Časopis pro pěstování matematiky

Jan Havrda

Ortogonalita na množinách

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 100 (1975), No. 4, 339--354

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117887`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

ORTOGONALITA NA MNOŽINÁCH

JAN HAVRDA, Praha

(Došlo dne 30. dubna 1974)

1. Tento článek se zabývá studiem a přirozeným zobecněním ortogonality, jak je známa např. z teorie Hilbertova prostoru. Při analýze této problematiky se užívá jazyka teorie svazů a zejména ortomodulárních svazů. Článek je rozdělen do dvou částí, z nichž prvá je pomocného charakteru, druhá je věnována vlastnímu tématu.

2. Je známo mnoho ekvivalentních definicí ortomodulárního svazu. Připomeňme si ty z nich, na něž se budeme v dalším výkladu odvolávat. Především, je-li $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ svaz s ortogonalitou, nazývá se *ortomodulární svaz*, právě když ke každým dvěma prvkům $p, q \in P$, $q \leqq p$, existuje prvek $r \in P$, $r \perp q$ tak, že $p = q \vee r$. Pak např. platí

2.1. Věta. *Buď $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ svaz s ortogonalitou. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

1) *$\mathscr{P}$ je ortomodulární svaz.*

2) *Jsou-li $p, q \in P$, $q \leqq p$, potom $p = q \vee (q^\perp \wedge p)$.*

3) *Jsou-li $p, q \in P$, $q \leqq p$, $q^\perp \wedge p = 0$, potom $p = q$.*

4) *Jsou-li $p, q, r \in P$, $r \leqq q$, $p \leqq q^\perp$, potom $(r \vee p) \wedge q = r$.*

Důkaz. Implikace 2) $\Rightarrow$ 1) je zřejmá. Důkaz implikace 3) $\Rightarrow$ 2) je snadný. Dokážeme implikaci 1) $\Rightarrow$ 3). Nechť $q \leqq p$, $p = q \vee r$, kde $r \perp q$ čili $r \leqq q^\perp$. Jestliže $q^\perp \wedge p = 0$, pak $0 = p \wedge q^\perp = (q \vee r) \wedge q^\perp \geqq (q \wedge q^\perp) \vee (r \wedge q^\perp) = r$. Odtud $p = q$. Nyní dokážeme implikaci 4) $\Rightarrow$ 2). Je-li $q \leqq p$, platí $p^\perp \leqq q^\perp$, $q \leqq q$, takže podle tvrzení 4) máme $(p^\perp \vee q) \wedge q^\perp = p^\perp$ čili $p = q \vee (q^\perp \wedge p)$. Nakonec dokážeme ještě implikaci 2) $\Rightarrow$ 4). Nechť $r \leqq q$, $p \leqq q^\perp$. Potom $q^\perp \leqq r^\perp$ a podle tvrzení 2) máme $r^\perp = q^\perp \vee (q \wedge r^\perp)$ čili $r = q \wedge (q^\perp \vee r)$. Platí také $(r \vee p) \wedge q \leqq$ $\leqq (r \vee q^\perp) \wedge q = r$. Na druhé straně $(r \vee p) \wedge q \geqq (r \wedge q) \vee (p \wedge q) = r$. Tedy vskutku $r = (r \vee p) \wedge q$.

2.2. Důsledek. *Je-li* $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ *ortomodulární svaz, jestliže* $p, q, r, s, t \in P$, $r \leqq q$, $t \leqq q$, $p \leqq q^\perp$, $s \leqq q^\perp$ *a jestliže* $r \vee p = t \vee s$, *pak* $r = t$ *a* $p = s$.

Z rovnosti $(r \vee p) \wedge q = (t \vee s) \wedge q$ a z tvrzení 4) věty 2.1 plyne $r = t$; analogicky z rovnosti $(r \vee p) \wedge q^\perp = (t \vee s) \wedge q^\perp$ plyne $p = s$.

Připomeňme, že je-li $\mathscr{P} = (P, \leqq, 0)$ svaz s nulou 0, prvek $p \in P$ se nazývá atom v $\mathscr{P}$, právě když $p \neq 0$ a jestliže $q \in P$, $q \neq 0$, $q \leqq p$, potom $q = p$. Jestliže ke každému prvku $q \in P$, $q \neq 0$, existuje atom p v $\mathscr{P}$ takový, že $p \leqq q$, nazývá se $\mathscr{P}$ atomický svaz.

2.3. Věta. *Buď* $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ *ortomodulární svaz,* $p \in P$, $0 \neq p \neq 1$; $r_1, r_2 \in P$ *buďte atomy v* $\mathscr{P}$ *takové, že* $r_1 \leqq p$, $r_2 \leqq p^\perp$. *Nechť* $q \in P$, $q \neq 0$, $q \wedge p = q \wedge p^\perp = 0$ *a nechť* $q \leqq r_1 \vee r_2$. *Potom* $r_1 \vee q = r_1 \vee r_2 = q \vee r_2$.

Důkaz rozdělíme na několik částí.

1) Dokážeme, že $(q \vee r_2) \wedge r_1 = (q \vee r_2) \wedge p = (q \vee r_2) \wedge r_2^\perp$ a $(r_1 \vee q) \wedge r_2 = (r_1 \vee q) \wedge p^\perp = (r_1 \vee q) \wedge r_1^\perp$. Protože $r_2 \leqq r_1^\perp$, podle tvrzení 2) věty 2.1 platí $r_1^\perp = r_2 \vee (r_2^\perp \wedge r_1^\perp)$ čili $r_1 = r_2^\perp \wedge (r_1 \vee r_2)$. Nyní $(q \vee r_2) \wedge p \geqq (q \vee r_2) \wedge r_1 = (q \vee r_2) \wedge r_2^\perp \wedge (r_1 \vee r_2) = (q \vee r_2) \wedge r_2^\perp \geqq (q \vee r_2) \wedge p$. Druhé tvrzení se dokáže analogicky.

2) Dokážeme, že $(q \vee r_1) \wedge r_2 = r_2$ a $(q \vee r_2) \wedge r_1 = r_1$. Protože $r_1 \leqq q \vee r_1$ a kdyby $r_1^\perp \wedge (q \vee r_1) = 0$, podle tvrzení 3) věty 2.1 by bylo $r_1 = q \vee r_1$, tedy $q \leqq r_1 \leqq p$, odkud $q \wedge p = q \neq 0$, což však odporuje předpokladu. Podle bodu 1) tohoto důkazu máme tak $0 \neq r_1^\perp \wedge (q \vee r_1) = (q \vee r_1) \wedge r_2 \leqq r_2$. Protože r_2 je atom v $\mathscr{P}$, dostáváme $r_2 = (q \vee r_1) \wedge r_2$. Druhé tvrzení se dokáže analogicky.

3) Dokážeme tvrzení věty. Protože $q \vee r_2 \leqq r_1 \vee r_2$ a protože podle bodu 2) tohoto důkazu platí $(q \vee r_2) \wedge r_1 = r_1$, máme $r_1 \leqq q \vee r_2$, tedy $r_1 \vee r_2 \leqq q \vee r_2$, odkud plyne, že $r_1 \vee r_2 = q \vee r_2$. Zbývající tvrzení se dokáže analogicky.

2.4. Důsledek. *Jsou-li splněny předpoklady věty* 2.3, *potom atomy* r_1, r_2 *jsou určeny jednoznačně.*

Důkaz. Buďte navíc $s_1, s_2 \in P$ atomy v $\mathscr{P}$ takové, že $s_1 \leqq p$, $s_2 \leqq p^\perp$ a nechť $q \leqq s_1 \vee s_2$. Z věty 2.3 pak vyplývají rovnosti $s_1 \vee s_2 = s_1 \vee q$, $r_1 \vee r_2 = r_1 \vee q$. Z těchto rovností dostáváme $s_1 \vee s_2 \vee r_1 = s_1 \vee q \vee r_1$, $r_1 \vee r_2 \vee s_1 = r_1 \vee q \vee s_1$, odkud máme $r_1 \vee s_1 \vee s_2 = r_1 \vee s_1 \vee r_2$. Protože $r_1 \vee s_1 \leqq p$, $r_2 \leqq p^\perp$, podle tvrzení 4) věty 2.1 platí $s_2 = (r_1 \vee s_1 \vee s_2) \wedge p^\perp = (r_1 \vee s_1 \vee r_2) \wedge p^\perp = r_2$. Podobně se dokáže, že $s_1 = r_1$.

2.5. Definice. Nechť $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ je svaz s ortogonalitou. Jestliže ke každému atomu $q \in P$ a ke každému $p \in P$, $0 \neq p \neq 1$, $q \wedge p = q \wedge p^\perp = 0$, existují atomy $r_1, r_2 \in P$, $r_1 \leqq p$, $r_2 \leqq p^\perp$ tak, že $q \leqq r_1 \vee r_2$, pak se svaz $\mathscr{P}$ *nazývá V-svaz.*

Z důsledku 2.4 ihned vyplývá, že pro ortomodulární V-svaz $\mathscr{P}$ platí, že atomy r_1, r_2 z definice 2.5 jsou určeny jednoznačně. Atomický svaz s ortogonalitou $\mathscr{P} =$

$= (P, \leqq, 1, \perp)$ budeme nazývat *A-svaz*. Atomický svaz s ortogonalitou $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$, který je současně V-svaz, budeme nazývat *AV-svaz*.

