Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 102 (1977), No. 1, 85--94

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117938

RECENSE

Bo Stenström: RINGS OF QUOTIENTS (An introduction to methods of ring theory), Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Band 217, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1975, 309 + viii stran, cena DM 92,—.

Kniha je věnována hlavně studiu teorie podílových okruhů, poskytuje však též přehled o základních metodách a výsledcích celé teorie okruhů. V kapitole I „Modules" jsou podány základy teorie modulů s aplikacemi na některé důležité třídy okruhů (polojednoduché, regulární, koherentní okruhy). V kapitole II „Rings of fractions" jsou studovány podílové okruhy vzhledem k multiplikativně uzavřené podmnožině. Kapitoly III—V „Modular lattices", „Abelian categories", „Grothendieck categories" jsou věnovány základním nástrojům obecné teorie okruhů. Kapitola VI „Torsion theory" je uceleným přehledem vlastností různých typů torsních teorií se zvláštním zřetelem ke Gabrielovým topologiím. Klasifikace Gabrielových topologií pro některé noetherovské okruhy je podána v kapitole VII „Hereditary torsion theories for noetherian rings" a pro okruhy s vhodnými minimálními podmínkami na pravé ideály v kapitole VIII „Simple torsion theories". Centrální částí knihy je kapitola IX „Rings and modules of quotients", v níž jsou zavedeny obecné podílové okruhy a moduly. Funktor lokalizace a kategorické vlastnosti podílových modulů jsou studovány v kapitolách X „The category of modules of quotients" a XI. „Perfect localizations". Vlastnostem některých speciálních tříd okruhů v souvislosti s maximálními podílovými okruhy jsou věnovány kapitoly XII, XIII, XIV „The maximal ring of quotients of a non-singular ring", „Finiteness conditions on Mod (A, J)", „Self-injective rings". Závěrečná kapitola XV „Classical rings of quotients" se vrací ke klasickým otázkám studovaným již v kapitole II.

Ladislav Bican, Praha

Rudolf Piska, Václav Medek: DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE II. Praha 1975, SNTL - Nakladatelství technické literatury, n. p. a ALFA - Vydavatel'stvo technickej a ekonomickej literatúry, n. p., 2. vyd., náklad 4700 výt., str. 400, obr. 376, cena Kčs 26,— váz.

Druhý díl učebnice po teoretickém výkladu o křivkách a některých plochách se zabývá těmi aplikacemi deskriptivní geometrie, které jsou potřebné pro stavební inženýry. Vzhledem k tomu, že nové vydání[1]), nehledí-li se k opravení několika drobných nedopatření, se liší od prvního jen v některých doplňcích, které byly zařazeny hlavně do poslední části knihy (str. 338—390), jeví se jako účelné zmínit se pouze o těchto doplňcích.

Protože v některých směrech byla rozšířena látka I. dílu učebnice, byla sem především přeřazena část týkající se osvětlení těles v základních druzích promítání. Tím však vznikl metodický nedostatek, neboť již na začátku II. dílu je prováděno osvětlení některých ploch (např. rotační kvadratické plochy) a jeho vlastní teorie se objevuje až v závěru učebnice. Dále je pak nově uvedeno tzv. technické osvětlení, kdy vržený stín na (obvykle) svislou průmětnu nahrazuje pomocný

[1]) Recenze 1. vydání byla uveřejněna v tomto časopise roč. *92* (1967), str. 363—364.

průmět (tak, jak je tomu v každém promítacím způsobu: jde tedy o kombinaci pravoúhlého a kosoúhlého promítání na touž průmětnu). Nakonec je sem zařazena kapitola o trojhranu (určená tedy studentům zeměměřického inženýrství), kdy po výkladu základních vlastností trojhranu jsou uvedeny jeho základní konstrukce z jeho stran a úhlů.

V učebnici se jedna část (celkem jen 16 stran) zabývá základy tzv. stereotomie. Dnešní projektanti však neradi navrhují zhotovení propusti v násypu, vyústění tunelu, příp. jiná větší stavební díla z kamene, neboť se domnívají, že betonové, příp. železobetonové konstrukce jsou ekonomicky výhodnější. Naproti tomu konstrukce z tesaného kamene (který bývá často těžen nedaleko stavěného díla, mnohdy i přímo v díle samém) jsou vzhledově mnohem hezčí. Tento spor nelze však řešit při recenzi uvedené učebnice, nutno však s politováním konstatovat, že na stavební fakultě ČVUT v Praze již přes 15 let se stereotomie nepřednáší z důvodů požadavků kateder předmětů inženýrské praxe. Jak ukazují závažné zprávy z jednání komisí pro reformu studia na stavebních fakultách, tento tlak kateder praxe dále sílí a povede k dalšímu omezení ve výkladu užité geometrie, jak by bylo vhodnější vzhledem k použití nazývat dosavadní deskriptivní geometrii.

Karel Drábek, Praha

I. Farkasová a *M. Farkas:* INTRODUCTION TO LINEAR ALGEBRA. Vydali Akadémiai Kiadó v Budapešti a Adam Hilger Ltd. v Londýně r. 1975. První vydání, 205 stran.

