $y = t(x, m, k)$ mit $y \in M$ gilt, ergibt sich $\langle m, k\rangle \varkappa = \langle x^\varphi\rangle$ und $[x^\varphi, y^\varphi] \mathrm{I}' \langle x^\varphi\rangle$, was $[x, y]\varkappa \mathrm{I}' \langle m, k\rangle \varkappa$ bedeutet.

2. Es sei $x \in M$, $y \in U$. Dann gilt $[x, y]\varkappa = [u']$.

a) Es seien $m, k \in M$. Nach (P1) gilt $t(x, m, k) \in M$, was ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung $y \in U$ ist. Dieser Fall kann also nicht eintreten.

b) Es seien $m \in M$, $k \in U$. Dann erhält man $\langle m, k\rangle \varkappa = \langle u'\rangle$. Wegen $[u']\,\mathrm{I}'\,\langle u'\rangle$ gilt $[x, y]\,\varkappa\,\mathrm{I}'\,\langle m, k\rangle\,\varkappa$.

c) Es seien $m \in U$, $k \in M$. Dann erhält man $\langle m, k\rangle \varkappa = \langle 0'\rangle$. Wegen $[u']\,\mathrm{I}'\,\langle 0'\rangle$ gilt $[x, y]\,\varkappa\,\mathrm{I}'\,\langle m, k\rangle\,\varkappa$.

d) Es seien $m, k \in U$. Dann gilt $\langle m, k\rangle \varkappa = \langle x'\rangle$ mit $x' \in Q'$ und wegen $[u']\,\mathrm{I}'\,\langle x'\rangle$ ergibt sich $[x, y]\,\varkappa\,\mathrm{I}'\,\langle m, k\rangle\,\varkappa$.

3. Es sei $x \in U$, $y \in M$. Dann gilt $[x, y]\,\varkappa = [0']$.

a) Es seien $m, k \in M$. Nach (P2) folgt $m^\varphi = 0'$ und wegen $[0']\,\mathrm{I}'\,\langle 0', k^\varphi\rangle$ ergibt sich $[x, y]\,\varkappa\,\mathrm{I}'\,\langle m, k\rangle\,\varkappa$.

b) Es seien $m \in M$, $k \in U$. Dann gilt $\langle m, k\rangle \varkappa = \langle u'\rangle$ und wegen $[0']\,\mathrm{I}'\,\langle u'\rangle$ ergibt sich $[x, y]\,\varkappa\,\mathrm{I}'\,\langle m, k\rangle\,\varkappa$.

c) Es seien $m \in U$, $k \in M$. Nach (P2) folgt aus der Gleichheit $y = t(x, m, k)$, daß $m^\varphi = 0'$. Dies ist aber ein Widerspruch, denn $m \in U$.

d) Es seien $m, k \in U$. Wegen $y = t(x, m, k)$ mit $y \in M$ gilt $\langle m, k\rangle \varkappa = \langle x^\varphi\rangle = \langle u'\rangle$. Aus $[0']\,\mathrm{I}'\,\langle u'\rangle$ folgt dann $[x, y]\,\varkappa\,\mathrm{I}'\,\langle m, k\rangle\,\varkappa$.

4. Es sei $x, y \in U$.

a) Es seien $m, k \in M$. Aus $y = t(x, m, k)$ mit $k \in M$ folgt $[x, y]\,\varkappa = [m^\varphi]$. Wegen $[m^\varphi]\,\mathrm{I}'\,\langle m^\varphi, k^\varphi\rangle$ ergibt sich $[x, y]\,\varkappa\,\mathrm{I}'\,\langle m, k\rangle\,\varkappa$.

b) Es seien $m \in M$, $k \in U$. Dann ist $\langle m, k\rangle \varkappa = \langle u'\rangle$. Wegen $x, y \in U$ gilt $[x, y]\,\varkappa = [n^\varphi]$, wo $n \in Q$. Aus $[n^\varphi]\,\mathrm{I}'\,\langle u'\rangle$ folgt $[x, y]\,\varkappa\,\mathrm{I}'\,\langle m, k\rangle\,\varkappa$.

c) Es seien $m \in U$, $k \in M$. Dann ist $\langle m, k\rangle \varkappa = \langle 0'\rangle$. Wegen $y = t(x, m, k)$ mit $k \in M$ ergibt sich $[x, y]\,\varkappa = [m^\varphi] = [u']$. Aus $[u']\,\mathrm{I}'\,\langle 0'\rangle$ folgt dann $[x, y]\,\varkappa\,\mathrm{I}'$ $\mathrm{I}'\,\langle m, k\rangle\,\varkappa$.

d) Es seien $m, k \in U$.

α) Nehmen wir an, daß Elemente $a, b \in M$ mit $b = t(a, m, k)$ existieren. Dann gilt $\langle m, k\rangle \varkappa = \langle a^\varphi\rangle$. Gilt zugleich $y = t(x, m_1, k_1) \Rightarrow k_1 \in U$ für alle $m_1 \in R$, so ist $[x, y]\,\varkappa = [u']$. Gibt es ein $k_1 \in M$ mit $y = t(x, m_1, k_1)$, dann gilt $[x, y]\,\varkappa = [m_1^\varphi]$. Aus $b = t(a, m, k)$, $y = t(x, m, k)$ und $y = t(x, m_1, k_1)$ folgt nach (P7) $m_1 \in U$, was wieder $[x, y]\,\varkappa = [u']$ bedeutet. Wegen $[u']\,\mathrm{I}'\,\langle a^\varphi\rangle$ ergibt sich also $[x, y]\,\varkappa = \langle m, k\rangle\,\varkappa$.

