

Jaroslav Lettrich

Translačné štruktúry. Centrálne a necentrálne translačné štruktúry

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 100 (1975), No. 1, 1--14

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117863>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1975

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## TRANSLAČNÉ ŠTRUKTÚRY\*) CENTRÁLNE A NECENTRÁLNE TRANSLAČNÉ ŠTRUKTÚRY

JAROSLAV LETTRICH, Žilina

(Došlo dňa 16. februára 1973)

### ÚVOD

V [2] J. ANDRÉ skúmal tzv. translačné štruktúry. Translačnou štruktúrou  $\mathfrak{T} = (\mathbf{P}, \mathcal{L})$  nazval incidenčnú štruktúru ( $\mathbf{P}$  je množina bodov,  $\mathcal{L}$  je množina priamok – podmnožín množiny  $\mathbf{P}$ ), ktorá má vlastnosti:

- (t1) Ku každým dvom rôznym bodom  $a, b \in \mathbf{P}$  existuje (práve jedna) priamka  $L \in \mathcal{L}$ , ktorá je incidentná s bodmi  $a, b$ .
- (t2) Existuje rozklad množiny  $\mathcal{L}$  priamok na triedy navzájom rovnobežných priamok tak, že ku každému bodu  $a \in \mathbf{P}$  a každej priamke  $L \in \mathcal{L}$  existuje práve jedna priamka  $L' \in \mathcal{L}$  incidentná s bodom  $a$  a rovnobežná s priamkou  $L$ .
- (t3) Štruktúra  $\mathfrak{T}$  obsahuje aspoň tri body neležiace na jednej priamke.
- (t4) Každá priamka štruktúry  $\mathfrak{T}$  obsahuje aspoň dva rôzne body.
- (t5) Existuje grupa  $T$  translácií, tranzitívna na množine bodov štruktúry  $\mathfrak{T}$ .

Transláciou sa pritom rozumie každá kolineácia, ktorá necháva pevnými buď všetky, alebo žiaden bod štruktúry  $\mathfrak{T}$  a ktorá každú priamku z  $\mathcal{L}$  zobrazí na priamku s ňou rovnobežnú. Podľa vety 1.3 v [2] možno zostrojiť každú translačnú štruktúru z rozdelenia nejakej vhodnej grupy. Rozdelením  $\mathcal{P}$  netriviálnej grupy  $\mathbf{P}$  s neutrálnym prvkom  $o$  je systém vlastných netriviálnych (tj. od  $\{o\}$  a  $\mathbf{P}$  rôznych) podgrúp grupy  $\mathbf{P}$ , tzv. komponent rozdelenia  $\mathcal{P}$ , takých, že každý prvok grupy  $\mathbf{P}$ , rôzny od neutrálného prvku, je obsiahnutý práve v jednej komponente z  $\mathcal{P}$ . Ak prvky nejakej abstraktnej grupy  $\mathbf{P}$  pripúšťajúcej rozdelenie  $\mathcal{P}$  vezmeme za body a pravé triedy rozkladu grupy  $\mathbf{P}$  podľa komponent rozdelenia  $\mathcal{P}$  grupy  $\mathbf{P}$  za priamky, tak dostaneme translačnú štruktúru.

V tomto článku sa pojednáva o centrálnych a necentrálnych translačných štruktú-

---

\*) Práca bola vyhotovená za vedenia V. HAVLA, ktorý mi tiež navrhol túto tému.

-rach. Využívajú sa tu poznatky z [2] a [3] o translačných štruktúrach resp. o rozdeleniach abelovských grúp. Stade sú prevzaté aj všetky základné pojmy, s ktorými sa v článku pracuje.

V prvej časti je ukázané, ako možno zostrojiť každú — konečnú alebo nekonečnú centrálnu translačnú štruktúru, ktorá nie je translačnou rovinou. Príklad 1 je návodom na konštrukciu nekonečnej centrálnej translačnej štruktúry z rozdelenia  $\mathcal{P}$ , ktorého nosná grupa je pravým vektorovým priestorom dimenzie  $\infty$  nad komutatívnym telesom  $F$  a ktorého komponenty sú jednodimenziálne podpriestory tohoto vektorového priestoru. V konštrukcii 1 je daný postup na zostrojenie každej konečnej centrálnej translačnej štruktúry, v ktorej každá priamka obsahuje práve  $p$  ( $p \geq 2$  je prvočíslo) rôznych bodov a v ktorej každým bodom prechádza  $(p^n - 1)/(p - 1)$  rôznych priamok, kde  $n \geq 2$  je dané prirodzené číslo. Nosná grupa  $\mathbf{P}$  rozdelenia  $\mathcal{P}$ , z ktorého je táto štruktúra zostrojená, je direktným súčtom  $n$  cyklických grúp rádu  $p$ . Pri  $n = 2$  je táto štruktúra translačnou rovinou.

Druhá časť tohoto článku je venovaná existencii necentrálnych translačných štruktúr. Sú v nej uvedené dve konkrétne neabelovské grupy, pripúšťajúce rozdelenia, z ktorých zostrojené translačné štruktúry sú necentrálne. Je to grupa zhodných zobrazení pravidelného 4-bokého dvojhlana na seba pozostávajúca z ôsmich prvkov a Frobeniova grupa permutácií 5-prvkovej množiny obsahujúca dvadsať prvkov. Obe tieto grupy patria do tried neabelovských grúp pripúšťajúcich rozdelenie, ktoré André spomína v [2] v poznámke za vetou 2.4.

## 1. KONŠTRUKCIA CENTRÁLNYCH TRANSLAČNÝCH ŠTRUKTÚR

Translácia  $\tau$  z translačnej grupy  $T$  translačnej štruktúry  $\mathfrak{T} = (\mathbf{P}, \mathcal{L})$  nazýva sa centrálnou, ak necháva pevnou (ako celok) nejakú priamku  $L \in \mathcal{L}$  a všetky s ňou rovnobežné priamky a len tieto. Ak je každá translácia z translačnej grupy  $T$  translačnej štruktúry  $\mathfrak{T}$  centrálna, potom translačnú štruktúru  $\mathfrak{T}$  nazývame centrálnou. Ako bude uvedené aj v druhej časti, nie každá translačná štruktúra je centrálna. Podľa vety 2.4 v [2] je translačná štruktúra centrálnou vtedy a len vtedy, ak jej translačná grupa je abelovská. Teda každú centrálnu translačnú štruktúru možno zostrojiť z rozdelenia nejakej abelovskej grupy. Avšak nie každá abelovská grupa pripúšťa rozdelenie. Veta 1.1 v [3] hovorí, že (aditívna) abelovská grupa  $\mathbf{P}$  (konečná alebo nekonečná) pripúšťa rozdelenie vtedy a len vtedy, ak:

- (a) všetky nenulové prvky grupy  $\mathbf{P}$  majú rovnaký rád a
- (b) grupa  $\mathbf{P}$  má hodnotu väčšiu ako 1.

Hodnotou grupy  $\mathbf{P}$  sa pritom rozumie maximálny počet lineárne nezávislých prvkov grupy  $\mathbf{P}$ .

V ďalšom si bližšie všimneme rozdelenia abelovských grúp a zavedieme niekoľko pojmov.

Nech  $\mathcal{P}$  je rozdelenie abelovskej grupy  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{Q}$  nech je podgrupa grupy  $\mathbf{P}$ . Potom

$\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$  je množina všetkých podgrúp  $\mathbf{X} \cap \mathcal{Q} \neq o$ , kde  $\mathbf{X}$  je komponenta z  $\mathcal{P}$ . Množina  $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$  je rozdelenie grupy  $\mathcal{Q}$ .