První kapitola je věnována vektorům v rovině a v trojrozměrném prostoru, skalárnímu a vektorovému součinu a na několika stránkách je pojednáno o významu pro geometrii a mechaniku. Ve druhé kapitole jsou zavedena komplexní čísla a jsou zde probrány základní vlastnosti polynomů. Po těchto pomocných partiích následuje kapitola věnovaná maticím a determinantům. Jsou zde zavedeny operace mezi maticemi, studována lineární závislost v prostoru n-tic čísel a odvozeny nejzákladnější vlastnosti determinantů. Ve čtvrté kapitole jsou probírány základy teorie soustav lineárních algebraických rovnic a lineárního programování. V páté kapitole je něco o lineárních a euklidovských prostorech, zejména Cauchyova nerovnost a souvislost transformací ortonormálních souřadnic s ortogonálními maticemi. Poslední kapitola pojednává o lineárních operátorech a jejich souvislosti s maticemi. Jsou zde zavedena vlastní čísla matice a vrchol tvoří věty o diagonální formě symetrické matice a o polárním rozkladu. Na několika stránkách je tu též zmínka o kvadratických formách.

V předmluvě je knížka určena jako učebnice pro studenty prvních ročníků fakult zaměřených na matematiku, přírodní vědy a inženýrství. Na první pohled je zřejmé, že pro studenty matematiky je příliš povrchní. Obávám se však, že příliš neprospěje ani přírodovědcům a technikům. Je napsána značně nezáživně a připomíná špatné skriptum, jehož autor byl nucen nahonem zkompilovat učební text, který by umožnil při redukovaném počtu hodin odpřednášet rozšířené množství látky. Zvláště zarážející je, že učebnice se až na malé výjimky nezmiňuje o praktických aplikacích probrané teorie a numerické aspekty jsou zcela opominuty. Vyvstává otázka, na kterých školách s anglickým vyučovacím jazykem budou podle recenzované učebnice přednášet. Z informací na záložce vysvítá, že autoři z budapešťské techniky působili též v Nigerii a to podporuje domněnku, že učebnice byla vydána pro studenty z rozvojových zemí. Obávám se však, že vzhledem k příslušným specifickým problémům je pro ně tím méně vhodná.

Antonín Vrba, Praha

R. von Randow: INTRODUCTION TO THE THEORY OF MATROIDS. Vydalo Springerovo nakladatelství, Berlin—Heidelberg—New York r. 1975 jako 109. svazek edice Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. První vydání, 102 str., cena DM 18,—.

V polovině třicátých let definoval H. Whitney matematickou strukturu „matroid". Příslušné axiomy byly zobecněním základních vlastností lineární závislosti ve vektorových prostorech.

Whitney zároveň ukázal, že těmto axiomům vyhovují též jisté podgrafy daného grafu a provedl základní výzkum na tomto poli. Asi o deset let později se ukázaly souvislosti matroidů s kombinatorickou teorií transversál a s algebraickou teorií svazů, což byl další impuls pro jejich zkoumání. Po dalších deseti letech se velmi zevrubně zabýval matroidy s hlediska teorie grafů W. T. Tutte a od šedesátých let trvá zvýšený zájem o tyto objekty. Jednotlivé směry studia jsou však navzájem značně odlehlé a monografie o matroidech (W. T. Tutte, C. P. Bruter) se omezují jen na určitý aspekt. Autor se v recenzované publikaci pokusil sestavit všeobecný úvod do teorie matroidů, aniž by preferoval některé hledisko.

V první kapitole je uvedeno pět klasických axiomatických definic matroidu (dvě pomocí hodnosti, dále pomocí závislosti, kružnic a base) a je ukázána jejich vzájemná ekvivalence. Druhá kapitola obsahuje přehled základních vlastností matroidů, zejména je probrána dualita matroidů. V další kapitole jsou uvedeny rozmanité příklady matroidů, zejména matroidy související s lineární algebrou a s teorií grafů, s obecnou kombinatorikou a binární matroidy. Čtvrtá kapitola se zabývá využitím matroidů při konstrukci extremální množiny ze souboru podmnožin konečné množiny opatřené vahou (tzv. Greedy Algorithm). V poslední kapitole jsou shrnuty některé poměrně nedávné výsledky týkající se změn base matroidu.

Materiál je vhodně vybrán i uspořádán a dobře ukazuje, jak zajímavý je unifikující pohled z hlediska bohaté obecné struktury na rozmanité matematické disciplíny. Četné odkazy na více než 50 položek seznamu literatury umožňují čtenáři zorientovat se v základní literatuře. Přesto, že knížka není tištěna ze sazby, je poměrně přehledná. Bude užitečná především kombinatorikům jako kompendium a dále pak všem matematikům, kteří se chtějí seznámit s hlavními ideami této plodné teorie. Pro odborníky v matematické ekonomii a operačním výzkumu, jimž je knížka také určena (očekává se, že matroidy co nejdříve ovlivní i tato odvětví), je však styl výkladu asi přece jen příliš strohý.

Antonín Vrba, Praha

Ivar Ekeland, Roger Temam: ANALYSE CONVEXE ET PROBLÈMES VARIATIONNELS. Dunod a Gauthier-Villars, Paris—Bruxelles—Montréal 1974. XII + 340 stran. Cena 220 F.

V edici *Études mathématiques* vyšly v uplynulých letech mj. dvě znamenité publikace J.-L. Lionse, věnované problematice parciálních diferenciálních rovnic (o nelineárních okrajových úlohách a o optimální regulaci). Posuzovaná kniha, která tvoří další svazek edice, si udržela dobrou úroveň svazků předcházejících, s nimiž také tématicky úzce souvisí. Jistě není náhodou, že autoři věnovali svou knihu právě J.-L. Lionsovi.