2.6. Věta. *Nechť $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ je ortomodulární V-svaz. Nechť $r_1, r_2 \in P$ jsou atomy v $\mathscr{P}$ takové, že $r_1 \neq r_2$. Pak existuje atom $r_3 \in P$ takový, že $r_1 \perp r_3$ (čili $r_1 \leqq r_3^\perp$) a platí $r_1 \vee r_2 = r_1 \vee r_3$.*

Důkaz. Jestliže $r_1 \perp r_2$, stačí položit $r_3 = r_2$. Nechť proto nadále neplatí $r_1 \perp r_2$, tedy neplatí $r_2 \leqq r_1^\perp$. Odtud $r_2 \wedge r_1^\perp = 0$ a zřejmě $0 \neq r_1 \neq 1$. Podle definice 2.5 existuje atom $r_3 \leqq r_1^\perp$ tak, že $r_2 \leqq r_1 \vee r_3$. Nyní užitím věty 2.3 dostáváme $r_1 \vee r_2 = r_1 \vee r_3 \, (= r_2 \vee r_3)$.

Podobná dokázané větě je další věta.

2.7. Věta. *Nechť $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ je ortomodulární V-svaz. Nechť $r_1, r_2 \in P$ jsou atomy v $\mathscr{P}$ takové, že $r_1 \perp r_2$. Buď $r_3 \in P$ atom v $\mathscr{P}$ takový, že $r_1 \neq r_3 \neq r_2$ a že $r_3 \leqq r_1 \vee r_2$. Pak existuje v $\mathscr{P}$ atom r_4 tak, že $r_3 \perp r_4$ a platí $r_1 \vee r_2 = r_3 \vee r_4$.*

Důkaz rozdělíme na několik částí.

1) Dokážeme, že neplatí $r_1 \leqq r_3^\perp$ a že neplatí $r_2 \leqq r_3^\perp$. Kdyby totiž $r_1 \leqq r_3^\perp$, pak $r_3 \leqq r_1^\perp$. Protože $r_3 \leqq r_1 \vee r_2$, podle tvrzení 4) a 2) věty 2.1 platí $r_2 = (r_1 \vee r_2) \wedge r_1^\perp = \{r_3 \vee [r_3^\perp \wedge (r_1 \vee r_2)]\} \wedge r_1^\perp \geqq r_3 \vee \{[r_3^\perp \wedge (r_1 \vee r_2)] \wedge r_1^\perp\} \geqq r_3$, což odporuje předpokladu. Podobně, kdyby $r_2 \leqq r_3^\perp$, potom $r_3 \leqq r_2^\perp$ a potom $r_1 = (r_1 \vee r_2) \wedge r_2^\perp = \{r_3 \vee [r_3^\perp \wedge (r_1 \vee r_2)]\} \wedge r_2^\perp \geqq r_3 \vee \{[r_3^\perp \wedge (r_1 \vee r_2)] \wedge r_2^\perp\} \geqq r_3$, což také odporuje předpokladu.

2) Protože $r_1 \wedge r_3 = 0 = r_1 \wedge r_3^\perp$, $0 \neq r_3 \neq 1$, podle definice 2.5 existuje atom $r_4 \leqq r_3^\perp$ tak, že $r_1 \leqq r_3 \vee r_4$. Protože $r_2 \wedge r_3 = 0 = r_2 \wedge r_3^\perp$, podle definice 2.5 existuje atom $r_5 \leqq r_3^\perp$ tak, že $r_2 \leqq r_3 \vee r_5$. Podle věty 2.3 platí $r_1 \vee r_3 = r_3 \vee r_4 = r_1 \vee r_4$, $r_2 \vee r_3 = r_3 \vee r_5 = r_2 \vee r_5$. Odtud plyne $r_1 \vee r_2 = r_1 \vee r_2 \vee r_3 = r_3 \vee r_4 \vee r_5 \, (= r_1 \vee r_2 \vee r_4 \vee r_5)$.

3) Dokážeme, že $r_1 \vee r_3 = r_2 \vee r_3$ a že $r_4 = r_5$ a tím bude důkaz proveden. Platí $r_3 \leqq r_1 \vee r_2$, $r_1 \leqq r_1$, $r_2 \leqq r_1^\perp$, $r_3 \wedge r_1 = 0$ a podle bodu 1) tohoto důkazu též $r_3 \wedge r_1^\perp = 0$. Podle věty 2.3 pak $r_1 \vee r_3 = r_1 \vee r_2 = r_2 \vee r_3$. Podle bodu 2) tohoto důkazu však platí $r_1 \vee r_3 = r_3 \vee r_4$, $r_2 \vee r_3 = r_3 \vee r_5$, tedy $r_3 \vee r_4 = r_3 \vee r_5$. Užitím tvrzení 4) věty 2.1 dostáváme $r_4 = (r_3 \vee r_4) \wedge r_3^\perp = (r_3 \vee r_5) \wedge r_3^\perp = r_5$.

2.8. Věta. *Nechť $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ je úplný ortomodulární svaz, $p \in P$, $0 \neq p \neq 1$. Nechť $q \in P$ je takový atom v $\mathscr{P}$, že neplatí $q \leqq p$ a neplatí $q \leqq p^\perp$. Nechť $\{(r_i, s_i) : i \in I\}$ je systém všech $r_i \in P$, $s_i \in P$, $r_i \leqq p$, $s_i \leqq p^\perp$ takových, že $q \leqq r_i \vee s_i$. Pak mezi r_i, $i \in I$ resp. s_i, $i \in I$ existuje nejmenší prvek r_0 resp. s_0 tak, že $q \leqq r_0 \vee s_0$. Přitom $r_0 = (q \vee p^\perp) \wedge p$, $s_0 = (q \vee p) \wedge p^\perp$.*

Důkaz. Množina I je neprázdná, neboť pro $r_i = p$, $s_i = p^\perp$ máme $q \leqq p \vee p^\perp$.

1) Dokážeme, že $\bigwedge_{i\in I}(r_i \vee p^\perp) = (\bigwedge_{i\in I} r_i) \vee p^\perp$, $\bigwedge_{i\in I}(p \vee s_i) = p \vee (\bigwedge_{i\in I} s_i)$. Podle tvrzení 2) věty 2.1 z nerovnosti $p^\perp \leqq r_i^\perp$ vyplývá, že pro všechna $i \in I$ platí $r_i^\perp = p^\perp \vee (p \wedge r_i^\perp)$. Odtud $(\bigvee_{i\in I} r_i^\perp) \wedge p = [p^\perp \vee \bigvee_{i\in I}(p \wedge r_i^\perp)] \wedge p = \bigvee_{i\in I}(p \wedge r_i^\perp)$, kde poslední rovnost plyne opět z tvrzení 2) věty 2.1 a toho, že $\bigvee_{i\in I}(p \wedge r_i^\perp) \leqq p$. Tím je prvé tvrzení dokázáno. Protože dále $s_i \leqq p^\perp$, platí podobně $s_i = p^\perp \wedge (s_i \vee p)$ pro všechna $i \in I$. Odtud $(\bigwedge_{i\in I} s_i) \vee p = [p^\perp \wedge \bigwedge_{i\in I}(s_i \vee p)] \vee p = \bigwedge_{i\in I}(s_i \vee p)$, neboť $p \leqq \bigwedge_{i\in I}(s_i \vee p)$.

2) Označme $t = \bigwedge_{i\in I}(r_i \vee s_i)$. Dokážeme, že $p \wedge (p \wedge t)^\perp \leqq t^\perp$ a $p^\perp \wedge (p^\perp \wedge t)^\perp \leqq t^\perp$. Podle tvrzení 4) věty 2.1 platí $p \wedge t = \bigwedge_{i\in I} r_i$ a $p^\perp \wedge t = \bigwedge_{i\in I} s_i$. Zřejmě $t = \bigwedge_{i\in I}(r_i \vee s_i) \leqq \bigwedge_{i\in I}(r_i \vee p^\perp) = (\bigwedge_{i\in I} r_i) \vee p^\perp$, kde poslední rovnost platí podle bodu 1) tohoto důkazu. Prvé tvrzení je dokázáno. Dále $t = \bigwedge_{i\in I}(r_i \vee s_i) \leqq \bigwedge_{i\in I}(p \vee s_i) = p \vee (\bigwedge_{i\in I} s_i) = p \vee (p^\perp \wedge t)$.

3) Dokážeme, že $p \leqq t^\perp \vee (t \wedge p)$ a $p^\perp \leqq t^\perp \vee (t \wedge p^\perp)$. Podle tvrzení 2) věty 2.1 z nerovnosti $t \wedge p \leqq p$ vyplývá $p = (t \wedge p) \vee [(t \wedge p)^\perp \wedge p] \leqq (t \wedge p) \vee t^\perp$, kde poslední nerovnost platí podle části 2) tohoto důkazu. Podobně $t \wedge p^\perp \leqq p^\perp$, takže $p^\perp = (t \wedge p^\perp) \vee [(t \wedge p^\perp)^\perp \wedge p^\perp] \leqq (t \wedge p^\perp) \vee t^\perp$.