Podgrupa  $\mathbf{U}$  grupy  $\mathbf{P}$  (rozumie sa abelovskej) je  $\mathcal{P}$ -prípustnou podgrupou grupy  $\mathbf{P}$ , keď pre každú komponentu  $\mathbf{X}$  rozdelenia  $\mathcal{P}$  grupy  $\mathbf{P}$  platí

$$\mathbf{U} \cap \mathbf{X} = o \quad \text{alebo} \quad \mathbf{U} \cap \mathbf{X} = \mathbf{X}.$$

Rozdelenie  $\mathcal{P}$  abelovskej grupy  $\mathbf{P}$  nazývame geometrickým rozdelením, ak každý súčet  $\mathcal{P}$ -prípustných podgrúp grupy  $\mathbf{P}$  je opäť  $\mathcal{P}$ -prípustná podgrupa. Nutná a postačujúca podmienka k tomu, aby rozdelenie  $\mathcal{P}$  grupy  $\mathbf{P}$  bolo geometrickým rozdelením, je, aby súčet každých dvoch komponent z  $\mathcal{P}$  bol  $\mathcal{P}$ -prípustnou podgrupou grupy  $\mathbf{P}$ .

Geometrické rozdelenie  $\mathcal{P}$  grupy  $\mathbf{P}$  nazývame planárnym rozdelením, keď existujú dve rôzne komponenty  $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{P}$  také, že je  $\mathbf{P} = \mathbf{U} + \mathbf{V}$ . V opačnom prípade hovoríme o neplanárnom rozdelení. Geometrické rozdelenie  $\mathcal{P}$  grupy  $\mathbf{P}$  je planárne vtedy a len vtedy, ak pre každé dve rôzne komponenty  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{P}$  platí  $\mathbf{P} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ .

Planárne rozdelenia abelovských grúp André nazýva kongruenciami. Translačné štruktúry, zostrojené z planárných rozdelení abelovských grúp, sú translačnými rovinami. V týchto sa každé dve nerovnoběžné priamky nutne pretínajú, čo v obecných translačných štruktúrach neplatí. Preto translačné štruktúry (ktoré nie sú translačnými rovinami) budeme konštruovať z neplanárných rozdelení abelovských grúp. O týchto rozdeleniach platí (veta 2.3 v [3]): Neplanárne rozdelenia sú práve množiny jednodimenzionálnych podpriestorov vektorového priestoru dimenzie aspoň tri nad (nie nutne komutatívnym) telesom.

V nasledujúcom príklade uvidíme konštrukciu nekonečnej centrálnej translačnej štruktúry.

**Príklad 1.** Nech  $F$  je ľubovoľné komutatívne teleso s charakteristikou 0. Nulový a jednotkový prvok telesa  $F$  budeme označovať  $0$  resp.  $1$  ďalšie prvky  $a, b, \dots$ . Nech  $\mathcal{I}$  je množina indexov,  $\lambda_i$  ( $i \in \mathcal{I}$ ) neurčité nad  $F$  a  $\mathbf{P}[\lambda_i]_{\mathcal{I}} = \mathbf{P}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots]$  nech je okruh polynómov  $f(\lambda_i)_{\mathcal{I}} = f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots)$ ,  $g(\lambda_i)_{\mathcal{I}} = g(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots)$ , ... neurčitých  $\lambda_i$  ( $i \in \mathcal{I}$ ) s koeficientami z telesa  $F$ . Aditívnu grupu (zrejme abelovskú) tohoto okruhu označme  $\mathbf{P}$ ; je to vlastne vektorový priestor nad telesom  $F$ . Nulovým vektorom priestoru  $\mathbf{P}$  – neutrálnym prvkom grupy  $\mathbf{P}$  je nulový polynóm  $0 \in \mathbf{P}[\lambda_i]_{\mathcal{I}}$ . Bázu vektorového priestoru  $\mathbf{P}$  tvoria polynómy

$$\lambda_1^{n_1} \cdot \lambda_2^{n_2} \cdot \dots \cdot \lambda_i^{n_i} \cdot \dots,$$

kde všetky  $n_i$  sú nezáporné celé čísla. Teda  $\dim \mathbf{P} = \infty$ . Množinu všetkých jednodimenzionálnych podpriestorov  $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \dots$  priestoru  $\mathbf{P}$  označme  $\mathcal{P}$ . Ukážeme, že  $\mathcal{P}$  je rozdelenie grupy  $\mathbf{P}$ .

Každý podpriestor  $\mathbf{U} \in \mathcal{P}$  priestoru  $\mathbf{P}$  obsahuje spolu s nejakým polynómom  $f(\lambda_i)_{\mathcal{I}} \neq 0$  aj všetky polynómy  $a \cdot f(\lambda_i)_{\mathcal{I}}$ , kde je  $a \in F$ , a žiadne iné. Preto môžeme označiť

$$\mathbf{U} = F \cdot f(\lambda_i)_{\mathcal{I}}.$$

Pri tomto označení vždy bude  $f(\lambda_i)_{\mathcal{F}} \neq 0$  ľubovoľný polynóm z  $\mathbf{U}$ . Nulový polynóm  $0$  leží zrejme v každom podpriestore  $\mathbf{U} \in \mathcal{P}$ , lebo je  $0 \cdot f(\lambda_i)_{\mathcal{F}} = 0$  pre každý polynóm  $f(\lambda_i)_{\mathcal{F}} \in \mathbf{P}$ . Každý nenulový polynóm  $f(\lambda_i)_{\mathcal{F}}$  z priestoru  $\mathbf{P}$  leží práve v jednom podpriestore  $\mathbf{U} \in \mathcal{P}$ , lebo keby  $f(\lambda_i)_{\mathcal{F}} \in \mathbf{U}$  a súčasne  $f(\lambda_i)_{\mathcal{F}} \in \mathbf{V}$ , kde  $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{P}$ , tak by platilo

$$\mathbf{U} = F \cdot f(\lambda_i)_{\mathcal{F}} = \mathbf{V}.$$

Rozdelenie  $\mathcal{P}$  grupy  $\mathbf{P}$  je zrejme neplanárne. Ak sú totiž  $\mathbf{U} \neq \mathbf{V}$  dve ľubovoľné komponenty rozdelenia  $\mathcal{P}$ , potom platí, že  $\mathbf{U} + \mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$ , lebo  $\mathbf{U} \cap \mathbf{V} = 0$ . Preto  $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{V} = 2$ , čiže  $\mathbf{U} + \mathbf{V} \subset \mathbf{P}$ .

Z rozdelenia  $\mathcal{P}$  grupy  $\mathbf{P}$  zostrojíme translačnú štruktúru  $\mathfrak{T}$  nasledovne:

Bodmi štruktúry  $\mathfrak{T}$  budú prvky grupy  $\mathbf{P}$ .

Priamkami štruktúry  $\mathfrak{T}$  nazveme pravé triedy  $\mathbf{U} + p(\lambda_i)_{\mathcal{F}}, \mathbf{V} + q(\lambda_i)_{\mathcal{F}}, \dots (p(\lambda_i)_{\mathcal{F}}, q(\lambda_i)_{\mathcal{F}} \in \mathbf{P})$  rozkladu grupy  $\mathbf{P}$  podľa podgrúp  $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \dots$  z rozdelenia  $\mathcal{P}$ .

Dve priamky  $\mathbf{U} + p(\lambda_i)_{\mathcal{F}}, \mathbf{V} + q(\lambda_i)_{\mathcal{F}}$  ( $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{P}; p(\lambda_i)_{\mathcal{F}}, q(\lambda_i)_{\mathcal{F}} \in \mathbf{P}$ ) zo štruktúry  $\mathfrak{T}$  nazveme navzájom rovnobežnými vtedy a len vtedy, keď je  $\mathbf{U} = \mathbf{V}$ .