Studium konvexních funkcí a jejich vlastností i aplikací je již po mnoho let vděčným polem působnosti; teprve v posledních letech se však — především na základě zobecňování problémů lineárního programování i na programování nelineární a díky různým dalším, i nečekaným aplikacím — zkonstituovala konvexní analýza jako samostatná oblast matematického bádání. Oba autoři chtějí ve své knize popsat některé výsledky konvexní analýzy a pojednat o jejich užití v různých problémech: v okrajových úlohách pro parciální diferenciální rovnice, v numerické analýze, v mechanice, v ekonomii. Všechny tyto aplikace lze formulovat jako variační problémy; v souladu s plány autorů je kniha rozdělena na tři části: v první části se vykládají základy konvexní analýzy, část druhá pojednává o dualitě a konvexních variačních problémech, třetí pak o relaxaci a nekonvexních variačních problémech.

První část je tvořena třemi kapitolami. Pojednává se v nich o vlastnostech konvexních funkcí (jsou míněny funkcionály nad reálným lineárním topologickým prostorem V); mj. je zaveden důležitý pojem konjugované funkce a pojem subdiferenciálu zobecňujícího pojem derivace. Dále je vyšetřován problém minimalizace konvexní funkce, tj. hledání prvku $u \in V$, pro který je $F(u) = \inf F(v)$ (existence minima, charakterizace řešení u atd.), a problém je formulován též v jazyce variačních nerovností. A konečně je zaveden důležitý pojem duálního problému: k problému

$$(\mathscr{P}) \qquad \inf_{u \in V} F(u)$$

resp. k tzv. *perturbovanému problému*

$$(\mathscr{P}_p) \qquad \inf_{u \in V} \Phi(u, p),$$

kde Φ je definována na $V \times Y$ a je $\Phi(u, 0) = F(u)$, se definuje tzv. *duální problém*

$$(\mathscr{P}^*) \qquad \sup_{p^* \in Y^*} \{-\Phi^*(0, p^*)\},$$

kde Φ^* je funkce konjugovaná k Φ, definovaná na $V^* \times Y^*$. Jsou vyšetřovány vztahy mezi oběma problémy a obecné úvahy jsou specifikovány, ovšem zatím stále ještě v dosti obecné rovině.

Druhá část knihy se ve čtyřech kapitolách zabývá konkrétními aplikacemi principu duality. Nejprve se na řadě konkrétních variačních problémů (jde o okrajové úlohy pro diferenciální rovnice, o úlohy z fyziky, o optimální regulace), kde V a Y jsou prostory Sobolevova typu $W^{k,p}$ s $p > 1$, charakterizuje duální problém $(\mathscr{P}^*)$ a vyšetřuje se jeho vztah k problému $(\mathscr{P})$, který má v těchto případech řešení. Dále se zkoumají problémy typu minimální plochy, vedoucí na nereflexivní prostory $W^{k,1}$. Ukazuje se, že duální problém má v tomto případě jednoznačně určené řešení a že vztahu mezi $(\mathscr{P})$ a $(\mathscr{P}^*)$ lze využít k definici zobecněného řešení původního problému $(\mathscr{P})$. Dále je pro úplnost pojednáno o principu duality přes tzv. min—max, tj. o případ, kdy $F(u) = \sup_{w \in Z} L(u, w)$ a kdy tedy u problému $(\mathscr{P})$ jde o $\inf_{u \in V} \sup_{w \in Z} L(u, w)$; duální problém se zde definuje jako problém $\sup_{w \in Z} \inf_{u \in V} L(u, w)$. Konečně v poslední kapitole této části jsou uvedeny další aplikace principu duality: v numerické analýze, kdy lze pomocí tohoto principu upravit algoritmy numerického řešení problému, v mechanice, kde lze precizovat vztahy mezi různými energetickými principy, v ekonomii, kde se duální problém formuluje v termínech cen, aj.

Poslední část pojednává ve třech kapitolách o řešení problému $(\mathscr{P})$ pro nekonvexní funkci. Nejprve je zkoumán problém existence řešení, což je ilustrováno na příkladech. Pak se zkoumá tzv. *relaxovaný problém* $(\mathscr{P}\mathscr{R})$, v němž je nekonvexní funkce Φ nahrazena — zhruba řečeno — jistou konvexní funkcí a je pak zkoumán vztah mezi problémy $(\mathscr{P})$ a $(\mathscr{P}\mathscr{R})$. Jedná se zde o problémy typu $\inf \int_\Omega f(x, u(x), p(x))\, dx$, kde p je vektorová funkce, a jsou rozlišeny případy, kdy existuje klasické řešení problému $(\mathscr{P})$ a kdy neexistuje. Výsledky jsou aplikovány na konkrétní úlohy.

Kniha je zakončena historicko-bibliografickými komentáři k jednotlivým kapitolám a seznamem literatury.

Autoři si nekladli za cíl podat ucelený a systematický výklad celé problematiky; spíše chtěli popsat některé typické metody založené na konvexní analýze, a to ilustrací na co možná konkrétních úlohách. Tento úkol se jim bezesporu podařil, a tak lze knihu jen uvítat. Jediným kazem publikace je skutečnost, že neobsahuje ani rejstřík, ani seznam označení; i když je kniha psána přehledně a nešetří se odkazy na jiné části knihy, přece jen je orientace v knize dost ztížena. Je to nedostatek, ale snad ho lze chápat jako výjimku, která potvrzuje pravidlo.

Alois Kufner, Praha

Paul R. Halmos: MEASURE THEORY. Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin 1974. XII + 304 stran. Cena DM 26,90.

V roce 1950 vydalo nakladatelství Van Nostrand v New Yorku v edici *The University series in higher mathematics* knížku, která se zakrátko stala jednou ze základních učebnic jedné matematické disciplíny, učebnicí rozšířenou po celém (matematickém) světě, mj. i díky ruskému překladu z roku 1953.