4) Dokážeme, že $t = (t \wedge p) \vee (t \wedge p^\perp)$. Podle části 3) tohoto důkazu máme $t = (p \vee p^\perp) \wedge t \leqq [t^\perp \vee (t \wedge p) \vee (t \wedge p^\perp)] \wedge t$. Je zřejmé, že $(t \wedge p) \vee (t \wedge p^\perp) \leqq t$ a podle tvrzení 2) věty 2.1 a podle právě dokázaného proto platí $(t \wedge p) \vee (t \wedge p^\perp) = t \wedge [t^\perp \vee (t \wedge p) \vee (t \wedge p^\perp)] \geqq t$, tedy tvrzení platí.

5) Protože $q \leqq \bigwedge_{i\in I}(r_i \vee s_i) = t = (t \wedge p) \vee (t \wedge p^\perp) = (\bigwedge_{i\in I} r_i) \vee (\bigwedge_{i\in I} s_i)$, stačí položit $r_0 = t \wedge p = \bigwedge_{i\in I} r_i$, $s_0 = t \wedge p^\perp = \bigwedge_{i\in I} s_i$ a prvé tvrzení věty je dokázáno.

6) Označme $u = (q \vee p^\perp) \wedge p$, $v = (q \vee p) \wedge p^\perp$. Dokážeme, že $u \leqq r_0$, $v \leqq s_0$. Platí $q \leqq \bigwedge_{i\in I}(r_i \vee s_i) = t$. Podle části 1) tohoto důkazu pak $q \vee p^\perp \leqq t \vee p^\perp \leqq \bigwedge_{i\in I}(r_i \vee s_i \vee p^\perp) = \bigwedge_{i\in I}(r_i \vee p^\perp) = r_0 \vee p^\perp$. Podle tvrzení 4) věty 2.1 odtud plyne $u = (q \vee p^\perp) \wedge p \leqq (r_0 \vee p^\perp) \wedge p = r_0$. Zcela analogicky $q \leqq t$, tedy $q \vee p \leqq t \vee p \leqq \bigwedge_{i\in I}(p \vee s_i) = p \vee s_0$, takže $v = (q \vee p) \wedge p^\perp \leqq (p \vee s_0) \wedge p^\perp = s_0$.

7) Dokážeme, že $(u \vee p^\perp) \wedge (v \vee p) = u \vee v$. Protože $v \leqq p^\perp$, podle tvrzení 2) věty 2.1 platí $p^\perp = v \vee (v^\perp \wedge p^\perp) = v \vee (v \vee p)^\perp$. Odtud dostáváme $(u \vee p^\perp) \wedge (v \vee p) = [u \vee v \vee (v \vee p)^\perp] \wedge (v \vee p) = u \vee v$, kde poslední rovnost platí na základě toho, že $u \vee v \leqq p \vee v$ a na základě tvrzení 2) věty 2.1.

8) Dokážeme, že $q \leqq u \vee v$. Platí $p \leqq q \vee p$, $p^{\perp} \leqq q \vee p^{\perp}$, podle tvrzení 2) věty 2.1 je tudíž $q \vee p = p \vee [p^{\perp} \wedge (q \vee p)] = p \vee v$, $q \vee p^{\perp} = p^{\perp} \vee [p \wedge \wedge (q \vee p^{\perp})] = p^{\perp} \vee u$. Zřejmě $q \leqq (q \vee p^{\perp}) \wedge (q \vee p) = (p^{\perp} \vee u) \wedge (p \vee v) = = u \vee v$, kde poslední rovnost platí podle části 7) tohoto důkazu.

9) Protože $u \leqq p$, $v \leqq p^{\perp}$ a protože $q \leqq u \vee v$, podle prvého tvrzení dokazované věty platí $r_0 \leqq u$, $s_0 \leqq v$. Podle části 6) tohoto důkazu pak dostáváme $r_0 = u$, $s_0 = v$.

Věta je dokázána.

2.9. Důsledek. *Nechť $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ je úplný ortomodulární svaz. Pak $\mathscr{P}$ je V-svaz tehdy a jen tehdy, když pro livobolné $p \in P$, $0 \neq p \neq 1$ a libovolný atom $q \in P$ takový, že neplatí $q \leqq p$ a neplatí $q \leqq p^{\perp}$, jsou $(q \vee p^{\perp}) \wedge p$ a $(q \vee p) \wedge p^{\perp}$ atomy v $\mathscr{P}$.*

2.10. Poznámka. Předpokládejme nyní, že $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ je úplný ortomodulární A-svaz. Buď $0 \neq p \in P$. Existuje atom $r_1 \in P$ tak, že $r_1 \leqq p$. Jestliže $r_1^{\perp} \wedge p = 0$, podle tvrzení 3) věty 2.1 pak $r_1 = p$. Nechť dále $0 \neq r_1^{\perp} \wedge p$. Existuje pak atom $r_2 \in P$ tak, že $r_2 \leqq r_1^{\perp} \wedge p$, tedy $r_1 \perp r_2$ a $r_2 \leqq p$. Tudíž $r_1 \vee r_2 \leqq p$. Jestliže $(r_1 \vee r_2)^{\perp} \wedge p = 0$, je jako dříve $r_1 \vee r_2 = p$. Jestliže $0 \neq (r_1 \vee r_2)^{\perp} \wedge p$, existuje atom $r_3 \in P$ tak, že $r_3 \leqq (r_1 \vee r_2)^{\perp} \wedge p$, tedy $r_3 \leqq p$ a $r_3 \leqq r_1^{\perp} \wedge r_2^{\perp}$ čili $r_3 \perp r_1$, $r_3 \perp r_2$. Ze Zornova lemmatu snadno vyplývá, že existuje maximální (vzhledem k množinové inkluzi) množina $\{r_i : i \in I\}$ po dvou ortogonálních atomů taková, že pro všechna $i \in I$ platí $r_i \leqq p$. Potom $p = \bigvee_{i \in I} r_i$. Kdyby totiž tomu tak nebylo, pak $\bigvee_{i \in I} r_i \leqq p$ a $0 \neq (\bigvee_{i \in I} r_i)^{\perp} \wedge p$. Popsaným již postupem bychom pak zjistili, že množina $\{r_i : i \in I\}$ není maximální.

2.11. Definice. Buď $\mathscr{P} = (P, \leqq, 0)$ svaz. Buďte $p, q \in P$. Říkáme, že *q pokrývá p*, píšeme $p \prec q$, jestliže $p \neq q$ a jestliže z toho, že $r \in P$, $p \leqq r \leqq q$, vyplývá, že buď $p = r$ nebo $r = q$. Jestliže pro každé $p \in P$ a každý atom $q \in P$ takový, že $p \wedge q = 0$ platí $p \prec p \vee q$, pak se svaz $\mathscr{P}$ nazývá *C-svaz*.

Je-li svaz s ortogonalitou $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ A-svaz a současně C-svaz, nazýváme jej *AC-svazem*.

2.12. Věta. *Nechť $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ je úplný ortomodulární svaz. Pak $\mathscr{P}$ je V-svaz tehdy a jen tehdy, když $\mathscr{P}$ je C-svaz.*

Důkaz. Nechť $\mathscr{P}$ je V-svaz, nechť $p \in P$, $q \in P$ buď atom v $\mathscr{P}$ takový, že $p \wedge q = 0$. Potom $p \neq p \vee q$ a $p \neq 1$. Je-li $p = 0$, je tvrzení zřejmé. Nechť proto $p \neq 0$. Buď $r \in P$, $p \leqq r \leqq p \vee q$ a nechť $p \neq r$. Platí

$$0 \neq p^{\perp} \wedge r \leqq p^{\perp} \wedge (p \vee q) = \begin{cases} q, \text{ je-li } q \leqq p^{\perp} \text{ podle tvrzení 4) věty 2.1} \\ \text{atom v } \mathscr{P}, \text{ je-li } q \wedge p^{\perp} = 0 \text{ podle důsledku 2.9.} \end{cases}$$

Odtud vyplývá, že $p^\perp \wedge r = p^\perp \wedge (p \vee q)$ a tento prvek je atom v $\mathscr{P}$. Protože $p \leqq r$, podle tvrzení 2) věty 2.1 máme $r = p \vee (p^\perp \wedge r) = p \vee [p^\perp \wedge (p \vee q)] = p \vee q$, neboť také $p \leqq p \vee q$. Je tudíž $\mathscr{P}$ C-svaz.