Transláciami v štruktúre  $\mathfrak{T}$  budú zobrazenia  $\overline{t(\lambda_i)_{\mathcal{F}}}$  grupy  $\mathbf{P}$  na seba, definované vzťahom

$$(1) \quad [x(\lambda_i)_{\mathcal{F}}] \overline{t(\lambda_i)_{\mathcal{F}}} = x(\lambda_i)_{\mathcal{F}} + t(\lambda_i)_{\mathcal{F}},$$

pričom  $t(\lambda_i)_{\mathcal{F}}, x(\lambda_i)_{\mathcal{F}}$  sú prvky grupy  $\mathbf{P}$ .

Ľahko overíme, že sú splnené axiomy **(t1)** až **(t5)**:

Nech  $f(\lambda_i)_{\mathcal{F}}, g(\lambda_i)_{\mathcal{F}} \in \mathbf{P}$  sú ľubovoľné rôzne body. Potom množina  $F \cdot [f(\lambda_i)_{\mathcal{F}} - g(\lambda_i)_{\mathcal{F}}] + g(\lambda_i)_{\mathcal{F}}$  je jediná priamka, spájajúca body  $f(\lambda_i)_{\mathcal{F}}, g(\lambda_i)_{\mathcal{F}}$ , takže  $\mathfrak{T}$  je incidenčná štruktúra a platí aj **(t1)**. Pretože  $\mathbf{U} + q(\lambda_i)_{\mathcal{F}}, \mathbf{U} \in \mathcal{P}, q(\lambda_i)_{\mathcal{F}} \in \mathbf{P}$ , je jediná priamka, idúca daným bodom  $q(\lambda_i)_{\mathcal{F}}$  rovnobežne s danou priamkou  $\mathbf{U} + p(\lambda_i)_{\mathcal{F}}$ , kde  $p(\lambda_i)_{\mathcal{F}} \in \mathbf{P}$ , tak je splnený axiom **(t2)**.

V množine  $\mathbf{P}$  existujú tri body  $0, 1, \lambda_i$  ( $i$  je nejaký prvok z množiny  $\mathcal{F}$ ), ktoré neležia na jednej priamke, čiže v štruktúre  $\mathfrak{T}$  platí tiež axiom **(t3)**.

Platnosť axiomu **(t4)** vyplýva zo skutočnosti, že v telese  $F$  existujú najmenej dva prvky  $0$  a  $1$ .

Každé zo zobrazení  $\overline{t(\lambda_i)_{\mathcal{F}}}$ , pričom  $t(\lambda_i)_{\mathcal{F}} \in \mathbf{P}$ , definované vzťahom (1), nenechá pevným žiaden bod z  $\mathbf{P}$ , ak  $t(\lambda_i)_{\mathcal{F}} \neq 0$  a fixuje každý bod z  $\mathbf{P}$ , ak  $t(\lambda_i)_{\mathcal{F}} = 0$ . Priamka  $\mathbf{U} + p(\lambda_i)_{\mathcal{F}}$  v zobrazení  $\overline{t(\lambda_i)_{\mathcal{F}}}$  prejde do priamky  $\mathbf{U} + [p(\lambda_i)_{\mathcal{F}} + t(\lambda_i)_{\mathcal{F}}]$ , tj. do priamky rovnobežnej s  $\mathbf{U} + p(\lambda_i)_{\mathcal{F}}$ . Preto je  $\overline{t(\lambda_i)_{\mathcal{F}}}$  naozaj transláciou v štruktúre  $\mathfrak{T}$ . Množinu všetkých translácií  $t(\lambda_i)_{\mathcal{F}}$  definovaných vzťahom (1) označme  $T$ . Pre každé  $t(\lambda_i)_{\mathcal{F}}, u(\lambda_i)_{\mathcal{F}} \in T$  a každý bod  $x(\lambda_i)_{\mathcal{F}} \in \mathbf{P}$  je splnená rovnosť

$$(2) \quad [x(\lambda_i)_{\mathcal{F}}] \overline{t(\lambda_i)_{\mathcal{F}}} \overline{u(\lambda_i)_{\mathcal{F}}} = x(\lambda_i)_{\mathcal{F}} + [t(\lambda_i)_{\mathcal{F}} + u(\lambda_i)_{\mathcal{F}}] = [x(\lambda_i)_{\mathcal{F}}] \overline{(t(\lambda_i)_{\mathcal{F}} + u(\lambda_i)_{\mathcal{F}})},$$

preto zobrazenie  $\varphi : t(\lambda_i)_{\mathcal{F}} \rightarrow \overline{t(\lambda_i)_{\mathcal{F}}}$  je izomorfizmus abelovskej grupy  $\mathbf{P}$  na množi-

nu  $T$  s operáciou násobenia – skladania translácií – a teda aj  $T$  je abelovská grupa. Ku každým dvom bodom  $f(\lambda_i)_{\mathcal{F}}, g(\lambda_i)_{\mathcal{F}} \in \mathbf{P}$  existuje práve jedna translácia

$$\overline{g(\lambda_i)_{\mathcal{F}} - f(\lambda_i)_{\mathcal{F}}} \in T,$$

ktorá zobrazuje bod  $f(\lambda_i)_{\mathcal{F}}$  do bodu  $g(\lambda_i)_{\mathcal{F}}$ . Z toho vyplýva, že v štruktúre  $\mathfrak{T}$  je splnený aj axiom **(t5)**.

Translačná štruktúra  $\mathfrak{T}$ , ktorú sme tu dostali, určite nie je translačnou rovinou, pretože v nej existujú nerovnoběžné priamky, ktoré sa nepretínajú. Dokonca platí, že každým bodom  $p(\lambda_i)_{\mathcal{F}} \in \mathbf{P}$ , neležiacim na priamke  $\mathbf{U} + q(\lambda_i)_{\mathcal{F}}$  ( $\mathbf{U} \in \mathcal{P}$ ,  $q(\lambda_i)_{\mathcal{F}} \in \mathbf{P}$ ), prechádza (najmenej jedna) priamka  $\mathbf{V} + p(\lambda_i)_{\mathcal{F}}$  ( $\mathbf{V} \in \mathcal{P}$ ), ktorá nepretína priamku  $\mathbf{U} + q(\lambda_i)_{\mathcal{F}}$ . Ak je  $\mathbf{U} = F \cdot f(\lambda_i)_{\mathcal{F}}, f(\lambda_i)_{\mathcal{F}} \in \mathbf{P}$ , potom bude  $\mathbf{V} = F \cdot g(\lambda_i)_{\mathcal{F}}$ , kde  $g(\lambda_i)_{\mathcal{F}} \in \mathbf{P}$  stačí zvoliť napríklad tak, aby polynómy  $f(\lambda_i)_{\mathcal{F}} + q(\lambda_i)_{\mathcal{F}}$  a  $g(\lambda_i)_{\mathcal{F}} + p(\lambda_i)_{\mathcal{F}}$  nemali rovnaký stupeň.