Tou knížkou byla Halmosova Teorie míry. A jestliže se nakladatelství Springer rozhodlo vydat tuto knihu v roce 1974 jako 18. svazek edice *Graduate texts in mathematics*, a to bez jakékoliv změny, dokonce jako reprint původního vydání, svědčí to jen o kvalitách této publikace a o její stálé aktuálnosti.

Jistě proto není nutné psát nějakou podrobnou recenzi — byla by to vlastně recenze po 25 letech. A tak uveďme pro orientaci jen názvy jednotlivých kapitol: Sets and classes — Measures and outer measures — Extension of measures — Measurable functions — Integration — General set functions — Product spaces — Transformations and functions — Probability — Locally compact spaces — Haar measure — Measure and topology in groups.

Alois Kufner, Praha

Alexander M. Olevskiĭ: FOURIER SERIES WITH RESPECT TO GENERAL ORTHOGONAL SYSTEMS. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1975. X + 136 stran. Cena DM 78,—.

Ačkoliv teorie Fourierových řad má již staletou tradici (v roce 1777 našel Euler vztah mezi funkcí a koeficienty jejího rozvoje v trigonometrickou řadu), je stále vděčným předmětem zkoumání. Dlouhá léta byly vyšetřovány jen trigonometrické Fourierovy řady, teprve mnohem později se ukázalo, že stejně důležité jsou i Fourierovy řady vzhledem k různým obecným ortogonálním systemům.

Útlá knížka A. Olevského je překladem z ruského originálu, o kterém se recenzentovi nepodařilo získat žádné bibliografické údaje. Publikace je věnována právě obecným *ortonormálním soustavám* (krátce ONS), tj. je vyšetřován vztah mezi řadou

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n \quad (\text{kde } \{\Phi_n\} = \Phi$$

je obecná ONS funkcí definovaných na intervalu $\langle a, b \rangle$), koeficienty c_n a případně i funkcí f definovanou na $\langle a, b \rangle$, jsou-li c_n Fourierovy koeficienty: $c_n = c_n(f) = \int_a^b f(x)\, \Phi_n(x)\, dx$. Jsou v ní obsaženy výsledky, dosažené v průběhu posledních 15 let převážně sovětskou matematickou školou; velkou část tvoří výsledky autorovy, z nichž řada je zde publikována poprvé.

Ačkoliv knížka není rozsáhlá, obsahuje mnoho výsledků, výsledků nejrůznějšího druhu a velmi zajímavých, ilustrujících možnosti, které dávají obecné ONS, a ukazujících jejich úzkou souvisvislost s klasickým trigonometrickým systémem i některé rozdíly.

V první kapitole je vyšetřována konvergence Fourierovy řady v klasickém smyslu. Ukazuje se, že tento problém úzce souvisí s chováním Lebesgueovy funkce soustavy Φ, definované vztahem

$$L_n(\Phi, x) = \int_a^b \left| \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(x)\, \Phi_k(t) \right| dt\,.$$

Výsledky zde obsažené jsou založeny především na metodě dolního odhadu částečných součtů řady $\Sigma c_n \Phi_n$ v metrice prostoru L_1, která pochází od autora a jíž je věnován první paragraf. Ukazuje se například, že nelze sestrojit *omezenou* ONS Φ (tj. takovou, že $|\Phi_n(x)| \leqq M$ pro všechna x a n), která by měla tu vlastnost, že Fourierova řada libovolné spojité funkce vzhledem k Φ konverguje všude v $\langle a, b \rangle$ (tím se na omezené ONS rozšiřuje klasický výsledek du Bois-Reymondův z teorie trigonometrických řad). Z výsledků kapitoly např. plyne, že omezená ONS nemůže tvořit bázi ani v prostoru C ani v prostoru L_1 (na rozdíl od prostoru L_p s $p > 1$, kde bázi tvoří omezený trigonometrický systém). Jsou zde vyšetřovány řady s klesajícími koeficienty a ONS s majorantou, tj. takové, že $|\Phi_n(x)| \leqq \delta(x)$ pro všechna n.

Kapitola **druhá** je věnována konvergenci skoro všude. Označíme-li $\mathfrak{S}(\Phi)$ třídu všech posloupností $\{c_n\}$, pro něž řada $\Sigma c_n \Phi_n$ konverguje skoro všude, pak pro trigonometrický systém τ dokázal Carleson teprve v roce 1966 Luzinovu hypotézu, že $\mathfrak{S}(\tau) \supset l_2$. V kapitole jsou popsány některé výsledky maďarské školy, týkající se třídy $\mathfrak{S}_\Omega = \bigcap \mathfrak{S}(\Phi)$, kde Φ probíhá množinu Ω všech ONS na $\langle a, b \rangle$. Dále je zde uvedena např. Garsiova věta o tom, že libovolnou řadu tvaru $\Sigma c_n \Phi_n$ s $\{c_n\} \in l_2$ lze přerovnat tak, aby konvergovala skoro všude. Je zkoumána třída $\mathfrak{S}^\Pi = \bigcup_{\Phi \in \Pi} \mathfrak{S}(\Phi)$, kde Π je množina všech úplných ONS (tj. takových, že $c_n(f) = 0$ pro všechna n jen tehdy, je-li $f = 0$) a je studován problém rozšíření posloupnosti funkcí, definovaných na podmnožině intervalu $\langle a, b \rangle$, na celý interval tak, aby výsledná soustava byla ONS.