Nechť naopak $\mathscr{P}$ je C-svaz. Buď $p \in P$, $0 \neq p \neq 1$, $q \in P$ buď atom v $\mathscr{P}$ takový, že $p \wedge q = p^\perp \wedge q = 0$. Podle definice 2.11 platí $p \prec p \vee q$, $p^\perp \prec p^\perp \vee q$, odkud podle tvrzení 3) věty 2.1 máme $p^\perp \wedge (p \vee q) \neq 0 \neq p \vee (p^\perp \wedge q)$. Nechť $r \in P$, $0 \neq r \leqq p \wedge (p^\perp \vee q)$. Protože $r \leqq p^\perp \vee q$, platí $p^\perp \leqq r \vee p^\perp \leqq p^\perp \vee q$, Protože $\mathscr{P}$ je C-svaz platí, že buď $p^\perp = r \vee p^\perp$ nebo $r \vee p^\perp = p^\perp \vee q$. Kdyby $p^\perp = r \vee p^\perp$, bylo by $r \leqq p^\perp$ a protože $r \leqq p$, dostali bychom $r = 0$, což je ve sporu s předpokladem. Tedy $r \vee p^\perp = p^\perp \vee q$. Z nerovnosti $r \leqq p$ a z tvrzení 2) věty 2.1 plyne $r = p \wedge (r \vee p^\perp) = p \wedge (p^\perp \vee q)$ a proto tento prvek je atom v $\mathscr{P}$. Podobně se dokáže, že také $p^\perp \wedge (p \vee q)$ je atom v $\mathscr{P}$. Podle důsledku 2.9 je $\mathscr{P}$ V-svaz.

3. Zde zavedeme definicí 3.1 základní pojem tohoto článku. Budeme uvažovat množinu Ω, o níž nadále budeme předpokládat, že je neprázdná. Na této množině zavedeme binární relaci $\perp$, kterou budeme nazývat ortogonalita a jejíž vlastnosti ne náhodou připomínají naše představy o kolmosti úseček např. v rovině.

3.1. Definice. Buď Ω daná množina a nechť je na ní definována binární relace $\perp$, splňující následující požadavky:

a) Jestliže $x, y \in \Omega$, $x \perp y$, potom $y \perp x$.

b) Existuje prvek $o \in \Omega$ tak, že pro všechna $x \in \Omega$ platí $o \perp x$.

c) Jestliže pro $x \in \Omega$ platí $x \perp x$, potom $x = o$.

Pak říkáme, že na množině Ω je definována *ortogonalita* $\perp$, což budeme zapisovat ve tvaru $(\Omega, \perp)$. O prvcích $x, y \in \Omega$, pro které platí $x \perp y$, budeme říkat, že jsou *ortogonální.*

Buď $x \in \Omega$, $\emptyset \neq A \subset \Omega$. Definujeme $x \perp A$, právě když $x \perp y$ pro všechna $y \in A$. Označme $A^\perp = \{x \in \Omega : x \perp A\}$.

Snadno nahlédneme, že platí

3.2. Lemma. *Buď dáno* $(\Omega, \perp)$. *Potom*

1) $\{o\}^\perp = \Omega$; $\Omega^\perp = \{o\}$.

2) *Jestliže* $\emptyset \neq A \subset \Omega$, *potom* $o \in A^\perp$.

3) *Jestliže* $\emptyset \neq A \subset \Omega$, *potom* $A \subset (A^\perp)^\perp = A^{\perp\perp}$ *(označení).*

4) *Jestliže* $A, B \subset \Omega$, $\emptyset \neq A \subset B$, *potom* $B^\perp \subset A^\perp$.

5) *Jestliže* $\emptyset \neq A \subset \Omega$, *potom* $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$.

Označme $S = \{A \subset \Omega : \emptyset \neq A = A^{\perp\perp}\}$, $T = \{A^\perp : \emptyset \neq A \subset \Omega\}$.

3.3. Věta. *Platí:*

1) $S = T$.

2) $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ *je úplný svaz s ortogonalitou. Přitom pro* $A_i \in S$, $i \in I$ *platí* $\bigwedge_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i$, $\bigvee_{i \in I} A_i = (\bigcap_{i \in I} A_i^{\perp})^{\perp}$ *a dále* $0 = \{o\}$, $1 = \Omega$.

Důkaz. 1) Je-li $A \in S$, je $A = (A^{\perp})^{\perp} = B^{\perp}$, kde $B = A^{\perp} \neq \emptyset$. Tedy $A \in T$. Je-li $A \in T$, je $A = B^{\perp}$, kde $\emptyset \neq B \subset \Omega$. Podle tvrzení 5) lemmatu 3.2 platí $A^{\perp\perp} = B^{\perp\perp\perp} = B^{\perp} = A$, tedy $A \in S$, 2) Podle 1) lemmatu 3.2 platí $\{o\} \in S$, $\Omega \in S$ a podle 2) lemmatu 3.2 je $\{o\}$ v $\mathscr{S}$ nejmenší prvek, Ω je zřejmě v $\mathscr{S}$ největší prvek. Dále pro $A \in S$ v důsledku podmínky c) definice 3.1 platí, že $A \cap A^{\perp} = \{o\}$.

Jestliže I je neprázdná množina indexů a $A_i \in S$ pro $i \in I$, dokážeme, že $\bigcap_{i \in I} A_i \in S$, tedy $\bigwedge_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i$. Jednak v důsledku 3) lemmatu 3.2 platí $\bigcap_{i \in I} A_i \subset (\bigcap_{i \in I} A_i)^{\perp\perp}$. Dále $\bigcap_{i \in I} A_i \subset A_j$ pro $j \in I$, tedy podle 4) lemmatu 3.2 je $A_j^{\perp} \subset (\bigcap_{i \in I} A_i)^{\perp}$, odkud $(\bigcap_{i \in I} A_i)^{\perp\perp} \subset A_j^{\perp\perp} = A_j$ pro $j \in I$, tedy $(\bigcap_{i \in I} A_i)^{\perp\perp} \subset \bigcap_{j \in I} A_j$.

Jestliže opět I je neprázdná množina indexů, dokážeme, že pro $A_i \in S$, $i \in I$ platí $\bigvee_{i \in I} A_i = (\bigcap_{i \in I} A_i^{\perp})^{\perp}$. Platí $\bigcap_{i \in I} A_i^{\perp} \subset A_j^{\perp}$, $j \in I$, tedy $A_j = A_j^{\perp\perp} \subset (\bigcap_{i \in I} A_i^{\perp})^{\perp}$ pro $j \in I$. Je-li dále $A \in S$ a $A_i \subset A$ pro $i \in I$, potom $A^{\perp} \subset A_i^{\perp}$, $i \in I$, tedy $A^{\perp} \subset \bigcap_{i \in I} A_i^{\perp}$, odkud $(\bigcap_{i \in I} A_i^{\perp})^{\perp} \subset A^{\perp\perp} = A$.

Jestliže $A \in S$, pak $A \vee A^{\perp} = (A^{\perp} \cap A)^{\perp} = \{o\}^{\perp} = \Omega$.

3.4. Poznámka. Je-li dáno $(\Omega, \perp)$, indukovaný úplný svaz $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ a $\emptyset \neq A \subset \Omega$, pak v $\mathscr{S}$ existuje nejmenší prvek B takový, že $A \subset B$. Buď $\{A_i : A \subset A_i$ $A_i \in S$, $i \in I\}$. Tento systém obsahuje např. Ω. Platí $A_i^{\perp} \subset A^{\perp}$ pro $i \in I$, odtud $\bigvee_{i \in I} A_i^{\perp} \subset A^{\perp}$, z čehož $A^{\perp\perp} \subset (\bigvee_{i \in I} A_i^{\perp})^{\perp} = \bigcap_{i \in I} A_i = B$. Protože $A \subset A^{\perp\perp}$, platí $B \subset$ $\subset A^{\perp\perp}$, tudíž $B = A^{\perp\perp}$.

3.5. Poznámka. Buď dáno $(\Omega, \perp)$, indukovaný svaz $\mathscr{S}$ buď $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$. Nechť $A, B \in S$. Potom $A \perp B$ (čili $A \subset B^{\perp}$) tehdy a jen tehdy, když pro všechna $x \in A$ a všechna $y \in B$ platí $x \perp y$. Snadno též nahlédneme, že jestliže $A_i \in S$ pro $i \in I$, $x \perp A_i$ pro $i \in I$ a $y \in \bigvee_{i \in I} A_i$, potom $x \perp y$.

3.6. Věta. *Buď dána množina* Ω, $o \in \Omega$. *Buď* $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ *úplný svaz s ortogonalitou podmnožin množiny* Ω *takový, že:*

1) $\{o\}$ *je v* $\mathscr{S}$ *nejmenší prvek.*

2) *Je-li* I *neprázdná množina indexů,* $A_i \in S$ *pro* $i \in I$, *potom* $\bigwedge_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i$.

Pro $x, y \in \Omega$ kladme $x \top y$ právě když existuje $A \in S$ tak, že $x \in A$ a $y \in A^{\perp}$. Potom relace $\top$ je ortogonalita na Ω a jí indukovaný úplný svaz s ortogonalitou $(T, \subset, \Omega, \top)$ je shodný s $\mathcal{S}$.

Důkaz. Ukážeme, že relace $\top$ vyhovuje definici 3.1 Axiom a) vyplývá z toho, že pro $A \in S$ platí $A^{\perp\perp} = A$. Axiom b) plyne z předpokladu 1) dokazované věty. Axiom c) plyne z toho, že pro $A \in S$ platí $A \cap A^{\perp} = \{o\}$.