Zostrojená translačná štruktúra  $\mathfrak{T}$  je centrálna, lebo nosná grupa  $\mathbf{P}$  rozdelenia  $\mathcal{P}$ , z ktorého sme ju dostali, je abelovská. Každá neidentická translácia  $\overline{t(\lambda_i)_{\mathcal{F}}} \in T$  je naozaj centrálnou. Translácia  $\overline{t(\lambda_i)_{\mathcal{F}}}$  totiž necháva pevnou (ako celok) priamku  $\mathbf{U} = F \cdot t(\lambda_i)_{\mathcal{F}}$  lebo platí

$$[F \cdot t(\lambda_i)_{\mathcal{F}}] \overline{t(\lambda_i)_{\mathcal{F}}} = F \cdot t(\lambda_i)_{\mathcal{F}} + t(\lambda_i)_{\mathcal{F}} = F \cdot t(\lambda_i)_{\mathcal{F}}.$$

Každá priamka  $\mathbf{U} + p(\lambda_i)_{\mathcal{F}}$ ,  $p(\lambda_i)_{\mathcal{F}} \in \mathbf{P}$ , rovnobežná s priamkou  $\mathbf{U} = F \cdot t(\lambda_i)_{\mathcal{F}}$ , zostáva tiež pevnou (ako celok) v translácii  $\overline{t(\lambda_i)_{\mathcal{F}}}$ , keďže (vzhľadom na asociatívnosť a komutatívnosť sčítania v grupe  $\mathbf{P}$ ) platí:

$$\begin{aligned} [F \cdot t(\lambda_i)_{\mathcal{F}} + p(\lambda_i)_{\mathcal{F}}] \overline{t(\lambda_i)_{\mathcal{F}}} &= [F \cdot t(\lambda_i)_{\mathcal{F}} + p(\lambda_i)_{\mathcal{F}}] + t(\lambda_i)_{\mathcal{F}} = \\ &= [F \cdot t(\lambda_i)_{\mathcal{F}} + t(\lambda_i)_{\mathcal{F}}] + p(\lambda_i)_{\mathcal{F}} = F \cdot t(\lambda_i)_{\mathcal{F}} + p(\lambda_i)_{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

O rozdeleniach konečných abelovských grúp André v [2] uvádza (veta 4.5): Medzi konečnými abelovskými grupami pripúšťajú rozdelenie práve tie, ktoré nie sú cyklické a sú elementárne abelovské, tj. všetky nenulové prvky majú rovnaký prvočíselný rád  $p$ . Preto k určeniu všetkých konečných centrálnych translačných štruktúr stačí poznať všetky konečné necyklické abelovské grupy typu  $(p, p, \dots, p)$ , kde  $p$  je prvočíslo. Každú takúto grupu  $\mathbf{P}$  dostaneme ako direktný súčet konečného počtu  $n$  ( $n \geq 2$ ) cyklických grúp prvočíselného rádu  $p$  (s aditívne zapísanou operáciou). Všetky cyklické podgrupy rádu  $p$  grupy  $\mathbf{P}$  tvoria potom rozdelenie  $\mathcal{P}$  grupy  $\mathbf{P}$ . Teraz uvidíme ich konštrukciu.

**Konštrukcia 1.** Nech  $p \geq 2$  je dané prvočíslo a  $n \geq 2$  prirodzené číslo. Ďalej nech  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$  sú cyklické grupy (s aditívne zapísanou operáciou) rádu  $p$  a nech  $o_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) je neutrálny – nulový prvok grupy  $\mathbf{A}_i$ . Ak  $a_i \neq o_i$  je ľubovoľný prvok grupy  $\mathbf{A}_i$ , potom zrejme pre každé  $i = 1, 2, \dots, n$  je

$$\mathbf{A}_i = (\{a_i, 2a_i, \dots, ma_i, \dots, (p-1)a_i, pa_i = o_i\}, +),$$

kde  $ma_i$  ( $m$  je prirodzené číslo,  $1 \leq m \leq p$ ) značí súčet  $m$  rovnakých sčítancov  $a_i$ . Pripomenieme niektoré známe vlastnosti cyklických grúp (prvočíselného) rádu  $p$ , ktoré budeme v ďalšom potrebovať:

- Každý prvok  $a_i \neq o_i$  cyklickej grupy  $A_i$  prvočíselného rádu  $p$  má tiež rád  $p$ .
- Ak  $k$  je celé,  $m$  prirodzené číslo, pričom  $1 \leq m \leq p$ , a  $a_i \neq o_i$  je ľubovoľný prvok cyklickej grupy  $A_i$  rádu  $p$ , potom  $ka_i = ma_i$  vtedy a len vtedy, ak  $k - m \equiv 0 \pmod{p}$ . Preto môžeme písať  $o_i = 0a_i$ , kde  $0$  je celé číslo.
- Opačný prvok k prvku  $ma_i$  ( $m$  je celé číslo) cyklickej grupy  $A_i$  je  $-ma_i$ .
- Ak  $r, s$  sú celé čísla a  $a_i \neq o_i$  je ľubovoľný prvok cyklickej grupy  $A_i$  rádu  $p$ , potom

$$ra_i + sa_i = (r + s)a_i = ma_i,$$

$$r(sa_i) = (rs)a_i = na_i,$$

kde pre nezáporné celé čísla  $m, n \leq p - 1$  platí:

$$m \equiv r + s \pmod{p}, \quad n \equiv rs \pmod{p}.$$

- Každá konečná cyklická grupa  $A_i$  je abelovská.

Označme  $\mathbf{P}$  množinu všetkých možných usporiadaných  $n$ -tíc  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n), \dots$ , kde  $a_i, b_i, \dots$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) sú ľubovoľné prvky z cyklickej grupy  $A_i$  rádu  $p$ . Súčet každých dvoch prvkov  $a, b \in \mathbf{P}$  definujeme nasledujúcim spôsobom:

$$(3) \quad a + b = (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) =$$

$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n).$$

Zo vzťahu (3) vyplýva, že súčet každých dvoch prvkov z množiny  $\mathbf{P}$  je opäť prvok množiny  $\mathbf{P}$ . Ľahko overíme, že pre takto definovanú operáciu sčítania v množine  $\mathbf{P}$  je splnený asociatívny a komutatívny zákon, takže  $(\mathbf{P}, +)$  je abelovská grupa s neutrálnym prvkom  $o = (o_1, o_2, \dots, o_n)$ . Opačným prvkom k prvku  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  z grupy  $(\mathbf{P}, +)$  je prvok

$$-a = -(a_1, a_2, \dots, a_n) = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n).$$

Súčet  $m$  ( $m$  je prirodzené číslo) rovnakých prvkov  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  z grupy  $(\mathbf{P}, +)$  označíme tiež  $ma = m(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , pričom podľa (3) platí:

$$m(a_1, a_2, \dots, a_n) = (ma_1, ma_2, \dots, ma_n).$$

Rád grupy  $(\mathbf{P}, +)$  je zrejme rovný  $p^n$ . Každý prvok  $a \neq o$  z grupy  $(\mathbf{P}, +)$  má rád  $p$ , preto  $(\mathbf{P}, +)$  nie je cyklická grupa.

Nech  $A'_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , je podgrupa grupy  $(\mathbf{P}, +)$ , pozostávajúca z  $n$ -tíc

$$(o_1, o_2, \dots, o_{i-1}, a_i, o_{i-1}, \dots, o_n),$$

kde  $a_i$  je prvok cyklickej grupy  $A_i$ . Grupa  $(P, +)$  je potom direktným súčtom všetkých svojich podgrúp  $A'_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , lebo každé dve rôzne podgrupy  $A'_i, A'_j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) majú spoločný práve jeden prvok – neutrálny prvok  $o$  a každý prvok  $a \neq o$  grupy  $(P, +)$  sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare súčtu prvkov po jednom vybratých z podgrúp  $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ :

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \\ = (a_1, o_2, \dots, o_n) + (o_1, a_2, o_3, \dots, o_n) + \dots + (o_1, o_2, \dots, o_{n-1}, a_n).$$

Každá podgrupa  $A'_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) grupy  $(P, +)$  je zrejme izomorfná s cyklickou grupou  $A_i$  a preto môžeme hovoriť, že grupa  $(P, +)$  je direktným súčtom cyklických grúp  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

Pretože rád grupy  $(P, +)$  je  $p^n$  a rád každého jej nenulového prvku  $a$  je  $p$ , obsahuje grupa  $(P, +)$  práve  $q$  cyklických podgrúp  $P_1, P_2, \dots, P_q$  rádu  $p$ , kde

$$q = \frac{p^n - 1}{p - 1}.$$

Tieto podgrupy tvoria rozdelenie  $\mathcal{P}$  grupy  $(P, +)$ , lebo každé dve rôzne podgrupy  $P_i, P_j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, q$ ) majú spoločný len neutrálny prvok  $o \in (P, +)$  a každý prvok  $a \neq o$  z grupy  $(P, +)$  patrí práve do jednej z podgrúp  $P_i$  – komponent rozdelenia  $\mathcal{P}$ , konkrétne do podgrupy, vytvorenej prirodzenými násobkami  $ma$  ( $1 \leq m \leq p$ ) tohoto prvku  $a$ .

