Časopis pro pěstování matematiky

Václav Vilhelm

Über die Charakterisierung der Verbände durch ihre c-Teilverbände

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 103 (1978), No. 3, 291--296

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117986`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 103 (1978), Praha

ÜBER DIE CHARAKTERISIERUNG DER VERBÄNDE DURCH IHRE c-TEILVERBÄNDE

VÁCLAV VILHELM, Praha

(Eingegangen am 22. Dezember 1976)

Ein Teilverband L_1 eines Verbandes L heisst ein c-Teilverband in L, wenn jede Kette in L_1, die keine echte Verfeinerung in L_1 besitzt, zugleich keine echte Verfeinerung in L hat. Sei K eine Klasse der Verbände, K_1 ihre Teilklasse. Die Klasse K_1 heisst nach JAKUBÍK [1] in der Klasse K durch c-Teilverbände charakterisierbar, wenn es eine Menge $S \subset K \setminus K_1$ mit der folgenden Eigenschaft gibt: ein Verband $L \in K$ gehört zu $K \setminus K_1$ genau dann, wenn er einen zu einem Verband der Menge S isomorphen c-Teilverband enthält. In der vorliegenden Arbeit wollen wir u. a. das in [1] gestelltes Problem über die Charakterisierbarkeit der Klasse aller distributiven Verbände in der Klasse aller modularen Verbände durch c-Teilverbände untersuchen.

Ist L ein Verband und K seine Kette, so werden wir unter der Länge $l(K)$ der Kette K die Mächtigkeit der Menge K verstehen; die Kardinalzahl $l(L) = \sup \{l(K) \mid K$ eine Kette in $L\}$ heisst dann die Länge des Verbandes L. L heisst ein Verband mit lokal endlicher Länge, wenn die Länge jedes Intervalls $\langle a, b\rangle \subset L$ endlich ist. L heisst ein Verband mit lokal endlichen Ketten, wenn jede seine Kette von lokal endlicher Länge ist.

I.

Sei C eine Klasse der Verbände, die mit jedem Verband alle mit ihm isomorphen Verbände, mit jedem System der Verbände der Klasse C auch sein cartesisches Produkt und mit jedem direkten System der Verbände aus C zugleich den direkten Limes des Systems enthält. Setzen wir weiter voraus, dass C eine nichtleere Teilklasse $\bar{C}_1 \neq C$ enthält, in der mit jedem Verband L_1 alle Verbände der Klasse C liegen, welche einen mit L_1 isomorphen Teilverband besitzen. Unter diesen Voraussetzungen über die Klassen C und $\bar{C}_1$ werden wir für jede reguläre Kardinalzahl m einen Verband $L(m) \in \bar{C}_1$ konstruieren, in dem $l(K) \geqq m$ für jede seine maximale Kette K zwischen beliebigen Elementen $a, b \in L(m)$ $(a < b)$ ist.

Konstruktion des Verbandes $L(m)$. Es sei ω die erste transfinite Zahl der regulären

Mächtigkeit m. Wählen wir in $\bar{C}_1$ einen Verband L_1. Infolge der Voraussetzungen über $\bar{C}_1$ muss L_1 mehr als ein Element enthalten. Es sei $\iota\ (1 \leqq \iota < \omega)$ eine transfinite Zahl. Setzen wir voraus, wir haben schon die zunehmende Kette $\{L_\alpha\}_{1 \leqq \alpha < \iota}$ der Verbände der Klasse C konstruiert. Ist ι keine Limeszahl, so setzen wir

$$L_\iota = L_{\iota-1} \times L_{\iota-1}$$

und betten den Verband $L_{\iota-1}$ mittels der Abbildung $a \mapsto (a, a)$ für jedes $a \in L_{\iota-1}$ in den L_ι ein. $L_{\iota-1}$ ist dann ein Teilverband des L_ι und L_ι ist ein Element der Klasse C. Es sei ι eine Limeszahl. Für jedes $\alpha\ (1 \leqq \alpha < \iota)$ bilden wir das cartesische Produkt

$$S_\alpha = \prod L_\gamma\ (\alpha \leqq \gamma < \iota)$$

der Verbände L_γ. Wieder ist $S_\alpha \in C$. Definieren wir nun für jede Zahlen $\alpha, \beta\ (\alpha \leqq \leqq \beta < \iota)$ den Verbandshomomorphismus