Nyní dokážeme, že $S = T$. Buď $C \in S$; protože $C^{\perp} \in S$, pro všechna $x \in C$ a všechna $y \in C^{\perp}$ platí $x \top y$. Odtud vyplývá, že $C^{\perp} \subset C^{\top}$. Buď $y_0 \in C^{\top}$, tedy pro všechna $x \in C$ platí $x \top y_0$. Ke každému $x \in C$ existuje $A_x \in S$ tak, že $x \in A_x$ a $y_0 \in A_x^{\perp}$. Odtud $y_0 \in \bigcap_{x \in C} A_x^{\perp}$. Dále $C \subset \bigcup_{x \in C} A_x \subset \bigvee_{x \in C} A_x = (\bigcap_{x \in C} A_x^{\perp})^{\perp}$, odkud $y_0 \in \bigcap_{x \in C} A_x^{\perp} \subset C^{\perp}$ čili $C^{\top} \subset C^{\perp}$, tedy $C^{\perp} = C^{\top} \in T$. Buď nyní naopak $C \in T$. Existuje nejmenší prvek $A \in S$ tak, že $C \subset A$. Potom $A^{\perp} = A^{\top} \subset C^{\top}$. Buď $y_0 \in C^{\top}$. Tedy $y_0 \top x$ pro všechna $x \in C$. Proto ke každému $x \in C$ existuje $A_x \in S$ tak, že $x \in A_x$ a $y_0 \in A_x^{\perp}$, z čehož vyplývá, že $y_0 \in \bigcap_{x \in C} A_x^{\perp}$. Dále $C \subset \bigcup_{x \in C} A_x \subset \bigvee_{x \in C} A_x = (\bigcap_{x \in C} A_x^{\perp})^{\perp} \in S$. Proto $A \subset (\bigcap_{x \in C} A_x^{\perp})^{\perp}$, takže $y_0 \in \bigcap_{x \in C} A_x^{\perp} \subset A^{\perp}$ a tudíž $C^{\top} \subset A^{\perp}$. Proto $C^{\top} = A^{\perp}$, odkud $A = (C^{\top})^{\perp} = (C^{\top})^{\top} = C$ a tím je věta dokázána.

3.7. Poznámka. Buď dáno $(\Omega, \perp)$. Jsou-li $x, y \in \Omega$ a $x \perp y$, položme $R(x, y) = 0$, jestliže neplatí $x \perp y$ (budeme psát $x \not\perp y$), položme $R(x, y) = 1$. Potom takto definované zobrazení $R : \Omega \times \Omega \to G$, kde G značí množinu komplexních čísel, má tyto základní vlastnosti:

a) Pro všechna $x, y \in \Omega$ platí $R(x, y) = \overline{R(y, x)}$ (pruh značí číslo komplexně sdružené).

b) $R(o, o) = 0$; pro každé $x \in \Omega$, $x \neq o$ platí $R(x, x) > 0$.

c) Pro všechna $x, y \in \Omega$ platí $|R(x, y)|^2 \leqq R(x, x)\, R(y, y)$.

Z vlastností c) a b) ihned vyplývá, že pro všechna $x \in \Omega$ platí $R(o, x) = R(x, o) = 0$.

Zobrazení $R : \Omega \times \Omega \to G$, které má vlastnosti a), b), c), nazveme kvaziskalárním součinem a dvojici (Ω, R) prostorem s kvaziskalárním součinem. Je-li naopak dán prostor (Ω, R), potom pro $x, y \in \Omega$ definujme $x \perp y$, právě když $R(x, y) = 0$. Pak je na množině Ω definována ortogonalita. Kdybychom pro $x, y \in \Omega$ kladli $x \perp y$, právě když $\operatorname{Re} R(x, y) \leqq 0$, na množině Ω je opět definována (ovšem tentokráte jiná) ortogonalita.

Jestliže např. (Ω, ϱ) je metrický prostor, $o \in \Omega$, pak zobrazení $R : \Omega \times \Omega \to G$ definované pro $x, y \in \Omega$ rovností $R(x, y) = \varrho^2(o, x) - \varrho^2(x, y) + \varrho^2(y, o)$, je kvaziskalární součin.

Jestliže Ω je Hilbertův prostor, R skalární součin (R je samozřejmě též kvaziskalární součin) a klademe-li pro $x, y \in \Omega$, $x \perp y$ právě když $R(x, y) = 0$, indukovaný svaz $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ je dobře známý úplný ortomodulární AV-svaz (podle věty 2.12 též AC-svaz). Klademe-li však pro $x, y \in \Omega$ $x \perp y$ právě když $\operatorname{Re} R(x, y) \leqq 0$, indukovaný svaz $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ je úplný AV-svaz, jehož nosič S je tvořen právě všemi uzavřenými konvexními kuželi s vrcholem v počátku (viz práci [1]); tento svaz není ortomodulární a není C-svazem.

Poslední dva příklady svazů $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ jsou A-svazy a dokonce pro každé $x \in \Omega$, $x \neq o$, platí, že $\{x\}^{\perp\perp}$ je atom v $\mathscr{S}$. Platí

3.8. Věta. *Buď dáno $(\Omega, \perp)$, nechť $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$. Jestliže $A \in S$ je atom v $\mathscr{S}$, $x \in A$, $x \neq o$, potom $\{x\}^{\perp\perp} = A$.*

Důkaz. Protože $x \in \{x\}^{\perp\perp}$, platí $\{x\}^{\perp\perp} \neq \{o\}$. Dále $\{x\} \subset A$, tedy $A^{\perp} \subset \{x\}^{\perp}$, odkud $\{x\}^{\perp\perp} \subset A$, proto $\{x\}^{\perp\perp} = A$.

Existují však svazy $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$, které nejsou atomické.

3.9. Příklad. Nechť $\Omega = \{o, \ldots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \ldots, \ldots, \tau_{-1}, \tau_0, \tau_1, \ldots\}$ a nechť $o \perp x$ pro všechna $x \in \Omega$ a dále $\omega_i \perp \tau_j$ pro všechna $j \leqq i$, i celé. Potom $S = \{\{o\}, \Omega; \ldots \ldots; \{o, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \ldots\}, \{\ldots, \tau_{-2}, \tau_{-1}, o\}; \{o, \omega_0, \omega_1, \ldots\}, \{\ldots, \tau_{-1}, \tau_0, o\}; \{o, \omega_1, \omega_2, \ldots\}, \{\ldots, \tau_{-1}, \tau_0, \tau_1, o\}; \ldots\}$. Zde svaz $\mathscr{S}$ neobsahuje ani jeden atom.

3.10. Věta. *Buď dáno $(\Omega, \perp)$, $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

1) *$\mathscr{S}$ je atomický svaz.*

2) *Ke každé podmnožině $B \subset \Omega$, $B \neq \emptyset$, $B^{\perp} \neq \{o\}$, existuje $x \in B^{\perp}$, $x \neq o$ tak, že pro všechna $y \in \{x\}^{\perp\perp}$, $y \neq o$ platí $\{y\}^{\perp} \subset \{x\}^{\perp}$.*

Důkaz. Dokážeme implikaci 1) $\Rightarrow$ 2). Buď $\emptyset \neq B \subset \Omega$, $B^{\perp} \neq \{o\}$. Potom $B^{\perp} \in S$ a existuje atom A v $\mathscr{S}$ tak, že $A \subset B^{\perp}$. Existuje $x \in A$, $x \neq o$. Podle věty 3.8 platí $\{x\}^{\perp\perp} = A$, platí též $x \in B$. Opět podle věty 3.8 pro každé $y \in \{x\}^{\perp\perp}$, $y \neq o$ platí též $\{y\}^{\perp\perp} = \{x^{\perp\perp}\}$ čili $\{y\}^{\perp} = \{x\}^{\perp}$, tedy $\{y\}^{\perp} \subset \{x\}^{\perp}$.

Dokážeme implikaci 2) $\Rightarrow$ 1). Buď $C \in S$, $C \neq \{o\}$. Existuje $B \subset \Omega$, $B \neq \emptyset$ tak, že $C = B^{\perp}$, Nechť $x \in B^{\perp}$, $x \neq o$ vyhovuje předpokladu. Zřejmě $\{o\} \neq \{x\}^{\perp\perp} \subset C$. Dokážeme, že $\{x\}^{\perp\perp} \in S$ je atom v $\mathscr{S}$. Buď $A \in S$, $A \neq \{o\}$, $A \subset \{x\}^{\perp\perp}$ a nechť $y \in A$, $y \neq o$. Potom $\{x\}^{\perp} \subset A^{\perp} \subset \{y\}^{\perp}$. Protože $y \in \{x\}^{\perp\perp}$ a protože podle předpokladu $\{y\}^{\perp} \subset \{x\}^{\perp}$, dostáváme $\{x\}^{\perp} = A^{\perp} = \{y\}^{\perp}$, tedy $\{x\}^{\perp\perp} = A$.

3.11. Příklad. Buď $\Omega = \{o, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ a nechť $o \perp \omega_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, 5$, $\omega_1 \perp \omega_2 \perp \omega_3 \perp \omega_4 \perp \omega_5$. Potom $S = \{\{o\}, \Omega;\ \{o, \omega_2\}, \{o, \omega_1, \omega_3\};\ \{o, \omega_3\}, \{o, \omega_2, \omega_4\};\ \{o, \omega_4\}, \{o, \omega_3, \omega_5\}\}$. Svaz $\mathscr{S}$ je zde atomický, avšak např. $\{\omega_1\}^{\perp\perp} = \{o, \omega_1, \omega_3\}$ není atom v $\mathscr{S}$.