Z rozdelenia  $\mathcal{P}$  s nosnou grupou  $(P, +)$  zostrojíme translačnú štruktúru  $\mathfrak{T}$  rovnakým spôsobom ako v príklade 1:

Bodmi štruktúry  $\mathfrak{T}$  budú prvky grupy  $(P, +)$ .

Prímkami štruktúry  $\mathfrak{T}$  nazveme pravé triedy  $P_i + a$  ( $P_i \in \mathcal{P}$ ,  $a \in P$ ) rozkladu grupy  $(P, +)$  podľa podgrúp  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) z rozdelenia  $\mathcal{P}$ .

Rovnobežnosť priamok štruktúry  $\mathfrak{T}$  budeme definovať takto: Dve priamky  $P_i + a, P_j + b$  ( $P_i, P_j \in \mathcal{P}$ ;  $a, b \in P$ ) nazveme navzájom rovnobežnými vtedy a len vtedy, keď  $P_i = P_j$ .

Ukážeme, že štruktúra  $\mathfrak{T}$  s práve definovanými bodmi, priamkami a rovnobežnosťou priamok spĺňa axiómy **(t1)** až **(t5)**:

Ak  $a \neq b$ ,  $a, b \in P$ , sú ľubovoľné body, potom existuje práve jedna priamka  $P_k + a$ , ktorá je s nimi incidentná, pričom  $P_k \in \mathcal{P}$  je cyklická grupa s generujúcim prvkom  $b - a$ . To ale znamená, že  $\mathfrak{T}$  je incidentná štruktúra a platí v nej **(t1)**.

Bodom  $a \in P$  prechádza práve jedna rovnobežka  $P_i + a$  s priamkou  $P_i + b$  ( $b \in P$ ,  $P_i \in \mathcal{P}$ ), teda je splnený axióm **(t2)**.

Pretože podľa predpokladu je  $p \geq 2$ , každá priamka štruktúry  $\mathfrak{T}$  obsahuje najmenej dva body, takže v  $\mathfrak{T}$  platí **(t4)**.

Keďže je  $n \geq 2$  (opäť podľa predpokladu), existujú aspoň dve (dokonca najmenej tri) priamky idúce bodom  $o$ . Každá z nich má ešte ďalší bod rôzny od  $o$  a preto platí aj **(t3)**.



Platnosť **(t5)** dokážeme nasledovne:

Ku každému prvku  $t \in \mathbf{P}$  priradíme zobrazenie  $\bar{t}$  také, že pre každý bod  $x \in \mathbf{P}$  platí

$$(4) \quad x\bar{t} = x + t.$$

Ak je  $t \neq o$ , potom zobrazenie  $\bar{t}$  nenechá pevným žiaden bod a každú priamku  $\mathbf{P}_i + a$  ( $\mathbf{P}_i \in \mathcal{P}$ ,  $a \in \mathbf{P}$ ) zobrazí na priamku  $\mathbf{P}_i + (a + t)$ , rovnobežnú s priamkou  $\mathbf{P}_i + a$ , teda  $\bar{t}$  je translácia. Množina  $T$  všetkých takto definovaných translácií štruktúry  $\mathfrak{T}$  je (vzhľadom na operáciu skladania) abelovská grupa, čo vyplýva z izomorfizmu  $\varphi : t \rightarrow \bar{t}$  grupy  $(\mathbf{P}, +)$  na množinu  $T$ . Translačná grupa  $T$  je tranzitívna na množine  $\mathbf{P}$  bodov štruktúry  $\mathfrak{T}$ , pretože ku každým dvom bodom  $a, b \in \mathbf{P}$  existuje práve jedna translácia  $b - a$  z grupy  $T$ , ktorá zobrazí bod  $a$  do bodu  $b$ .

Pretože nosná grupa  $(\mathbf{P}, +)$  rozdelenia  $\mathcal{P}$  je abelovská, zostrojená translačná štruktúra musí byť centrálna. Ukážeme, že naozaj je každá neidentická translácia z grupy  $T$  centrálnou. Ak je  $\bar{t} \in T$  neidentická translácia (priradená k prvku  $t \in \mathbf{P}$ ,  $t \neq o$ , v izomorfizme  $\varphi$ ), potom  $\bar{t}$  nechá pevnou (ako celok) priamku  $\mathbf{P}_k \in \mathcal{P}$ , kde  $\mathbf{P}_k$  je cyklická grupa generovaná prvkom  $t$ . Každá priamka  $\mathbf{P}_k + a$  ( $a \in \mathbf{P}$ ) zostane tiež pevná (ako celok) v translácii  $\bar{t}$ , lebo

$$(\mathbf{P}_k + a)\bar{t} = (\mathbf{P}_k + a) + t = (\mathbf{P}_k + t) + a = \mathbf{P}_k + a,$$

takže  $\bar{t}$  je centrálna.

Priamym výpočtom dá sa overiť, že pri  $n = 2$  je rozdelenie  $\mathcal{P}$  planárne a teda translačná štruktúra z neho zostrojená je translačnou rovinou.

## 2. O EXISTENCIÍ NECENTRÁLNYCH TRANSLAČNÝCH ŠTRUKTÚR

Už na začiatku 1. časti tohoto článku sme povedali, že translačná štruktúra nemusí byť nutne centrálnou, čiže nemusí byť centrálnou každá jej translácia. Existujú totiž translačné štruktúry s neabelovskou translačnou grupou, tj. existujú neabelovské grupy, ktoré pripúšťajú rozdelenie. J. André v [2] (poznámka za vetou 2.4) spomína dve skupiny takýchto grúp: Grupy  $\mathbf{D}_{2n}$  zhodných zobrazení pravidelného dvojhlana (ktorého podstava je pravidelný  $n$ -uholník) na seba\*) a Frobeniove grupy permutácií nejakej konečnej množiny  $S$ . V tejto časti článku uvedieme po jednej konkrétnej grupe z oboch spomínaných skupín – grupu  $\mathbf{D}_8$  zhodných zobrazení pravidelného dvojhlana so štvorcovou podstavou a Frobeniovu grupu permutácií množiny  $S$  pozostávajúcej z piatich prvkov.

---

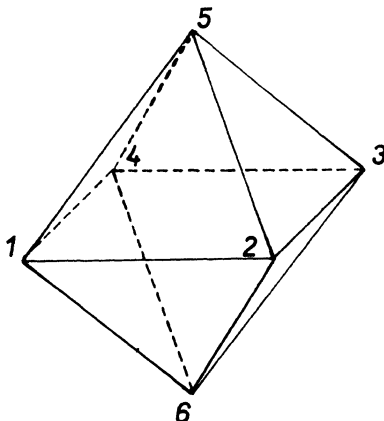
\*) Jedná sa o tzv. Dieedergruppen, uvedená vlastnosť ktorých vyplýva z úvah M. SUZUKIHO v [4]. Suzuki však tieto grupy v [4] neuvádza.

a) Nech je daný pravidelný 4-boký dvojhlan. Vrcholy jeho podstavy označme 1, 2, 3, 4 a vrcholy súmerné podľa roviny podstavy zasa 5, 6.