β) Nehmen wir an, daß aus $b = t(a, m, k)$ entweder $a \in U$ oder $b \in U$ folgt. Dann gilt $\langle m, k\rangle \varkappa = \langle u'\rangle$. Wegen $x, y \in U$ ist $[x, y]\,\varkappa = [n^\varphi]$ mit $n \in Q$. Aus $[n^\varphi]\,\mathrm{I}'\,\langle u'\rangle$ folgt dann $[x, y]\,\varkappa\,\mathrm{I}'\,\langle m, k\rangle\,\varkappa$.

Es sei nun $s = [x, y]$, $r = \langle x\rangle$. Dann gilt $\langle x\rangle \varkappa = \langle x^\varphi\rangle$.

a) Aus $x, y \in M$ folgt $[x, y]\,\varkappa = [x^\varphi, y^\varphi]$ und wegen $[x^\varphi, y^\varphi]\,\mathrm{I}'\,\langle x^\varphi\rangle$ ergibt sich $[x, y]\,\varkappa\,\mathrm{I}'\,\langle x\rangle\,\varkappa$.

b) Aus $x \in U$, $y \in M$ folgt $[x, y]\varkappa = [0']$ und wegen $[0'] \mathrm{I}' \langle u' \rangle$ ergibt sich $[x, y]\varkappa \mathrm{I}' \langle x \rangle \varkappa$.

c) Aus $x \in M$, $y \in U$ folgt $[x, y]\varkappa = [u']$ und wegen $[u'] \mathrm{I}' \langle x^\varphi \rangle$ ergibt sich $[x, y]\varkappa \mathrm{I}' \langle x \rangle \varkappa$.

d) Aus $x, y \in U$ folgt $[x, y]\varkappa = [m^\varphi]$ mit $m \in Q$ und $\langle x \rangle \varkappa = \langle u' \rangle$. Wegen $[m^\varphi] \mathrm{I}' \langle u' \rangle$ ergibt sich $[x, y]\varkappa \mathrm{I}' \langle x \rangle \varkappa$.

Es sei $s = [m]$, $r = \langle m, k \rangle$. Dann gilt $[m]\varkappa = [m^\varphi]$.

a) Es seien $m, k \in M$. Aus $[m^\varphi] \mathrm{I}' \langle m^\varphi, k^\varphi \rangle$ folgt $[m]\varkappa \mathrm{I}' \langle m, k \rangle \varkappa$.

b) Es seien $m \in U$, $k \in M$. Dann gilt $\langle m, k \rangle \varkappa = \langle 0' \rangle$ und wegen $[u'] \mathrm{I}' \langle 0' \rangle$ ergibt sich $[m]\varkappa \mathrm{I}' \langle m, k \rangle \varkappa$.

c) Es seien $m \in M$, $k \in U$. Dann gilt $\langle m, k \rangle = \langle u' \rangle$ und wegen $[m^\varphi] \mathrm{I}' \langle u' \rangle$ ergibt sich $[m]\varkappa \mathrm{I}' \langle m, k \rangle \varkappa$.

d) Es seien $m, k \in U$. Dann gilt $\langle m, k \rangle \varkappa = \langle x^\varphi \rangle$ mit $x \in Q$. Aus $[u'] \mathrm{I}' \langle x^\varphi \rangle$ folgt $[m]\varkappa \mathrm{I}' \langle m, k \rangle \varkappa$.

Gilt $[m] \mathrm{I} \langle u \rangle$ mit $m \in Q$, dann $[m]\varkappa = [m^\varphi]$, $\langle u \rangle \varkappa = \langle u' \rangle$ und wegen $[m^\varphi] \mathrm{I}'$ $\mathrm{I}' \langle u' \rangle$ ergibt sich $[m]\varkappa \mathrm{I}' \langle u \rangle \varkappa$. Gilt $[u] \mathrm{I}' \langle m \rangle$ mit $m \in Q$, dann folgt aus $[u'] \mathrm{I}'$ $\mathrm{I}' \langle m^\varphi \rangle$ die Beziehung $[u]\varkappa \mathrm{I}' \langle m \rangle \varkappa$.

Literatur

[1] *Dembowski, P.:* Finite geometries. Berlin—Heidelberg—New York: Springer 1968.

[2] *Hall, M.:* Projective Planes. Trans. Amer. Math. Soc. *54*, (1943), 229—277.

[3] *Machala, F.:* Erweiterte lokale Ternärringe. Czech. Math. Journal, 27 (102), (1977), 560—572.

[4] *Sandler, R.:* Pseudo Planes and Pseudo Ternaries. Journal of Algebra *4*, (1966), 300—316.

[5] *Sandler, R.:* On homomorphism and images of projective planes and pseudo planes. Collection of articles dedicaded to the memory of Abraham Adrian Albert. Scripta Math. *29* no 3—4, 1973, 279—292.

[6] *Skornjakov, L. A.:* Homomorphismen der projektiven Ebenen und T-Homomorphismen der Ternärkörper (Russisch). Mat. sb. *43*, (1957), 285—294.

[7] *Vitzhum, K.:* Affine Pseudoebenen. Inaugural Dissertation, Universität München 1968.

Anschrift des Verfassers: 771 46 Olomouc, Leninova 26 (Přírodovědecká fakulta UP).