Formulujeme následující axiom

Axiom A. Buď dáno $(\Omega, \perp)$. nechť $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$. Pro každé $x \in \Omega$, $x \neq o$, je $\{x\}^{\perp\perp}$ atom v $\mathscr{S}$.

Zřejmě svaz $\mathscr{S}$ splňující axiom A je A-svaz.

3.12. Věta. *Nechť je dáno $(\Omega, \perp)$, svaz $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ nechť splňuje axiom* A. *Buď $A \in S$, $x \in \Omega$, $x \neq o$. Potom $A \cap \{x\}^{\perp\perp} = \{o\}$ tehdy a jen tehdy, když $x \notin A$.*

Důkaz snadno plyne z věty 3.8.

3.13. Věta. *Buď dáno $(\Omega, \perp)$, $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ nechť splňuje axiom* A. *Označme $\mathscr{A}$ resp. $\mathscr{B}$ množinu všech atomů resp. antiatomů svazu $\mathscr{S}$. Potom platí:*

1) *Je-li $A \in S$, $A \neq \{o\}$ a jestliže $\{A_i\}$, $i \in I$ je systém všech atomů v $\mathscr{S}$ takových, že $A_i \subset A$, $i \in I$, potom $A = \bigvee_{i \in I} A_i$.*

2) *Je-li $A \in S$, $A \neq \Omega$ a jestliže $\{B_j\}$, $j \in J$ je systém všech antiatomů v $\mathscr{S}$ takových, že $A \subset B_j$, $j \in J$, potom $A = \bigcap_{j \in J} B_j$.*

3) *Existuje prosté zobrazení f množiny $\mathscr{A}$ na množinu $\mathscr{B}$ takové, že:*

3,1) *Jsou-li $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$, $A_1 \subset f(A_2)$, pak $A_2 \subset f(A_1)$;*

3,2) *Jestliže $A \in \mathscr{A}$, potom $A \cap f(A) = \{o\}$.*

Důkaz. Tvrzení 1) a 2) se snadno dokážou sporem. Dále pro $A \in \mathscr{A}$ stačí položit $f(A) = A^{\perp}$ a tvrzení 3,1) a 3,2) toto zobrazení splňuje.

Následující věta je v jistém smyslu opakem věty 3.13.

3.14. Věta. *Buď Ω množina, $o \in \Omega$; $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \{o\})$ buď úplný atomický a antiatomický svaz podmnožin množiny Ω, v němž infimum je dáno množinovým průnikem a který má největší prvek Ω a nejmenší prvek $\{o\}$. Označme $\mathscr{A}$ resp. $\mathscr{B}$ systém všech atomů resp. antiatomů svazu $\mathscr{S}$. Dále nechť svaz $\mathscr{S}$ splňuje podmínky* 1), 2), 3) *věty* 3.13. *Potom ve svazu $\mathscr{S}$ lze zavést ortogonalitu.*

Důkaz. Položíme $\{o\}^{\perp} = \Omega$; je-li $A \in S$, $A \neq \{o\}$, $A = \bigvee_{i \in I} A_i$, kde $A_i \in \mathscr{A}$ pro $i \in I$, položíme $A^{\perp} = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$. Platí $A^{\perp} \in S$.

1) Dokážeme, že $\Omega^{\perp} = \{o\}$. Totiž platí $\Omega = \bigvee_{A \in \mathscr{A}} A$, odkud $\Omega^{\perp} = \bigcap_{A \in \mathscr{A}} f(A)$. Kdyby $\bigcap_{A \in \mathscr{A}} f(A) \neq \{o\}$, existoval by atom $C \in \mathscr{A}$ tak, že $C \subset \bigcap_{A \in \mathscr{A}} f(A)$, tedy $C \subset f(A)$ pro všechna $A \in \mathscr{A}$, speciálně $C \subset f(C)$. To však odporuje předpokladu 3,2) z věty 3.13.

2) Nechť $A, B \in S$, $A \subset B$. Dokážeme, že $B^{\perp} \subset A^{\perp}$. Je-li $A = \{o\}$, je $B^{\perp} \subset \Omega = \{o\}^{\perp} = A^{\perp}$. Nechť dále $A \neq \{o\}$, $A = \bigvee_{i \in I} A_i$, kde $A_i \in \mathscr{A}$ pro $i \in I$. Potom $B = \bigvee_{i \in I} A_i \vee \bigvee_{j \in J} A'_j$, kde $A'_j \in \mathscr{A}$ pro $j \in J$. Odtud $B^{\perp} = \bigcap_{i \in I} f(A_i) \cap \bigcap_{j \in J} f(A'_j) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i) = A^{\perp}$.

3) Nechť $A \in S$. Dokážeme, že $A \cap A^{\perp} = \{o\}$. Avšak pro $A = \{o\}$ nebo $A = \Omega$ je toto tvrzení zřejmé. Nechť tedy $\{o\} \neq A \neq \Omega$. Kdyby $A \cap A^{\perp} \neq \{o\}$, existoval by atom $C \in \mathscr{A}$ tak, že $C \subset A \cap A^{\perp}$, tedy $C \subset A$, $C \subset A^{\perp}$. Podle části 2) tohoto důkazu platí $A^{\perp\perp} \subset C^{\perp}$. Je-li tedy $A = \bigvee_{i \in I} A_i$, kde $A_i \in \mathscr{A}$ pro $i \in I$, pak $\bigcap_{i \in I} f(A_i) = A^{\perp} = \bigvee_{j \in J} A'_j$, kde $A'_j \in \mathscr{A}$ pro $j \in J$. Odtud $A^{\perp\perp} = \bigcap_{j \in J} f(A'_j)$. Avšak $A'_j \subset f(A_i)$ pro všechna $j \in J$ a všechna $i \in I$. Podle 3,1) věty 3.13 odtud plyne $A_i \subset f(A_j)$ pro všechna $i \in I$ a všechna $j \in J$, takže $A = \bigvee_{i \in I} A_i \subset \bigcap_{j \in J} f(A'_j) = A^{\perp\perp}$. Tedy máme $C \subset A \subset A^{\perp\perp} \subset C^{\perp} = f(C)$, odkud $C = C \cap f(C)$, což odporuje předpokladu 3,2) z věty 3.13.

4) Pro $A \in S$ dokážeme, že $A = A^{\perp\perp}$. Pro $A = \{o\}$ nebo $A = \Omega$ je tvrzení zřejmé. V bodě 3) tohoto důkazu jsme již zjistili, že pro $A \in S$, $\{o\} \neq A \neq \Omega$ platí $A \subset A^{\perp\perp}$. Buď dále $A \neq \Omega$. Platí $A = \bigcap_{i \in I} B_i$, kde $B_i \in \mathscr{B}$ pro $i \in I$. Platí též $A = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$, kde $B_i = f(A_i)$, $A_i \in \mathscr{A}$ pro $i \in I$. Jelikož $(\bigvee_{i \in I} A_i)^{\perp} = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$, je $A = (\bigvee_{i \in I} A_i)^{\perp}$. Protože pro všechna $B \in S$ platí $B \subset B^{\perp\perp}$ podle bodu 2) tohoto důkazu máme $B^{\perp\perp\perp} \subset B^{\perp}$; avšak také $B^{\perp} \subset B^{\perp\perp\perp}$, tedy pro všechna $B \in S$ platí $B^{\perp} = B^{\perp\perp\perp}$. Odtud $A = (\bigvee_{i \in I} A_i)^{\perp} = (\bigvee_{i \in I} A_i)^{\perp\perp\perp} = A^{\perp\perp}$.

3.15. Poznámka. Splňuje-li svaz $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \{o\})$ předpoklady věty 3.14, lze v něm zavést ortogonalitu. Dostaneme tak svaz $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ s ortogonalitou. Ten indukuje podle věty 3.6 ortogonalitu $\perp$ na množině Ω. Lze potom pro $x \in \Omega$ uvažovat např. $\{x\}^{\perp\perp}$. Avšak svaz $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ nemusí splňovat axiom A. Buď totiž $\Omega = \{o, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $S = \{\{o\}, \Omega;\ \{o, \omega_1\}, \{o, \omega_2\}\}$. Zde $\mathscr{A} = \mathscr{B} = \{\{o, \omega_1\}, \{o, \omega_2\}\}$. Položme $f(\{o, \omega_1\}) = \{o, \omega_2\}$, $f(\{o, \omega_2\}) = \{o, \omega_1\}$. Předpoklady věty 3.14 jsou splněny a v souladu s jejím důkazem položíme $\{o, \omega_1\}^{\perp} = f(\{o, \omega_1\}) = \{o, \omega_2\}$, $\{o, \omega_2\}^{\perp} = f(\{o, \omega_2\}) = \{o, \omega_1\}$ a dále $\{o\}^{\perp} = \Omega$, $\Omega^{\perp} = \{o\}$. Odtud plyne ortogonalita $\perp$ na množině Ω: $o \perp \omega_i$ pro $i = 1, 2, 3$; $\omega_1 \perp \omega_2$. Je sice $\omega_3 \in \Omega$, avšak $\{\omega_3\}^{\perp\perp} = \Omega$, což není atom v $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$. Kdybychom však doplnili předpoklady věty 3.14 o podmínku, že ke každému $x \in \Omega$ existuje atom $A_x \in \mathscr{A}$ tak, že $x \in A_x$, svaz $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ by splňoval axiom A. Totiž potom při $x \neq o$ máme $x \in A_x$, odkud $\{o\} \neq \{x\}^{\perp\perp} \subset A_x$ tedy $\{x\}^{\perp\perp} = A_x$.