Uvažujme všetky zhodné zobrazenia uvedeného dvojhľana na seba, tj.: otočenia ihľana okolo osi  $\overline{56}$  ihľana o uhly  $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$  a  $360^\circ$ ; osové súmernosti ihľana podľa uhlopriečok  $\overline{13}$  a  $\overline{24}$  jeho podstavy; osové súmernosti ihľana podľa osí strán  $\overline{12}, \overline{34}$  a  $\overline{14}, \overline{23}$  jeho podstavy

Všetky tieto zobrazenia sú vlastne permutácie množiny  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  vrcholov ihľana a môžeme ich zapísať v tvare súčinov cyklov:

$$\begin{aligned} a_1 &= (1)(2)(3)(4)(5)(6), & a_2 &= (1234)(5)(6), \\ a_3 &= (13)(24)(5)(6), & a_4 &= (1432)(5)(6), \\ a_5 &= (1)(3)(24)(55), & a_6 &= (13)(2)(4)(56), \\ a_7 &= (14)(23)(56), & a_8 &= (12)(34)(56). \end{aligned}$$



Priamym výpočtom sa presvedčíme, že množina  $\mathbf{D}_8 = \{a_i\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$  s operáciou násobenia – skladania permutácií tvorí grupu s neutrálnym prvkom  $a_1$ . Grupová operácia v  $\mathbf{D}_8$  je prehľadne popísaná nasledujúcou tabuľkou:

Tabuľka 1.

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$
$a_1$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$
$a_2$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_1$	$a_7$	$a_8$	$a_6$	$a_5$
$a_3$	$a_3$	$a_4$	$a_1$	$a_2$	$a_6$	$a_5$	$a_8$	$a_7$
$a_4$	$a_4$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_8$	$a_7$	$a_5$	$a_6$
$a_5$	$a_5$	$a_8$	$a_6$	$a_7$	$a_1$	$a_3$	$a_4$	$a_2$
$a_6$	$a_6$	$a_7$	$a_5$	$a_8$	$a_3$	$a_1$	$a_2$	$a_4$
$a_7$	$a_7$	$a_5$	$a_8$	$a_6$	$a_2$	$a_4$	$a_1$	$a_3$
$a_8$	$a_8$	$a_6$	$a_7$	$a_5$	$a_4$	$a_2$	$a_3$	$a_1$

Z tejto tabuľky hneď vidieť, že grupa  $\mathbf{D}_8$  je neabelovská, lebo napr.  $a_2 a_5 = a_7 \neq a_8 = a_5 a_2$ .

Zostrojme teraz rozdelenie  $\mathcal{D}$  grupy  $D_8$ . Použitím tabuľky 1 ľahko zistíme, že množiny

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, & A_2 &= \{a_1, a_5\}, & A_3 &= \{a_1, a_6\}, \\ A_4 &= \{a_1, a_7\}, & A_5 &= \{a_1, a_8\} \end{aligned}$$

sú podgrupy grupy  $D_8$ , vyhovujúce vlastnostiam grupového rozdelenia, pretože každé dve majú spoločný práve jeden prvok  $a_1$  a každý prvok  $a_i$  ( $i = 2, 3, \dots, 8$ ) leží práve v jednej podgrupe  $A_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 5$ ). Preto je

$$\mathcal{D} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}.$$

Z rozdelenia  $\mathcal{D}$  grupy  $D_8$  zostrojíme translačnú štruktúru  $\mathfrak{T}$  podobne ako v 1. časti článku:

Bodmi štruktúry  $\mathfrak{T}$  budú prvky grupy  $D_8$ .

Priamkami štruktúry  $\mathfrak{T}$  nazveme pravé triedy rozkladu grupy  $D_8$  podľa podgrúp  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) z rozdelenia  $\mathcal{D}$ :

$$\begin{aligned} &A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \{a_5, a_6, a_7, a_8\}, \{a_2, a_5\}, \{a_2, a_6\}, \{a_2, a_7\}, \{a_2, a_8\}, \\ &\{a_3, a_5\}, \{a_3, a_6\}, \{a_3, a_7\}, \{a_3, a_8\}, \{a_4, a_5\}, \{a_4, a_6\}, \{a_4, a_7\}, \{a_4, a_8\}. \end{aligned}$$

Rovnoběžnosť priamok v štruktúre  $\mathfrak{T}$  budeme definovať rozkladom množiny všetkých priamok na triedy navzájom rovnobežných priamok:

$$\begin{aligned} &A_1, \{a_5, a_6, a_7, a_8\}; \\ &A_2, \{a_2, a_8\}, \{a_3, a_6\}, \{a_4, a_7\}; \\ &A_3, \{a_2, a_7\}, \{a_3, a_5\}, \{a_4, a_8\}; \\ &A_4, \{a_2, a_5\}, \{a_3, a_8\}, \{a_4, a_6\}; \\ &A_5, \{a_2, a_6\}, \{a_3, a_7\}, \{a_4, a_5\}. \end{aligned}$$

Použitím tabuľky 1 môžeme ľahko overiť, že v štruktúre  $\mathfrak{T}$  s takto definovanými bodmi, priamkami a rovnobežnosťou priamok sú splnené axiomy (t1) až (t4). Platnosť axiómu (t5) ukážeme takto: Ku každému prvku  $a_i \in D_8$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) priradíme zobrazenie  $\bar{a}_i$  grupy  $D_8$  na seba, v ktorom pre každý prvok  $a_j \in D_8$  ( $j = 1, 2, \dots, 8$ ) platí

$$(5) \quad a_j \bar{a}_i = a_j a_i.$$

Ľahko sa zistí (užitím tabuľky 1), že zobrazenie  $\bar{a}_i$  je identita a že každé zo zobrazení  $\bar{a}_i$  ( $i = 2, 3, \dots, 8$ ) nenechá pevným žiaden bod štruktúry  $\mathfrak{T}$  a každú priamku štruktúry  $\mathfrak{T}$  zobrazí na priamku s ňou rovnobežnú, tj. že je transláciou štruktúry  $\mathfrak{T}$ . Množinu všetkých translácií  $\bar{a}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) označme T. Priradenie  $\varphi : a_i \rightarrow \bar{a}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) je izomorfizmus grupy  $D_8$  na množinu T s operáciou skladania

zobrazení a preto  $T$  je tiež grupou. Grupa  $T$  je tranzitívna na množine bodov štruktúry  $\mathfrak{T}$ , lebo ku každým dvom bodom  $a_i, a_j \in D_8$  existuje jediná translácia

$$\overline{a_i^{-1}a_j} \in T,$$

ktorá zobrazí bod  $a_i$  do bodu  $a_j$ .

Zostrojená translačná štruktúra  $\mathfrak{T}$  nie je translačnou rovinou. Z rozkladu množiny priamok štruktúry  $\mathfrak{T}$  na triedy navzájom rovnobežných priamok vidíme, že v štruktúre  $\mathfrak{T}$  existujú priamky, ktoré nie sú rovnobežné a sa nepretínajú. Takými sú napr. tieto priamky:  $\{a_2, a_8\}$  a  $\{a_3, a_5\}$ .

Obráťme teraz pozornosť na centrálné translácie translačnej štruktúry  $\mathfrak{T}$ . Translácie  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$  z grupy  $T$  nechávajú pevnými (ako celok) obe priamky  $A_1, \{a_5, a_6, a_7, a_8\}$ , vytvárajúce jednu triedu rovnobežiek v štruktúre  $\mathfrak{T}$ , preto sú centrálné. Naproti tomu žiadna z translácií  $\bar{a}_5, \bar{a}_6, \bar{a}_7, \bar{a}_8$  nenechá pevnými (ako celok) všetky priamky jednej triedy navzájom rovnobežných priamok štruktúry  $\mathfrak{T}$ . Napr. translácia  $\bar{a}_5$  necháva pevnými (ako celok) priamky  $A_2, \{a_3, a_6\}$ , ale priamky  $\{2, a_8\}, \{a_4, a_7\}$  z tej istej triedy rovnobežiek prevádza jednu do druhej. Pretože nie všetky translácie z translačnej grupy  $T$  translačnej štruktúry  $\mathfrak{T}$  sú centrálné, je štruktúra  $\mathfrak{T}$  necentrálna.

b) V tomto odstavci zostrojíme translačnú štruktúru z rozdelenia tzv. Frobeniovej grupy.