$$g^\alpha_\beta : S_\alpha \to S_\beta\,,$$

wo $g^\alpha_\beta[(a_\gamma)_{\alpha \leqq \gamma < \iota}] = (a_\gamma)_{\beta \leqq \gamma < \iota}$ ist. Das System $(S_\alpha, g^\alpha_\beta)$ ist offenbar ein direktes System der Verbände der Klasse C. Es sei $\varinjlim S_\alpha = (L_\iota, (l^\alpha_\iota)_{\alpha < \iota})$ sein direkter Limes. Dann ist $L_\iota \in C$ und für jede Zahlen $\alpha, \beta\ (1 \leqq \alpha \leqq \beta < \iota)$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} S_\alpha \arrow[r, "l^\alpha_\iota"] & L_\iota \\ S_\beta \arrow[u, "g^\alpha_\beta"] \arrow[r, dash, "l^\beta_\iota"'] & {} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

kommutativ. Die Einbettungen $h_\alpha : L_\alpha \to S_\alpha\ (1 \leqq \alpha < \iota)$, wo $h_\alpha(a) = (a_\gamma)_{\alpha \leqq \gamma < 1}$, $a_\gamma = a$ ist, geben die Homomorphismen $l^\alpha_\iota h_\alpha : L_\alpha \to L_\iota$ und das Diagramm

$$\begin{tikzcd} L_\alpha \arrow[dr, "l^\alpha_\iota h_\alpha"'] & \subset & L_\beta \arrow[dl, "l^\beta_\iota h_\beta"] \\ & L_\iota & \end{tikzcd}$$

ist wieder für jede $\alpha, \beta\ (1 \leqq \alpha \leqq \beta < \iota)$ kommutativ. Die Homomorphismen $l^\alpha_\iota h_\alpha$ sind schon injektiv: es sei $a, b \in L_\alpha$, $l^\alpha_\iota h_\alpha(a) = l^\alpha_\iota h_\alpha(b)$. Dann gibt es ein $\gamma\ (\alpha \leqq \gamma < \iota)$, so dass

$$g^\alpha_\gamma(h_\alpha(a)) = g^\alpha_\gamma(h_\alpha(b))$$

ist. Es ist also $(a_\delta)_{\gamma \leqq \delta < \iota} = (b_\delta)_{\gamma \leqq \delta < \iota}$, $a_\delta = a$, $b_\delta = b$. Daher ist $a = b$. Jedes Element $a \in L_\alpha\ (1 \leqq \alpha\ \iota)$ kann so mit dem Element $1^\alpha_\iota h_\alpha(a) \in L_\iota$ identifiziert werden; jeder Verband $L_\alpha\ (1 \leqq \alpha < \iota)$ ist dann ein Teilverband des L_ι. Setzen wir endlich $L(m) = \varinjlim (L_\iota) = \bigcup L_\iota\ (1 \leqq \iota < \omega)$. Es ist $L(m) \in C$.

Satz 1. *Der oben konstruierte Verband $L(m)$ liegt in der Teilklasse $\bar{C}_1$ und jede seine maximale Kette zwischen Elementen $a, b \in L(m)$ $(a < b)$ hat die Mächtigkeit $\geqq m$.*

Beweis. Die erste Behauptung ist klar, denn $L(m) \in C$, $L_1 \subset L(m)$, $L_1 \in \bar{C}_1$ ist. Sei K eine Kette im $L(m)$ der Länge $l(K) < m$ und es sei $a \leqq x < b$ für jedes $x \in K$. Offenbar genügt es die Existenz eines solchen Elementes $c \in L(m)$ zu beweisen, dass $x < c < b$ für jedes $x \in K$ ist: dann kann $K \cup \{a, b\}$ keine maximale Kette zwischen a, b sein. Zu jedem $x \in K \cup \{a, b\}$ gibt es eine transfinite Zahl $\alpha(x) < \omega$, für die $x \in L_{\alpha(x)}$ ist. Weil Card $\{\alpha(x) \mid x \in K \cup \{a, b\}\} < m$ und m eine reguläre Kardinalzahl ist, kann man eine transfinite Zahl $\alpha < \omega$ finden, so dass $\alpha(x) < \alpha$ für jedes $x \in K \cup \{a, b\}$ ist. Die Kette $K \cup \{a, b\}$ liegt also im Verband $L_\alpha \subset L(m)$. Hat K das grösste Element d, sei $c = (d, b) \in L_\alpha \times L_\alpha = L_{\alpha+1}$. Für jedes $x \in K$ ist dann im $L(m)$