3.16. Příklad. Buď $\Omega = \{o, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Nechť $o \perp \omega_i$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, $\omega_3 \perp \omega_5 \perp \omega_6 \perp \omega_1 \perp \omega_2 \perp \omega_6 \perp \omega_3 \perp \omega_4 \perp \omega_5$, $\omega_6 \perp \omega_4$. Potom $S = \{\{o\}, \Omega;\ \{o, \omega_1\}, \{o, \omega_2, \omega_6\};\ \{o, \omega_2\}, \{o, \omega_1, \omega_6\};\ \{o, \omega_3\}, \{o, \omega_4, \omega_5, \omega_6\};\ \{o, \omega_4\}, \{o, \omega_3, \omega_5, \omega_6\};\ \{o, \omega_5\}, \{o, \omega_3, \omega_4, \omega_6\};\ \{o, \omega_6\}, \{o, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\};\ \{o, \omega_3, \omega_4\}, \{o, \omega_5, \omega_6\};\ \{o, \omega_3, \omega_5\}, \{o, \omega_4, \omega_6\};\ \{o, \omega_3, \omega_6\}, \{o, \omega_4, \omega_5\}\}$. Zde svaz $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ je ortomodulární A-svaz splňující aciom A. Platí zde $\{o, \omega_1\} \vee \{o, \omega_2\} = \{o, \omega_3\} \vee \{o, \omega_4\} \vee \{o, \omega_5\} = \{o, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$. Protože tedy neplatí tvrzení věty 2.7, vyplývá odtud, že $\mathscr{S}$ není V-svaz. Toto však lze ukázat přímo. Volme $A = \{o, \omega_3\}$, pak $A^\perp = \{o, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ a atom $C = \{o, \omega_1\}$. Platí $\{o, \omega_3\} \vee \{o, \omega_4\} = \{o, \omega_3, \omega_4\}$, $\{o, \omega_3\} \vee \{o, \omega_5\} = \{o, \omega_3, \omega_5\}$, $\{o, \omega_3\} \vee \vee \{o, \omega_6\} = \{o, \omega_3, \omega_6\}$ a C neleží pod žádným z těchto spojení. Najdeme podle věty 2.8 minimální prvek $A_0 \subset A$ a minimální prvek $B_0 \subset A^\perp$ tak, aby $C \subset A_0 \vee \vee B_0$. Platí $A_0 = (C \vee A^\perp) \cap A = \{o, \omega_3\}$, $B_0 = (C \vee A) \cap A^\perp = \{o, \omega_4, \omega_5\}$. Potom $A_0 \vee B_0 = \{o, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$. Je rovněž patrno, že B_0 není atom v $\mathcal{S}$.

Formulujme následující axiom.

Axiom V. Buď dáno $(\Omega, \perp)$, $\mathcal{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$. Buď $A \in S$, $\{o\} \neq A \neq \Omega$; nechť $x \in \Omega$, $x \notin A$, $x \notin A^\perp$. Potom existují atomy A_1, A_2 v $\mathcal{S}$, $A_1 \subset A$, $A_2 \subset A^\perp$ tak, že $x \in A_1 \vee A_2$.

Svaz $\mathcal{S}$ z příkladu 3.16 nesplňuje axiom V. Splňuje-li však svaz $\mathcal{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ asiom A i axiom V, na základě věty 3.12 je *AV*-svazem; je-li ortomodulární, je podle věty 2.12 též *AC*-svazem. Svaz $\mathcal{S}$ uzavřených konvexních kuželů s vrcholem v počátku v Hilbertově prostoru splňuje axiom V. Atomy A_1, A_2 z axiomu V však nejsou jednoznačně určeny ($\mathcal{S}$ není ortomodulární). Rovněž svaz $\mathcal{S}$ (uzavřených) podprostorů Hilbertova prostoru splňuje axiom V. Atomy A_1, A_2 z axiomu V jsou určeny jednoznačně ($\mathcal{S}$ je ortomodulární).

Je zřejmé, že řadu tvrzení z odstavce 2. lze pomocí věty 3.12 a axiomů A a V snadno přeformulovat. Např. platí (nutná podmínka ortomodularity svazu $\mathcal{S}$):

3.17. Věta. *Buď dáno $(\Omega, \perp)$, svaz $\mathcal{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ nechť splňuje axiom* A. *Je-li $\mathcal{S}$ ortomodulární svaz, $\{o\} \neq A \in S$, A není atom v $\mathcal{S}$, pak k libovolnému $x \in A$, $x \neq o$ existuje $y \in A$, $y \neq o$ tak, že $x \perp y$.*

Důkaz. Pro $x \in A$, $x \neq o$ platí $\{x\}^{\perp\perp} \subset A$. Kdyby $\{x\}^\perp \cap A = \{o\}$, bylo by $\{x\}^{\perp\perp} = A$, tedy A by byl atom v $\mathcal{S}$. Existuje proto $y \in \{x\}^\perp \cap A$, $y \neq o$, tedy $y \in A$, $y \in \{x\}^\perp$, tedy $x \perp y$.

Na základě uvedených výsledků je zřejmá následující věta (nutná a postačující podmínka ortomodularity svazu $\mathcal{S}$).

3.18. Věta. *Buď dáno $(\Omega, \perp)$, svaz $\mathcal{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ nechť splňuje axiom* A. *Pak $\mathcal{S}$ je ortomodulární tehdy a jen tehdy, když pro libovolné $A, B \in S$, $\{o\} \neq A \subset \subset B$ platí: Existují po dvou ortogonální prvky $x_i \in \Omega$ pro $i \in I$ tak, že $A = \bigvee_{i \in I} \{x_i\}^{\perp\perp}$ a po dvou ortogonální prvky $y_j \in \Omega$ pro $j \in J$takové, že $x_i \perp y_j$ pro všechna $i \in I$, $j \in J$ tak, že $B = \bigvee_{i \in I} \{x_i\}^{\perp\perp} \vee \bigvee_{j \in J} \{y_j\}^{\perp\perp}$.*

Literatura

[1] *Havrda J.:* K zobecnění pojmu projektor, Čas. pěst. mat., roč. *98* (1973), Praha, 265—268.
[2] *Maeda F., Maeda S.:* Theory of Symmetric Lattices, Springer-Verlag, Berlin 1970.

Adresa autora: 166 27 Praha 6 - Dejvice, Suchbátarova 2 (katedra matematiky FEL ČVUT).

Summary

ORTHOGONALITY ON SETS

JAN HAVRDA, Praha

The article deals with a certain natural generalization of the concept of orthogonality, as is known e.g. from the Hilbert space theory. The article is divided into two parts. The first part is of preparatory character, the second one is devoted to the problem itself. Henceforth the terminology of lattice theory will be used.

1. If $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ stands for an orthocomplemented lattice, then $\mathscr{P}$ is orthomodular if and only if

$$p, q, r \in P\,, \quad r \leqq q\,, \quad p \leqq q^{\perp} \quad \text{implies} \quad (r \vee p) \wedge q = r\,.$$

Moreover, in this case if $p, q, r, s, t \in P$, $r \leqq q$, $t \leqq q$, $p \leqq q^{\perp}$, $s \leqq q^{\perp}$ and $r \vee p = t \vee s$, then $r = t$ and $p = s$.

Let $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ be an orthomodular lattice. Let $p \in P$, $0 \neq p \neq 1$ and r, s be atoms of $\mathscr{P}$ such that $r \leqq p$, $s \leqq p^{\perp}$. If $q \in P$ such that $q \neq 0$, $q \wedge p = q \wedge p^{\perp} = 0$ and $q \leqq r \vee s$, then $r \vee q = r \vee s = q \vee s$. The above assumptions concerning r and s determine the atoms r, s uniquely.

An orthocomplemented lattice $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ is called a V-lattice if it satisfies the following condition: For every atom q of $\mathscr{P}$ and for every p of $\mathscr{P}$ such that $0 \neq p \neq 1$, $q \wedge p = q \wedge p^{\perp} = 0$ there exist atoms r and s of $\mathscr{P}$ such that $r \leqq p$, $s \leqq p^{\perp}$, and $q \leqq r \vee s$.

If the V-lattice is orthomodular, then the atoms r and s are uniquely determined.

If $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ is an orthomodular V-lattice and if $r \neq s$ are atoms of $\mathscr{P}$, then there exists an atom t of $\mathscr{P}$ such that $r \perp t$ and $r \vee s = r \vee t$. Moreover, if r and s are atoms of $\mathscr{P}$ such that $r \perp s$ and t is an atom of $\mathscr{P}$ such that $r \neq t \neq s$ and $t \leqq r \vee s$, then there exists an atom u of $\mathscr{P}$ such that $t \perp u$ and the equality $r \vee s = t \vee u$ holds.