**Definícia.** Grupu  $P$  permutácií nejakej konečnej množiny  $S$  symbolov  $i, j, \dots$  nazývame *Frobeniovou grupou*, ak má nasledujúcu vlastnosť:

(F) Ak pre prvky  $i \neq j$  množiny  $S$  a permutáciu  $a \in P$  platí  $ia = i$  a súčasne  $ja = j$ , potom je  $a$  identická permutácia  $1$ .

Z tejto definície vyplýva, že každá permutácia z grupy  $P$  je jednoznačne určená svojím účinkom na dva prvky z množiny  $S$ . Ak totiž permutácie  $a, b \in P$  majú rovnaký účinok na prvky  $i \neq j$  z množiny  $S$ , tj.  $ia = ib, ja = jb$ , potom platí

$$iab^{-1} = i \quad \text{a súčasne} \quad jab^{-1} = j.$$

$P$  je grupa, preto aj  $ab^{-1}$  je permutácia z  $P$ . Podľa definície musí byť  $ab^{-1} = 1$ , to znamená  $a = b$ .

Nech je daná množina  $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Zostrojíme Frobeniovu grupu permutácií tejto množiny  $S$ . Grupa  $P$  bude pozostávať práve z týchto permutácií:

1. identickej permutácie  $1$ ;
2. permutácií

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

ktoré premiestňujú všetky prvky množiny  $S$ ;

### 3. permutácií

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad d_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad d_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

ktoré nechávajú na mieste práve jeden prvok množiny  $S$ .

Označme:

$$\mathbf{A} = \{1, a_1, a_2, a_3, a_4\},$$

$$\mathbf{B} = \{1, b_1, b_2, b_3\},$$

$$\mathbf{C} = \{1, c_1, c_2, c_3\},$$

$$\mathbf{D} = \{1, d_1, d_2, d_3\},$$

$$\mathbf{E} = \{1, e_1, e_2, e_3\},$$

$$\mathbf{F} = \{1, f_1, f_2, f_3\}.$$

Priamym výpočtom sa môžeme presvedčiť, že zjednotenie

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C} \cup \mathbf{D} \cup \mathbf{E} \cup \mathbf{F}$$

je naozaj hľadaná Frobeniova grupa permutácií množiny  $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Operácia násobenia – skladania permutácií v  $\mathbf{P}$  je prehľadne popísaná v tabuľke 2 na nasledujúcej strane. Z tejto tabuľky hneď vidíme, že grupa  $\mathbf{P}$  nie je abelovská, lebo je napr.  $b_1 c_1 = f_2$  a  $c_1 b_1 = e_3$ .

Použitím tabuľky 2 ľahko overíme, že podmnožiny  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}$  grupy  $\mathbf{P}$  sú (abelovskými) podgrupami grupy  $\mathbf{P}$ . Každé dve z nich majú spoločnú len identickú permutáciu  $1$ . Každý prvok grupy  $\mathbf{P}$ , rôznej od  $1$ , patrí práve do jednej z podgrúp  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}$ , preto  $\mathcal{P} = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}\}$  je rozdelenie grupy  $\mathbf{P}$ .

Z rozdelenia  $\mathcal{P}$  grupy  $\mathbf{P}$  zostrojíme translačnú štruktúru  $\mathfrak{T}$  podobne ako v predchádzajúcich príkladoch:

Bodmi štruktúry  $\mathfrak{T}$  budú prvky grupy  $\mathbf{P}$ .

Tabuľka 2.

	$l$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
$l$	$l$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
$a_1$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$l$	$e_2$	$c_2$	$d_3$	$e_1$	$d_1$	$f_1$	$e_3$	$b_1$	$f_3$	$b_3$	$c_3$	$f_2$	$d_2$	$b_2$	$c_1$
$a_2$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$l$	$a_1$	$c_3$	$d_1$	$f_3$	$b_3$	$e_3$	$d_2$	$f_2$	$e_2$	$c_1$	$d_3$	$f_1$	$b_2$	$b_1$	$c_2$	$e_1$
$a_3$	$a_3$	$a_4$	$l$	$a_1$	$a_2$	$f_1$	$e_3$	$c_1$	$d_3$	$f_2$	$b_1$	$b_2$	$c_3$	$e_1$	$f_3$	$d_2$	$c_2$	$e_2$	$d_1$	$b_3$
$a_4$	$a_4$	$l$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$d_2$	$f_2$	$e_1$	$f_3$	$b_2$	$e_2$	$c_2$	$f_1$	$b_3$	$c_1$	$b_1$	$d_1$	$c_3$	$e_3$	$d_3$
$b_1$	$b_1$	$f_1$	$e_2$	$d_2$	$c_3$	$b_3$	$l$	$b_2$	$f_2$	$a_3$	$d_3$	$a_1$	$f_3$	$e_3$	$d_1$	$c_1$	$a_4$	$e_1$	$a_2$	$c_2$
$b_2$	$b_2$	$d_1$	$f_2$	$c_2$	$e_3$	$l$	$b_3$	$b_1$	$e_2$	$f_3$	$a_4$	$e_1$	$a_3$	$c_3$	$f_1$	$a_2$	$d_3$	$a_1$	$c_1$	$d_2$
$b_3$	$b_3$	$e_1$	$c_1$	$f_3$	$d_3$	$b_2$	$b_1$	$l$	$a_2$	$d_2$	$e_3$	$f_1$	$c_2$	$a_4$	$a_1$	$f_2$	$c_3$	$d_1$	$e_2$	$a_3$
$c_1$	$c_1$	$f_3$	$d_3$	$b_3$	$e_1$	$e_3$	$f_1$	$a_3$	$l$	$c_3$	$c_2$	$e_2$	$f_3$	$a_2$	$a_4$	$d_1$	$b_1$	$b_2$	$d_2$	$a_1$
$c_2$	$c_2$	$e_3$	$b_2$	$d_1$	$f_2$	$a_1$	$d_3$	$e_2$	$c_3$	$c_1$	$l$	$b_3$	$a_4$	$f_1$	$d_2$	$a_3$	$f_3$	$a_2$	$e_1$	$b_1$
$c_3$	$c_3$	$b_1$	$f_1$	$e_2$	$d_2$	$f_3$	$a_2$	$d_1$	$c_2$	$l$	$c_1$	$a_3$	$e_1$	$b_2$	$f_2$	$b_3$	$a_1$	$d_3$	$a_4$	$e_3$
$d_1$	$d_1$	$f_2$	$c_2$	$e_3$	$b_2$	$a_2$	$f_3$	$c_3$	$f_1$	$e_1$	$a_1$	$d_3$	$l$	$d_2$	$b_1$	$a_4$	$c_1$	$a_3$	$b_3$	$e_2$
$d_2$	$d_2$	$c_3$	$b_1$	$f_1$	$e_2$	$e_1$	$a_4$	$f_2$	$e_3$	$a_2$	$b_3$	$l$	$d_3$	$d_1$	$c_2$	$f_3$	$a_3$	$c_1$	$a_1$	$b_2$
$d_3$	$d_3$	$b_3$	$e_1$	$c_1$	$f_3$	$c_2$	$e_2$	$a_1$	$a_3$	$b_1$	$f_2$	$d_2$	$d_1$	$l$	$a_2$	$b_2$	$f_1$	$e_3$	$c_3$	$a_4$
$e_1$	$e_1$	$c_1$	$f_3$	$d_3$	$b_3$	$f_2$	$d_2$	$a_4$	$a_1$	$f_1$	$d_1$	$c_3$	$b_2$	$a_3$	$l$	$e_3$	$e_2$	$c_2$	$b_1$	$a_2$
$e_2$	$e_2$	$d_2$	$c_3$	$b_1$	$f_1$	$d_3$	$a_1$	$c_2$	$b_2$	$a_4$	$f_3$	$a_2$	$c_1$	$f_2$	$e_3$	$e_1$	$l$	$b_3$	$a_3$	$d_1$
$e_3$	$e_3$	$b_2$	$d_1$	$f_2$	$c_2$	$a_3$	$c_1$	$f_1$	$d_2$	$b_3$	$a_2$	$f_3$	$a_1$	$b_1$	$e_2$	$l$	$e_1$	$a_4$	$d_3$	$c_3$
$f_1$	$f_1$	$e_2$	$d_2$	$c_3$	$b_1$	$c_1$	$a_3$	$e_3$	$d_1$	$a_1$	$e_1$	$a_4$	$b_3$	$c_2$	$b_2$	$d_3$	$a_2$	$f_3$	$l$	$f_2$
$f_2$	$f_2$	$c_2$	$e_3$	$b_2$	$d_1$	$a_4$	$e_1$	$d_2$	$b_1$	$d_3$	$a_3$	$c_1$	$a_2$	$e_2$	$c_3$	$a_1$	$b_3$	$l$	$f_3$	$f_1$
$f_3$	$f_3$	$d_3$	$b_3$	$e_1$	$c_1$	$d_1$	$c_3$	$a_2$	$a_4$	$e_2$	$b_2$	$b_1$	$e_3$	$a_1$	$a_3$	$c_2$	$d_2$	$f_2$	$f_1$	$l$