Haarův systém χ byl první ONS, vzhledem k níž měla každá spojitá funkce konvergentní Fourierovu řadu. V kapitole **třetí** je podrobně studováno vyjímečné postavení ONS χ, která je v jistém smyslu nejlepší mezi všemi úplnými ONS, neboť platí-li nějaký jev týkající se divergence Fourierovy řady pro ONS χ, platí už pro každý systém $\Phi \in \Pi$. Je zde popsána metoda, která umožňuje redukovat problém týkající se soustavy $\Phi \in \Pi$ na týž problém pro Haarovu soustavu. Dále je zde studován problém uspořádání v soustavě Φ; v trigonometrické řadě i celé řadě obecných ONS je dáno přirozené uspořádání, obecně tomu však tak není. V kapitole je např. ukázáno, že pro každý úplný ONS Φ existuje funkce $f \in L_2$, jejíž Fourierova řada diverguje pro přerovnání skoro všude.

Poslední **čtvrtá** kapitola je věnována konvergenci skoro všude a v průměru stupně p pro funkce z L_p, především pak zvláštnostem Fourierových řad v prostoru L_p s $p < 2$. Značná část kapitoly je věnována konstrukcím ONS, které mají různé „neklasické" vlastnosti a na nichž se ukazuje široká paleta možností, které skýtají obecné ONS.

Popsali jsme zde pochopitelně jen část výsledků v knize obsažených. Výsledky jsou většinou dokazovány, je ovšem třeba říci, že důkazy jsou spíše pracné než elegantní, jak tomu už bývá, když se dochází do jemností teorie. Kniha podává dobrý přehled a vhodně doplňuje existující literaturu; je jen škoda, že obsahuje některá drobná nedopatření, která působí občas trochu rušivě a odvádějí čtenářovu pozornost od podstaty věci (mám na mysli např. některé symboly, které se jinak definují a jinak vypadají v textu, či symboly a termíny, jejichž smysl není vysvětlen). Jsou to však — jak už bylo řečeno — drobnosti, které nekazí celkový dobrý dojem z Olevského knížky. Její četbu je možno doporučit skoro všem čtenářským vrstvám; dodejme na závěr, že část knížky tvořila obsah autorovy přednášky na universitě v Szegedu ve školním roce 1970/71.

Alois Kufner, Praha

Johannes C. C. Nitsche: VORLESUNGEN ÜBER MINIMALFLÄCHEN. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1975. XIV + 776 stran, 86 obrázků. Cena DM 196,—.

Teorie minimálních ploch má své počátky v 18. století: v roce 1762 uveřejnil J. L. Lagrange pojednání věnované nové metodě variačního počtu a tuto metodu ilustroval právě na úloze najít plochu v trojrozměrném prostoru, která by byla ohraničena danou uzavřenou křivkou a měla přitom co možná nejmenší povrch. Lagrange učinil první krok, ale dalšímu studiu problému minimálních ploch se už nevěnoval; to za něj učinili v průběhu dalších desetiletí mnozí jiní matematici zvučných jmen.

Historie teorie minimálních ploch je pohnutá: byla už mnohokrát odepisována (v posuzované knize je např. citován názor, že vývoj teorie minimálních ploch je vlastně vývoj jistého geometrického problému od jeho bouřlivého mládí — čímž je míněna doba kolem roku 1865 — až do znaveného stáří — tím má být údobí kolem roku 1930), a byla odepisována neprávem, neboť J. C. C. Nitsche vypozoroval v historii této teorie několikerý zlatý věk: nejprve období let 1855 až 1890, pak periodu 1930—1940 a konečně léta současná.

Problém minimálních ploch byl zpočátku považován za problém ryze geometrický; má však úzký vztah k mnoha jiným matematickým disciplinám — k teorii funkcí komplexní proměnné, k variačnímu počtu, k parciálním diferenciálním rovnicím, ale i k topologii, k teorii míry, a aplikace má např. v teorii pružnosti, v proudění a jinde. Teorie minimálních ploch se často s různými matematickými disciplinami vzájemně ovlivňovala a tento vliv působil na obě složky stimulativně. Uveďme třeba slavný výsledek S. Bernštejna z roku 1916: *Jediná minimální plocha, definovaná na celé rovině x, y, je rovina*; jinými slovy: *Řešení $z = z(x, y)$ rovnice minimální plochy*

$$(1 + z_y^2)\, z_{xx} - 2 z_x z_y z_{xy} + (1 + z_x^2)\, z_{yy} = 0$$

(indexy označují parciální derivování) *definované pro všechna x, y musí být lineární funkce.* Toto tvrzení, připomínající — nikoliv náhodou — Liouvilleovu větu o celistvých funkcích, ukazuje nejen na úzký vztah k teorii funkcí komplexní proměnné, ale charakterizuje v jistém smyslu i rozdíl mezi *lineárními* parciálními diferenciálními rovnicemi (pro něž jsou typické harmonické funkce) a rovnicemi *nelineárními.* A teprve nedávno se podařilo najít odpověď na otázku, zda Bernštejnův výsledek lze ze dvou dimenzí přenést i na vícerozměrný případ: odpověď je positivní pro dimenzi 3, 4, 5, 6 a 7 (léta 1965—1968) a negativní pro dimenzi větší než 7 (rok 1969).