$$x \leqq d = (d, d) < (d, b) < (b, b) = b\,.$$

Nehmen wir jetzt an, K besitze kein grösstes Element. In diesem Fall enthält K eine in der Anordnung $\leqq$ wohlgeordnete und mit K konfinale Teilkette T. Schreiben wir die Elemente der Kette T in der Form x_γ, wo die Indexen die Menge $M = \{\gamma \mid \alpha \leqq \leqq \gamma < \iota\}$ der transfiniten Zahlen durchlaufen und $x_\gamma < x_\delta$ gleichbedeutend mit $\gamma < \delta$ ist. Es gilt $\alpha < \omega$, Card $M \leqq$ Card $K < m$ and ω ist die erste transfinite Zahl der Mächtigkeit m; daher ist $\iota < \omega$. Die Zahl ι ist offenbar eine Limeszahl. Nehmen wir das Element $y = (x_\gamma)_{\alpha \leqq \gamma < \iota} \in S_\alpha$ und sei $c = l_\iota^\alpha(y) \in L(m)$. Wählen wir ein $\beta \in M$, so ist für jedes δ $(\beta \leqq \delta < \iota)$

$$g_\delta^\alpha(h_\alpha(x_\beta)) = (t_\sigma)_{\delta \leqq \sigma < \iota}\,, \quad t_\sigma = x_\beta\,,$$

$$g_\delta^\alpha(h_\alpha(b)) = (z_\sigma)_{\delta \leqq \sigma < \iota}\,, \quad z_\sigma = b\,,$$

$$g_\delta^\alpha(y) = (x_\sigma)_{\delta \leqq \sigma < \iota}\,.$$

Für jedes σ $(\delta < \sigma < \iota)$ ist aber $t_\sigma = x_\beta < x_\sigma < b = z_\sigma$. Darum gilt

$$g_\delta^\alpha(h_\alpha(x_\beta)) < g_\delta^\alpha(y) < g_\delta^\alpha(h_\alpha(b))$$

im S_δ für jedes δ $(\beta \leqq \delta < \iota)$ und im $L_\iota \subset L(m)$ ist also

$$x_\beta = l_\iota^\alpha\, h_\alpha(x_\beta) < l_\iota^\alpha(y) = c < l_\iota^\alpha\, h_\alpha(b) = b$$

für jedes $\beta \in M$. Weil die Kette T mit der Kette K konfinal ist, folgt daraus für jedes $x \in M$ die Ungleichung $x < c < b$, q.e.d.

Satz 2. *Die Klasse $C_1 = C \setminus \bar{C}_1$ ist nicht in der Klasse C durch c-Teilverbände charakterisierbar.*

Beweis. Setzen wir voraus, der Satz wäre falsch. Sei S die entsprechende Menge, mit deren Hilfe die Klasse C_1 in C durch c-Teilverbände charakterisiert ist. Sei $S = \{K_\beta \mid \beta \in B\}$. Weil $\bar{C}_1 \neq C$ ist, muss $B \neq \emptyset$ und $l(K_\beta) > 1$ für jedes $\beta \in B$ sein. S ist eine Menge; daher gibt es eine Kardinalzahl m, so dass $l(K_\beta) < m$ über jedes $\beta \in B$ ist. Wir können voraussetzen, dass m eine reguläre Kardinalzahl ist. Für die Zahl m bilden wir den Verband $L(m) \in \bar{C}_1$. $L(m)$ ist ein Verband der Klasse C, welcher nicht zur Klasse C_1 gehört. Es gibt also einen mit einem Verband K_β ($\beta \in B$) isomorphen c-Teilverband L des $L(m)$. Weil $l(K_\beta) > 1$, enthält L verschiedene vergleichbare Elemente a, b. Jede maximale Kette in L zwischen a, b ist aber zugleich die maximale Kette im $L(m)$ zwischen a, b und diese hat nach dem Satz 1 die Mächtigkeit $\geqq m$. Es ist also $l(L) \geqq m$, aber gleichzeitig ist $L \cong K_\beta$, $l(K_\beta) < m$; das ist ein Widerspruch.