Priamkami štruktúry  $\mathfrak{I}$  nazveme pravé triedy rozkladu grupy  $\mathbf{P}$  podľa podgrúp z rozdelenia  $\mathcal{P}$ .

Rovnobežnosť priamok štruktúry  $\mathfrak{I}$  určíme rozkladom množiny všetkých priamok na triedy navzájom rovnobežných priamok. Budú to tieto triedy:

- A**,  $\{b_1, c_3, d_2, e_2, f_1\}$ ,  $\{b_2, c_2, d_1, e_2, f_2\}$ ,  $\{b_3, c_1, d_3, e_1, f_3\}$  ;
- B**,  $\{a_1, d_1, e_1, f_1\}$ ,  $\{a_2, c_1, e_2, f_2\}$ ,  $\{a_3, c_2, d_2, f_3\}$ ,  $\{a_4, c_3, d_3, e_3\}$  ;
- C**,  $\{a_1, b_1, e_3, f_3\}$ ,  $\{a_2, b_2, d_3, f_1\}$ ,  $\{a_3, b_3, d_1, e_2\}$ ,  $\{a_4, d_2, e_1, f_2\}$  ;
- D**,  $\{a_1, b_3, c_3, f_2\}$ ,  $\{a_2, b_1, c_2, e_1\}$ ,  $\{a_3, c_1, e_3, f_1\}$ ,  $\{a_4, b_2, e_2, f_3\}$  ;
- E**,  $\{a_1, b_2, c_1, d_2\}$ ,  $\{a_2, c_3, d_1, f_3\}$ ,  $\{a_3, b_1, d_3, f_2\}$ ,  $\{a_4, b_3, c_2, f_1\}$  ;
- F**,  $\{a_1, c_2, d_3, e_2\}$ ,  $\{a_2, b_3, d_2, e_3\}$ ,  $\{a_3, b_2, c_3, e_1\}$ ,  $\{a_4, b_1, c_1, d_1\}$  .

Použitím tabuľky 2 dá sa ľahko ukázať, že v štruktúre  $\mathfrak{I}$  s vyššie definovanými bodmi, priamkami a rovnobežnosťou priamok platia axiómy **(t1)** až **(t4)**. Ukážeme len platnosť axiómy **(t5)**: Ku každému prvku  $t \in \mathbf{P}$  priradíme zobrazenie  $\bar{t}$  grupy  $\mathbf{P}$  na seba, definované vzťahom

$$(6) \quad x\bar{t} = xt \quad \text{pre všetky } x \in \mathbf{P} .$$

Je zrejmé, že  $\bar{t}$  je identické zobrazenie. Použitím tabuľky 2 môžeme overiť, že každé zobrazenie  $\bar{t}$ , kde  $t \neq l$ , nenechá pevným žiadny bod štruktúry  $\mathfrak{I}$  a každú priamku

štruktúry  $\mathfrak{T}$  zobrazí na priamku s ňou rovnobežnú, tj. že  $\bar{t}$  je transláciou v štruktúre  $\mathfrak{T}$ . Množinu všetkých translácií definovaných vzťahom (6) označme  $T$ . Priradenie  $\varphi : t \rightarrow \bar{t}$  je izomorfizmus grupy  $\mathbf{P}$  na množinu  $T$  s operáciou skladania zobrazení a preto aj  $T$  je grupou. Grupa  $T$  je tranzitívna na množine všetkých bodov štruktúry  $\mathfrak{T}$ , lebo ku každým dvom bodom  $x, y \in \mathbf{P}$  existuje práve jedna translácia

$$\overline{x^{-1}y} \in T,$$

ktorá zobrazuje bod  $x$  do bodu  $y$ .

Translačná štruktúra, ktorú sme tu zostrojili, nie je translačnou rovinou, pretože z rozkladu množiny priamok štruktúry  $\mathfrak{T}$  na triedy navzájom rovnobežných priamok vidíme, že v štruktúre  $\mathfrak{T}$  existujú nerovnobežné priamky, ktoré sa nepretínajú. Sú to napr. priamky  $\mathbf{B}$  a  $\{a_4, d_2, e_1, f_2\}$ .

Ešte treba ukázať, že táto translačná štruktúra je necentrálna. Pomocou tabuľky 2 zistíme, že translácie  $\bar{1}, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$  z grupy  $T$  nechajú pevnou ako celok priamku  $\mathbf{A}$  a tiež ďalšie tri priamky rovnobežné s  $\mathbf{A}$ . Sú to teda centrálné translácie. Žiadna zo zvyšných translácií z grupy  $T$  nenechá pevnými (ako celok) všetky priamky z tej istej triedy navzájom rovnobežných priamok štruktúry  $\mathfrak{T}$ . Preto viac centrálnych translácií grupa  $T$  neobsahuje. Z toho vyplýva, že zostrojená translačná štruktúra nie je centrálna.

#### Literatúra

- [1] André J.: Über Parallelstrukturen, Math. Zeit 76 (1961), 85—102.
- [2] André J.: Über Parallelstrukturén, Math. Zeit. 76 (1961), 155—163.
- [3] Baer R.: Partitionen abelscher Gruppen, Arch. d. Math. 14 (1964), 73—87.
- [4] Suzuki M.: On the finite groups with a complete partition, J. Math. Soc. Jap. 2 (1950), 165—185.

*Adresa autora:* 010 88 Žilina, Marxa-Engelsa 25 (Vysoká škola dopravná).

#### Summary

### TRANSLATION STRUCTURES CENTRAL AND NON-CENTRAL TRANSLATION STRUCTURES

JAROSLAV LETTRICH, Žilina

Constructions of all, both finite and infinite, central translation structures are described in the first part of the paper, while the second part includes two examples of non-central translation structures constructed from the decomposition of non-abelian groups.