Teorie minimálních ploch se od jiných matematických teorií výrazně odlišuje svým *experimentálním charakterem.* Pokusy s mýdlovými bublinami patřily k arsenálu badatelů v této disciplině již od samého počátku a dodnes patří k oblíbeným atrakcím různých technických muzeí, modely minimálních ploch lze najít ve sbírkách mnohých universit, a autor knihy uvádí mj. i seznam literatury, kde lze najít recepty pro výrobu takových modelů. Rozvinulo se experimentální odvětví této teorie (pro ilustraci název jednoho z článků: „Soap bubbles: Two years old and sixty centimeters in diameter."). Je to tedy disciplina, která rozhodně není suchopárná, kde lze rozvíjet i „kutilské schopnosti" a kde lze brousit vtip pravděpodobně více než v jiných disciplinách (uveďme na ukázku druhý titul jedné z autorových prací: „How to fashion a cheap hat for Giacometti's brother").

Jádro Nitscheho knihy pochopitelně není v takovýchto názorných aspektech teorie minimálních ploch nebo v broušení vtipu. Je to seriózní monografie, představující práci mnoha let, monografie, která chce čtenáře seznámit s rozvojem a stavem jedné bohaté teorie. S prací na rukopisu začal autor v roce 1964 a dokončil jej v roce 1972; o řadě partií přitom přednášel na universitách v Minneapolisu, Hamburku, Vídni a Puerto Ricu. V knize se omezil především na popis reálných dvourozměrných minimálních ploch v trojrozměrném eukleidovském prostoru, tedy — lze-li to tak říci — na klasickou část teorie, i když si všiml i jiných výsledků a nezapomněl ani na moderní vývoj a na souvislost s jinými matematickými disciplinami. Bylo už řečeno, že právě léta sedmdesátá jsou poznamenána dalším bouřlivým rozvojem této teorie; autor se snažil zachytit tento vývoj alespoň potud, že připojil dodatek, zachycující heslovitě stav zhruba do léta roku 1974.

Knihu tvoří devět kapitol a už zmíněný dodatek. Jednotlivé kapitoly nesou tyto názvy: I — Úvod; II — Křivky a plochy; III — Konformní zobrazení minimálních ploch; IV — Pomocné věty z analýzy; V — Problémový okruh Plateauova problému; VI — Obecnější okrajové úlohy; VII — Rovnice minimální plochy; VIII — Úplné minimální plochy; IX — Věty a úlohy. Celý text je členěn do paragrafů, které jsou číslovány průběžně a jichž je celkem 968. Jádro knihy tvoří skoro dvousetstránková kapitola pátá; ke kapitole deváté dodejme, že obsahuje jednak řadu poznámek, tvrzení a doplňků, které nebyly zařazeny do předchozího textu (a které jsou často jen citovány nebo doprovázeny náznakem důkazu), jednak pak seznam neřešených problémů a zajímavých úloh; obě části kapitoly doplňují kapitoly předcházející, zpracované podstatně podrobněji.

Autor psal knihu pro odborníky, kteří se chtějí seznámit se současným stavem problému a případně i se zjednodušeními či zobecněními známých výsledků, ale kniha je vhodná i pro úvod do teorie minimálních ploch a poslouží velmi dobře i nespecialistům (je to vidět konec konců i z názvů některých kapitol). Monografie je zpracována velmi poctivě a svědomitě, lze se v ní díky členění na paragrafy dobře orientovat; velmi užitečný je i seznam literatury, který obsahuje více než 1200 citací, ačkoliv do něj autor zařadil jen ty práce, které v textu skutečně užívá nebo které cituje. Seznam literatury je oproti běžným zvyklostem doplněn vždy údajem o stránce, na níž je daná práce citována; je to velmi užitečný počin, který by si zasloužil všeobecného rozšíření. K čtivosti textu přispívají i četné názorné obrázky, zčásti i barevné, zachycující fotografie modelů různých minimálních ploch.

A tak lze konstatovat, že jde o dílo velmi zdařilé, na němž snad vadí jen jeho enormní rozměr, ztěžující manipulaci a bránící tomu, aby se z monografie stala skutečně příručka (zdá se, že k rozměrnosti publikace přispívá i typ písma, který je asi větší než běžně užívaný). Rozhodně lze knihu doporučit všem skupinám čtenářů: poslouží stejně dobře tomu, kde se chce orientovat v teorii minimálních ploch, i tomu, kdo ji chce podrobně studovat.

Alois Kufner, Praha

S. M. Nikol'skii: APPROXIMATION OF FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES AND IMBEDDING THEOREMS. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1976. VIII + 418 stran. Cena DM 108,—.

V klasifikaci časopisu *Mathematical Reviews* patří studium prostorů funkcí do oddílu Funkcionální analýza, dalo by se však říci, že teorie těchto prostorů tvoří dnes již zcela samostatný oddíl matematiky. Základ k tomuto oddílu položil ve třicátých letech tohoto století S. L. Sobolev, když zavedl prostory $W_p^k(\Omega)$, které nesou jeho jméno. Tyto prostory jsou definovány (pro přirozené k, pro $p \geqq 1$ a pro oblast Ω v n-rozměrném euklidovském prostoru) jako množina těch funkcí na Ω, jejichž derivace (ve smyslu distribucí) až do k-tého řádu včetně jsou integrovatelné v p-té mocnině přes Ω. Studium těchto prostorů, tak důležitých v teorii parciálních diferenciálních rovnic, se brzy rozvinulo, a *věty o vnoření* se staly pojmem. V těchto větách jde — zhruba řečeno — o bližší charakterizaci funkce $u \in W_p^k(\Omega)$ resp. jisté zobecněné restrikce $u|_\omega$ této funkce (tzv. *stopy* funkce u na ω, kde ω je m-rozměrná varieta obsažená v $\overline{\Omega}$, $1 \leqq m < n$); tato charakterizace se opírá o hodnoty parametrů k, p, n a m a také o geometrické vlastnosti oblasti Ω.