In a complete orthomodular lattice $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$, assume that q is an atom such that $q \nleqq p$ and $q \nleqq p^{\perp}$. If $\{(r_i, s_i) : i \in I\}$ is a system of all r_i and s_i of $\mathscr{P}$ such that $r_i \leqq p$, $s_i \leqq p^{\perp}$ and $q \leqq r_i \vee s_i$ for all $i \in I$, then there is a least element r_0 or s_0 among r_i, $i \in I$, or among s_i, $i \in I$, respectively. Moreover, we have $r_0 = (q \vee p^{\perp}) \wedge p$ and $s_0 = (q \vee p) \wedge p^{\perp}$.

A complete orthomodular lattice $\mathscr{P}$ is a V-lattice if and only if the following statement is true: For an arbitrary element p of $\mathscr{P}$, $0 \neq p \neq 1$ and for an arbitrary atom q of $\mathscr{P}$ such that $q \nleqq p$ and $q \nleqq p^{\perp}$, the elements $(q \vee p^{\perp}) \wedge p$ and $(q \vee p) \wedge p^{\perp}$ are atoms of $\mathscr{P}$.

A complete orthomodular lattice $\mathscr{P} = (P, \leqq, 1, \perp)$ is a V-lattice if and only if it has the covering property.

2. Let a binary relation $\perp$ be defined on a nonempty set Ω satisfying the following axioms:

(A I) $\perp$ is symmetric.

(A II) There is an element o of Ω such that $o \perp x$ for all x of Ω.

(A III) If $x \perp x$ for x of Ω then $x = o$.

In this case we say that on Ω orthogonality $\perp$ is defined, and we write $(\Omega, \perp)$. Two elements x and y of Ω are called orthogonal if $x \perp y$. For an element x of Ω and for any nonempty subset A of Ω the symbol $x \perp A$ means that $x \perp y$ for all y of A. Put $A^{\perp} = \{x \in \Omega : x \perp A\}$.

The following statements are valid:

(i) $\{o\}^{\perp} = \Omega$ and $\Omega^{\perp} = \{o\}$;

(ii) If $A \subset \Omega$ is nonempty then $o \in A^{\perp}$;

(iii) If $A \subset \Omega$ is nonempty then $A \subset A^{\perp\perp}$ (here the symbol $A^{\perp\perp}$ is used for $(A^{\perp})^{\perp}$; similarly $A^{\perp\perp\perp}$ for $(A^{\perp\perp})^{\perp}$);

(iv) If $A \subset \Omega$ is nonempty and $A \subset B \subset \Omega$, then $B^{\perp} \subset A^{\perp}$;

(v) If $A \subset \Omega$ is nonempty, then $A^{\perp} = A^{\perp\perp\perp}$;

Putting in the sequel $S = \{A \subset \Omega : \emptyset \neq A = A^{\perp\perp}\}$ and $T = \{A^{\perp} : \emptyset \neq A \subset \Omega\}$, we have

(vi) $S = T$;

(vii) $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ is a complete orthocomplemented lattice, where

$$\bigwedge_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i\,, \quad \bigvee_{i \in I} A_i = (\bigcap_{i \in I} A_i^{\perp})^{\perp}\,, \quad 0 = \{o\}\,,$$

$1 = \Omega$ for $A_i \in S$, $i \in I$.

Let $(\Omega, \perp)$ and $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ be given. For any nonempty $A \subset \Omega$ there is a least element B of $\mathscr{S}$ such that $A \subset B$. Moreover, $B = A^{\perp\perp}$.

If $A, B \in S$, then $A \perp B$ (i.e. $A \subset B^{\perp}$) if and only if $x \perp y$ for all $x \in A$ and $y \in B$.

Given a set Ω and an element $o \in \Omega$, let $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ be a complete orthocomplemented lattice of subsets of the set Ω such that

(i) $\{o\}$ is a least element of $\mathscr{S}$;

(ii) If I is any nonempty set and $A_i \in S$ for $i \in I$, then $\bigwedge_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i$.

We define a binary relation $\top$ on Ω by: $x \top y$ if and only if there is $A \in S$ such that $x \in A$ and $y \in A^{\perp}$. The relation $\top$ defined above is an orthogonality on Ω and the complete orthocomplemented lattice $(T, \subset, \Omega, \top)$ coincides with the lattice $\mathscr{S}$.

Given $(\Omega, \perp)$, we define for $x, y \in \Omega$

$$R(x, y) = 0 \quad \text{for} \quad x \perp y\,, \quad R(x, y) = 1 \quad \text{otherwise}\,.$$

The mapping $R : \Omega \times \Omega \to G$ (here G stands for the set of all complex numbers) has the following basic properties:

(a) $R(x, y) = \overline{R(y, x)}$ for every $x, y \in \Omega$ (here bar denotes the complex conjugate);

(b) $R(o, o) = 0$ and $R(x, x) > 0$ for every $x \in \Omega$, $x \neq o$;

(c) $|R(x, y)|^2 \leqq R(x, x) \,.\, R(y, y)$ for all $x, y \in \Omega$.

It is evident that $R(o, x) = R(x, o) = 0$ for all $x \in \Omega$.

A mapping $R : \Omega \times \Omega \to G$ is said to be a quasiscalar product if it satisfies conditions (a)–(c). A pair (Ω, R) is called a space with quasiscalar product.

Conversely: given a space with quasiscalar product (Ω, R), we can define a binary relation $\perp$ on Ω by: $x \perp y$ if and only if $R(x, y) = 0$. Then $\perp$ is an orthogonality on Ω. Another orthogonality on Ω is defined by: $x \perp y$ if and only if $\operatorname{Re}(R(x, y)) \leqq 0$ (here Re denotes the real part of a complex number).

If Ω is a Hilbert space and R is a scalar (also quasiscalar) product, then the first definition leads to the well-known case. The second definition produces the lattice $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$, where S the system of all closed convex cones with the vertices situated at the origin; this is an example of a complete atomic V-lattice which is not orthomodular and also not a C-lattice (cf. [1]).

If $(\Omega, \perp)$ and $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ are given and A is an atom of $\mathscr{S}$, then $A = \{x\}^{\perp\perp}$ for every $x \in A$, $x \neq o$.

The following statements are equivalent:

1) $\mathscr{S}$ is an atomic lattice.

2) For every nonempty subset $B \subset \Omega$, $B^{\perp} \neq \{o\}$ there is $x \in B^{\perp}$, $x \neq o$ such that $\{y\}^{\perp} \subset \{x\}^{\perp}$ for all $y \in \{x\}^{\perp\perp}$, $y \neq o$.

Axiom (A). Given $(\Omega, \perp)$ and $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$, then $\{x\}^{\perp\perp}$ is an atom of $\mathscr{S}$ for every $x \in \Omega$, $x \neq o$.

If (A) takes place for $\mathscr{S}$, then $\mathscr{S}$ is an atomic lattice. Moreover, if $A \in S$, $x \in \Omega$, $x \neq o$, then $A \cap \{x\}^{\perp\perp} = \{o\}$ if and only if $x \notin A$.

For a nonempty set Ω and $o \in \Omega$ let $\mathscr{S} = (S, \subset, \Omega, \{o\})$ be a complete atomic and antiatomic lattice of subsets of Ω in which the meet is given by the set theoretical intersection having Ω and $\{o\}$ for the greatest and the least element, respectively. Put $\mathscr{A}$ and $\mathscr{B}$ for the system of all atoms and antiatoms, respectively. An orthogonality in $\mathscr{S}$ can be introduced if the following conditions are satisfied.

1) Let $A \in S$, $A \neq \{o\}$. If $\{A_i\}$, $i \in I$ is the system of all atoms of $\mathcal{S}$ such that $A_i \subset A$ for all $i \in I$, then $A = \bigvee_{i \in I} A_i$.

2) Let $A \in S$, $A \neq \Omega$. If $\{B_j\}$, $j \in J$ is the system of all antiatoms of $\mathcal{S}$ such that $A \subset B_j$ for all $j \in J$, then $A = \bigcap_{j \in J} B_j$.

3) There is a bijection f of $\mathcal{A}$ onto $\mathcal{B}$ such that

$$A_1, A_2 \in \mathcal{A}\,, \quad A_1 \subset f(A_2) \quad \text{imply} \quad A_2 \subset f(A_1)\,. \tag{3.1}$$

$$A \in \mathcal{A} \quad \text{implies} \quad A \cap f(A) = \{o\}\,. \tag{3.2}$$

Axiom (V). Let $(\Omega, \perp)$ and $\mathcal{S} = (S, \subset, \Omega, \perp)$ be given. Let $A \in S$, $\{o\} \neq A \neq \Omega$ and $x \in \Omega$, $x \notin A$, $x \notin A^{\perp}$. Then there are atoms A_1 and A_2 of $\mathcal{S}$ such that $A_1 \subset A$, $A_2 \subset A^{\perp}$, and $x \in A_1 \vee A_2$.

Numerous results of the first part of the article can be used when assuming that the lattice $\mathcal{S}$ satisfies the axiom (A) or (V).