Als eine unmittelbare Folgerung des Satzes 2 bekommen wir die folgende Beantwortung der Fragen (a) und (b) in [1].

Korollar. (a) *Die Klasse K_d aller distributiven Verbände ist nicht in der Klasse K_m aller modularen Verbände durch c-Teilverbände charakterisierbar.*

(b) *Sei K_0 die Klasse aller Verbände. Es sei K_1 ($\emptyset \neq K_1 \neq K_0$) eine Teilklasse der K_0, die mit jedem Verband alle zu seinen Teilverbänden isomorphen Verbände enthält. Dann ist die Klasse K_1 nicht in der Klasse K_0 durch c-Teilverbände charakterisierbar.*

Beweis. Die Klassen K_m und $K_m \setminus K_d$, resp. K_0 und $K_0 \setminus K_1$ erfüllen offenbar die Voraussetzungen über die Klassen C und $\bar{C}_1$. Die Behauptungen folgen dann aus dem Satz 2.

II.

Wesentlich verschieden ist der Sachverhalt in der Klasse $\bar{K}$ aller Verbände mit lokal endlichen Ketten. Bezeichnen wir mit $\bar{K}_l$, resp. $\bar{K}_s$, resp. $\bar{K}_m$, resp. $\bar{K}_d$ die Teilklassen aller Verbände mit lokal endlicher Länge, resp. aller semimodularen, resp. modularen, resp. distributiven Verbände der Klasse $\bar{K}$. Es sei weiter $\bar{K}_1$ die Teilklasse der Verbände der Klasse $\bar{K}$, in denen jede zwei maximale Ketten R_a^b, S_a^b zwischen beliebigen vergleichbaren Elementen a, b des Verbandes die gleiche Länge haben. Es ist gut bekannt, dass die Teiklassen $\bar{K}_s$, $\bar{K}_m$, $\bar{K}_d$ in der Klasse $\bar{K}_l$ durch c-Teilverbände charakterisierbar sind. (Siehe z. B. [1].)

Diese Ergebnisse kann man noch etwas verschärfen. Führen wir zu diesem Zwecke die folgende Definition ein.

Definition. Sei K eine Klasse der Verbände, K_1 sei ihre Teilklasse. Die Teilklasse K_1 heisst in der Klasse K durch c-Teilverbände *stark charakterisierbar*, wenn es eine Menge $T \subset K \setminus K_1$ gibt, so dass $L \in K \setminus K_1$ genau dann ist, wenn L ein Intervall $\langle a, b \rangle$ und im $\langle a, b \rangle$ solche c-Teilverbände L_α ($\alpha \in A$, $A \neq \emptyset$) enthält, dass $\sup \{l(L_\alpha) \mid \alpha \in A\} = l(\langle a, b \rangle)$ und $L_\alpha \cong L'_\alpha$, $L'_\alpha \in T$ für jedes $\alpha \in A$ ist.

Seien m, n $(2 \leqq m,\ 2 \leqq n)$ natürliche Zahlen. Mit $L(m, n)$ bezeichnen wir den Verband mit Elementen

$$x = x_1 < x_2 < \ldots < x_m = y\,, \quad x = y_1 < y_2 < \ldots < y_n = y\,,$$

wo x_i, y_j für $1 < i < m$, $1 < j < n$ unvergleichbar sind. ($L(m, n)$ ist also ein zyklischer Verband.) Ferner sei M_5 ein modularer nicht distributiver Verband mit fünf Elementen, B ein Verband mit dem Diagramm auf Abb. 1 und B' der zum B duale Verband.

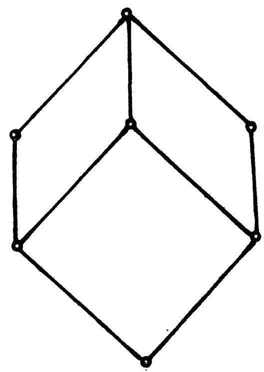

Abb. 1

Satz 3. (a) *Die Klasse $\bar{K}_1$ ist in $\bar{K}$ durch c-Teilverbände stark charakterisierbar. Die entsprechende Menge aus der Definition ist $T = \{L(m, n) \mid 3 \leqq m < n\}$.*