Počátkem padesátých let zavedl S. M. Nikolskij prostory $H_p^k(\Omega)$ definované (opět zhruba řečeno) jako množiny funkcí na Ω, jejichž některé parciální derivace splňují Hölderovu podmínku v metrice prostoru $L_p(\Omega)$. Tyto prostory měly velmi podobné vlastnosti jako prostory Sobolevovy, platily pro ně analogické věty o vnoření, měly ovšem tu velkou výhodu, že je bylo lze definovat i pro *necelé* hodnoty parametru k a dokonce pro případ, kdy k byl *vektor* (to byly tzv. *anisotropní* prostory). Koncem padesátých let pak O. V. Besov zavedl prostory $B_{p,\theta}^k(\Omega)$, které zobecňovaly prostory Nikolského: je $H_p^k = B_{p,\infty}^k$. Studium vlastností prostorů H a B bylo — na rozdíl od prostorů Sobolevových — založeno na výsledcích teorie aproximací.

Příbuznost prostorů Nikolského a prostorů Besovových se Sobolevovými prostory vedla ke snaze zavést prostory W_p^k pro obecné kladné k, případně i pro k vektorové. Jednu z možností poskytovaly prostory B, avšak později byly zavedeny tzv. liouvilleovské prostory $L_p^k(R^n)$, založené na zobecnění pojmu derivace pro libovolný reálný řád a na Fourierově transformaci. Tyto prostory jsou přirozenějším „rozšířením" Sobolevových prostorů na případ obecného k, je u nich ovšem podstatné, že funkce jsou definovány na celém prostoru, tj. že $\Omega = R^n$.

O všech těchto prostorech a o dalších modifikacích existuje dnes už nepřehledná řada článků, ale knižního zpracování se ujal teprve S. M. Nikolskij, který v roce 1969 vydal v Moskvě knížku, jejíž překlad je zde posuzován. Protože autor sám přišel k prostorům funkcí prostřednictvím teorie aproximací, zůstal tomuto přístupu věren i ve způsobu zpracování a odráží se to i v názvu knihy. První tři kapitoly mají přípravný charakter: V první jsou nutné informace z funkcionální analýzy, v dalších dvou je pojednáno o trigonometrických polynomech a o celistvých funkcích exponenciálního typu, neboť právě aproximace pomocí funkcí těchto dvou tříd byly podkladem pro studium prostorů H a B. Kapitola čtvrtá, nazvaná „*Třídy funkcí W, H, B*", přináší základní informace o prostorech Sobolevových, Nikolského a Besovových; tyto prostory jsou definovány pro obecnou oblast Ω, ale většina výsledků je v dalším odvozena pro případ $\Omega = R^n$. Kapitola pátá je věnována studiu aproximace funkcí ze zmíněných prostorů a odvození vztahů, které budou potřebné v dalším; kapitola nese název „*Přímé a obrácené věty teorie aproximace. Ekvivalentní normy*" a jde v ní především o odvození vět Bernštejnova a Jacksonova typu. Obsah kapitoly šesté tvoří věty o vnoření pro různé metriky a různé dimenze, kapitola sedmá se zabývá tranzitivností vět o vnoření a nemožností jejich zlepšení a jsou zde uvedena kritéria kompaktnosti. Osmá kapitola je věnována studiu Besselových-MacDonaldových jader, s jejichž pomocí se zde pojednává o isomorfnosti isotropních prostorů. Tato jádra jsou také podstatná při zavedení prostorů L_p^k, jimž je věnována kapitola poslední — devátá. Kniha je doplněna dosti podrobným poznámkovým aparátem, v němž je mj. pojednáno i o problému přenesení výsledků, dokázaných v knize pro případ $\Omega = R^n$, na případ obecné oblasti. Výsledky jsou zde uvedeny bez důkazu a je třeba říci, že problém je podstatně složitější než v případě celého prostoru R^n a vyžaduje nových postupů. Proto je asi vhodné poznamenat, že v roce 1975 vyšla v nakladatelství Nauka v Moskvě kniha O. V. Besova, V. P. Iljina a S. M. Nikolského, věnovaná právě těmto problémům a doplňující tak posuzovanou knihu Nikolského; kniha nese název „*Integrální reprezentace funkcí a věty o vnoření*".

Nikolského kniha je velmi užitečná a obsahuje velké množství materiálu, důležitého jak pro teorii aproximace, tak pro teorii funkcí reálné proměnné a pro teorii parciálních diferenciálních rovnic. Je ovšem třeba říci, že orientace v knize není právě snadná a že se v ní někdy potřebné údaje dosti obtížně hledají. Ale to tkví ve velké míře v podstatě samotné teorie, která je komplikovaná a u níž je přehledné zpracování zvláště obtížné.

Jak už zde bylo řečeno, vyšel ruský originál v roce 1969 a je pravděpodobně většině odborníků a interesentů u nás dobře znám, takže pro naši matematickou obec asi nebude překlad do angličtiny tak důležitý. Pro odborníky ve světě, kteří mají potíže se studiem ruského textu, je ovšem překlad velmi užitečný, a proto lze jeho uskutečnění jen uvítat. Kvalitu překladu nemohu posuzovat, nemohu se však ubránit dojmu, že překladatel (jímž je J. M. DANSKIN) mohl být možná někdy trochu důslednější. Ne vždy totiž odpovídá anglický termín či název odstavce ruskému originálu (např. termín *boundary function* — v originále крайняя функция — není nejšťastnější). Nebo seznam literatury: podle mého názoru by měl být zpracován tak, aby umožnil studium právě tomu čtenáři, který má k disposici především anglicky psanou literaturu; překladatel nejen že někdy necituje existující anglický překlad ruské učebnice, nýbrž ruský originál, ale ve dvou případech dokonce cituje *ruský* překlad *anglického* textu, aniž by připojil údaj o tom, kde byl otištěn text původní. V překladu se čtenář také může dozvědět, že *celé číslo* lze anglicky vyjádřit termínem *whole number* (str. 156).

Nemohu odolat, abych na závěr neocitoval komplimenty, které si autor a překladatel vyměňují v úvodu publikace: Autor říká o překladateli: „... he has showed high qualifications ... as a translator of Russian, which is considered by many to be a very difficult language." Překladatel pak děkuje autorovi, jehož „knowledge of English, which is considered by many to be a very difficult language, is excellent."

Alois Kufner, Praha

L. Collatz, W. Wetterling: OPTIMIZATION PROBLEMS, Translated by P. Wadsacké Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin 1975, X + 356 str., cena DM 33,80.

Překlad knihy, která vyšla pod názvem Optimierungsaufgaben poprvé v roce 1966. Její druh. vydání vyšlo v roce 1971.

Kniha se systematicky zabývá úlohami optimalizace, je v jistém smyslu přehledem hlavních směrů této široké oblasti matematiky, přičemž se v ní klade důraz na jednotící hlediska a vzájemné souvislosti jednotlivých disciplín. Je rozdělena do pěti kapitol. První tři kapitoly jsou věnovány po řadě lineární, konvexní a kvadratické optimalizaci. Čtvrtá kapitola se zabývá Čebyševovskou aproximací a optimalizací a pátá je věnována základům teorie her.

V prvních třech kapitolách jde o minimalizaci funkce $F(x)$, když mají být splněny podmínky $f_j(x) \leqq 0$, $j = 1, \ldots, m$, $x \leqq 0$, kde $x \in R^n$. (Relace $\leqq$ mezi prvky z R^n znamená, že platí tato nerovnost mezi všemi jejich složkami.) Jednotlivé úlohy jsou pojmenovány podle charakteru funkcí $F(x)$, $f_j(x)$, $j = 1, \ldots, m$. Podmínky $f_j(x) \leqq 0$ mohou být nahrazeny podmínkami typu $f_j(x) = 0$. Pro úlohy výše popsaného typu jsou uvedeny základní výsledky (simplexová metoda, duální úlohy, charakterizace minimálních řešení, Kuhnova-Tuckerova věta pro kvadratické úlohy apod.). Vše je zpracováno s velkou péčí a důkladně. Numerické aspekty jednotlivých úloh tvoří nedílnou součást jednotlivých kapitol.

Ve čtvrté kapitole je vyložen přístup k aproximačním úlohám jako k úlohám optimalizace, pátá kapitola pojednává o maticových hrách dvou hráčů s nulovým součtem a o hrách *n* hráčů. Tyto poslední dvě kapitoly mají informační charakter, nejsou tak vyčerpávající jako předchozí. V dodatku je připojena věta o oddělování konvexních množin v R^n a věta o existenci řešení kvadratické optimalizační úlohy. Pozoruhodné je velké množství příkladů z různých oblastí, které velmi vhodně motivují výklad. Jsou to často úlohy, které byly řešeny a použity v praxi (např. optimální využití produkce mléka v Holandsku).

Štefan Schwabik, Praha

Günter Pickert: PROJEKTIVE EBENEN, 2. vydání, Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1975, 371 stran, 67 obrázků, cena DM 98,—.

Jde o druhé vydání díla, vyšlého poprvé v roce 1955, v období, kdy docházelo k prvým završujícím ohraničením tehdy nové discipliny, teorie projektivních rovin. Od té doby došlo k značnému rozvoji této discipliny, v němž též jmenované prvé vydání sehrálo důležitou úlohu jako základní monografie. Nelze ale říci, že by tuto úlohu nemohlo plnit dále, což byl asi také jeden z důvodů druhého vydání. Vzhledem ke kompaktnímu způsobu výkladu látky nebylo autorovi dobře možno činit nějaké obšírnější změny textu; to by pak asi bylo nutno psát novou knihu. Proto se autor zaměřil pouze na zásahy tam, kde pro to byly příčiny věcné či kde se autorem zavedená terminologie z prvého vydání neujala. V případě věcných úprav a doplňků mezer jde především o velmi delikátní záležitosti, jež by zajímaly spíše specialisty oboru (o velikosti autorovy osobnosti svědčí, že i drobná nedopatření z prvého vydání byla podnětem k řadě časopiseckých prací jiných autorů; a to nemluvím o tom, ke kolika pracím vedly přímé podněty autorovy). A tak autor doplnil text k němu se vztahujícími odkazy na literaturu z období po roce 1955 (obšírnější souhrn novější literatury by byl příliš obsáhlý a vzhledem k výběru látky v knize by ani nebyl vhodný) a v závěrečné nečíslované kapitole (Anhang) připojil tři nové paragrafy: o Hughesově koordinatisaci, o Lenzově-Barlottiho klasifikaci projektivních rovin a paragraf s názvem „Ergänzungen", dotýkající se právě některých delikátních záležitostí zmíněných nahoře. Rád bych uzavřel tím, že se teorie projektivních rovin a příbuzných oblastí dnes pěstuje především v USA, NSR, Kanadě, Anglii a Itálii, ale i v řadě zemí dalších; též u nás se touto disciplinou zabývá řada pracovníků a snaží se svými výsledky podpořit její rozvoj.

Václav Havel, Brno