(b) *Die Klasse $\bar{K}_s$, resp. $\bar{K}_m$, resp. $\bar{K}_d$ ist in der Klasse $\bar{K}_1$, resp. $\bar{K}_s$, resp. $\bar{K}_m$ durch c-Teilverbände stark charakterisierbar; die entsprechende Menge ist $\{L(m, m) \mid 4 \leqq m\} \cup \{B'\}$, resp. $\{B\}$, resp. $\{M_5\}$.*

Für den Beweis beweisen wir zuerst das folgende

Lemma. *Sei $L \in \bar{K}$, $\langle a, b\rangle$ ein Intervall in L. Dann sind entweder jede zwei maximalen Ketten in L zwischen a, b von derselben Länge oder es gibt ein Teilintervall $\langle a', b'\rangle \subset \langle a, b\rangle$, so dass $\langle a', b'\rangle$ c-Teilverbände C_α $(\alpha \in A \neq \emptyset)$ des L enthält und $\sup\{l(C_\alpha) \mid \alpha \in A\} = l(\langle a', b'\rangle)$, $C_\alpha \cong L(m_\alpha, n_\alpha)$ $(m_\alpha \neq n_\alpha)$ ist.* (Vergl. [2], Thm. 7.)

Beweis. R, S seien maximale Ketten in L zwischen a, b. Ist $l(R) = 2$, so ist die Behauptungen richtig. Setzen wir voraus, die Behauptung gelte für jedes Intervall $\langle c, d\rangle \subset L$, welches eine maximale Kette P mit $l(P) < n$ $(n \geqq 2)$ enthält. Es sei $\langle a, b\rangle$ ein Intervall in L, in dem n die kleinste Länge seiner maximalen Ketten ist. R sei eine maximale Kette in $\langle a, b\rangle$, $l(R) = n$. Für den Beweis kann man sich offenbar nur auf den Fall begrenzen, in dem $\langle a, b\rangle$ eine maximale Kette S $(l(S) > n)$

enthält und R, S keinen zyklischen Teilverband des Verbandes L erzeugen. Die Elemente der Kette R, resp. S seien

$$a = a_1 < a_2 < \ldots < a_m = b\,, \quad \text{resp.} \quad a = b_1 < b_2 < \ldots < b_m = b\,.$$

Es gilt also $a_2 \vee b_2 = c < b$ oder $a < d = a_{n-1} \wedge b_{m-1}$. Untersuchen wir den ersten dieser dualen Fälle. Es sei T, resp. U, resp. V eine maximale Kette in L zwischen c, b, resp. a_2, c, resp. b_2, c. Es gilt $l(R') = n - 1$, wo $R' = R \setminus \{a\}$ ist. Sind die Längen der Ketten R, $U \cup T$ verschieden, dann gilt die Behauptung des Hilfsatzes nach der Induktionsvoraussetzung. Es sei also $l(U \cup T) = n - 1$. Dann ist $l(U) < n - 1$; also ist $l(U \cup \{a\}) < n$. Infolge der Induktionsvoraussetzung können wir uns auf den Fall $l(\{a\} \cup U) = l(\{a\}) \cup V)$, also $l(U) = l(V)$ begrenzen. Es ist daher $l(V \cup T) = l(U \cup T) = n - 1$. Aber für die Länge der Kette $S' = S \setminus \{a\}$ gilt $l(S') = m - 1 > n - 1$. Die Ketten S' und $V \cup T$ haben daher verschiedene Längen und es ist $l(V \cup T) = n - 1$. Die Behauptung ist wieder nach der Induktionsvoraussetzung richtig.

Beweis des Satzes 3. Die Behauptung (a) folgt unmittelbar aus dem Lemma; (b) ist die Folgerung der Behauptung (a), der Inklusionen $\bar{K}_d \subset \bar{K}_m \subset \bar{K}_s \subset \bar{K}_1 \cap \bar{K}_l$ und der Sätze (A), (B), (C) in [1].

Literatur

[1] *Ján Jakubík:* Sublattices with saturated chains, Czech. Math. Journal *25* (*100*), 1975, 442—444.

[2] *Oystein Ore:* Chains in partially ordered sets, Bull. Am. Math. Soc. *49*, 1943, 558—566.

Anschrift des Verfassers: 121 34 Praha 2, Trojanova 13 (Stavební fakulta ČVUT).