Časopis pro pěstování matematiky

Miloslav Jůza

Sur la dérivabilité des fonctions composées

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 99 (1974), No. 4, 352--362

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117856

Czechoslovak Mathematical Journal, 24 (99) 1974, Praha

SUR LA DÉRIVABILITÉ DES FONCTIONS COMPOSÉES

MILOSLAV JŮZA, Praha

(Reçu le 7. mai 1972)

Dans ce travail, nous allons construire une paire de fonctions F, G d'une variable réelle possédant les propriétés suivantes:

1. F et G sont continues;
2. F et G ne possèdent de dérivée (finie ou infinie) dans aucun point;
3. il existe un point où la fonction composée $F \circ G$ possède une dérivée finie.

1. Soient a, b, c trois nombres réels, $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$. Définissons par l'induction une suite de nombres naturels $\alpha(1), \alpha(2), \ldots$:

$\alpha(1) = 1$;

$\alpha(n - 1)$ étant déjà défini, soit $\alpha(n)$ le plus petit nombre naturel tel que

$$\alpha(n) > \alpha(n-1)\,, \quad \sum_{\nu=\alpha(n)}^{\infty} \frac{1}{a^\nu} < \frac{1}{n\,.\,b^{\alpha(n-1)!}}\,. \tag{1}$$

On a évidemment

$$\alpha(n) \geqq n \tag{2}$$

pour chaque n naturel.

2. Définissons les fonctions f, f_n, F par les formules:

$$f(t) = \inf_{k \text{ entier}} |t - k|\,,$$

$$f_n(t) = 0 \qquad \text{pour} \quad |t| < \frac{1}{b^{\alpha(n)!}}$$

$$f_n(t) = f(b^{\alpha(n)!}t) \quad \text{pour} \quad |t| \geqq \frac{1}{b^{\alpha(n)!}}\,,$$

$$F(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a^{-\alpha(\nu)} f_\nu(t)\,.$$

Pour les nombres réels t, t_0 nous avons

$$0 \leqq f_n(t) \leqq \tfrac{1}{2}, \tag{3}$$

$$|f_n(t) - f_n(t_0)| \leqq b^{\alpha(n)!}|t - t_0|. \tag{4}$$

3. Pour n naturel, soit ε_n le plus petit nombre réel tel que

$$\varepsilon_n \geqq n^{-1/2} b^{-\alpha(n)!}\,; \quad c^{(\alpha(n)!)!}\varepsilon_n \quad \text{soit un nombre entier}. \tag{5}$$

Définissons les fonctions g_n, G par les formules:

$$g_n(t) = 0 \qquad \text{pour} \quad |t| < \varepsilon_n,$$

$$g_n(t) = f(c^{(\alpha(n)!)!}t) \quad \text{pour} \quad |t| \geqq \varepsilon_n,$$

$$G(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b^{-\alpha(\nu)!}\, g_\nu(t).$$

Pour les nombres réels t, t_0 on a:

$$0 \leqq g_n(t) \leqq \tfrac{1}{2}, \tag{6}$$

$$|g_n(t) - g_n(t_0)| \leqq c^{(\alpha(n)!)!}|t_n - t_0|. \tag{7}$$

4. *Les fonctions F et G sont continues.* En effet, les fonctions f_n, g_n sont continues et d'après (3), (6) et (2) on a

$$|a^{-\alpha(\nu)} f_\nu(t)| \leqq \tfrac{1}{2}a^{-\alpha(\nu)} \leqq \tfrac{1}{2}a^{-\nu},$$

$$|b^{-\alpha(\nu)!}\, g_\nu(t)| \leqq \tfrac{1}{2}b^{-\alpha(\nu)!} < \tfrac{1}{2}b^{-\nu}.$$

Les séries $a^{-\nu}$, $b^{-\nu}$ convergent, donc les fonctions F et G sont continues d'après le théorème de Weierstrass.

5. *Soit $t_0 \neq 0$. Alors la fonction F ne possède pas de dérivée (finie ou infinie) au point t_0.*

En effet, définissons, pour n naturel, les nombres t_n, u_n d'après la règle suivante:

si $f(b^{\alpha(n)!}t_0) \leqq \frac{1}{4}$, alors u_n est le plus grand nombre, t_n le plus petit nombre, avec les propriétés:

$$u_n < t_0 < t_n,$$

$$f(b^{\alpha(n)!}t_n) = f(b^{\alpha(n)!}u_n) = \tfrac{1}{2}\,;$$

si $f(b^{\alpha(n)!}t_0) > \frac{1}{4}$, alors u_n est le plus grand nombre, t_n le plus petit nombre, avec les propriétés:

$$u_n < t_0 < t_n ,$$

$$f(b^{\alpha(n)!}t_n) = f(b^{\alpha(n)!}u_n) = 0 .$$

Pour $n > n_1 = \lg(2/t_0)/\lg b$, on a

$$\frac{2}{b^{\alpha(n)!}} \leqq \frac{2}{b^n} < t_0 ,$$

alors d'après la définition de f_n, nous avons

$$f_n(t_0) = f(b^{\alpha(n)!}t_0) ,$$

$$f_n(t_n) = f(b^{\alpha(n)!}t_n) ,$$

$$f_n(u_n) = f(b^{\alpha(n)!}u_n)$$

et on voit aisément que l'on a pour $n > n_1$:

$$\tag{8} \tfrac{1}{4}b^{-\alpha(n)!} \leqq |t_n - t_0| < b^{-\alpha(n)!} ,$$

$$\tag{9} \tfrac{1}{4}b^{-\alpha(n)!} \leqq |u_n - t_0| < b^{-\alpha(n)!} ,$$

$$\tag{10} \operatorname{sgn}(t_n - t_0) = -\operatorname{sgn}(u_n - t_0) ,$$

$$\tag{11} |f_n(t_n) - f_n(t_0)| \geqq \tfrac{1}{4}$$

$$\tag{12} |f_n(u_n) - f_n(t_0)| \geqq \tfrac{1}{4}$$

$$\tag{13} \operatorname{sgn}(f_n(t_n) - f_n(t_0)) = \operatorname{sgn}(f_n(u_n) - f_n(t_0)) .$$

Pour $n > n_2 = \max(n_1, 3, 1 + 2\lg a/\lg b, \lg(16/(a-1))/\lg a)$ nous avons d'après (2), (4) et (8):

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n-1} a^{-\alpha(\nu)}(f_\nu(t_n) - f_\nu(t_0))\right| \leqq \sum_{\nu=1}^{n-1} a^{-\alpha(\nu)}|f_\nu(t_n) - f_\nu(t_0)| \leqq$$

$$\leqq \sum_{\nu=1}^{n-1} a^{-\alpha(\nu)}b^{\alpha(\nu)!}|t_n - t_0| < \sum_{\nu=1}^{n-1} a^{-\nu}b^{\alpha(\nu)!-\alpha(n)!} < b^{(\alpha(n)-1)!-\alpha(n)!}\sum_{\nu=1}^{\infty} a^{-\nu} =$$

$$= \left(\frac{1}{b^{\alpha(n)-1}}\right)^{(\alpha(n)-1)!}\frac{1}{a-1} = \left(\frac{1}{a^{(2\lg b/(2\lg a))(\alpha(n)-1)}}\right)^{(\alpha(n)-1)!}\frac{1}{a-1} <$$

$$< \left(\frac{1}{a^2}\right)^{(\alpha(n)-1)!}\frac{1}{a-1} < a^{-2\alpha(n)}(a-1)^{-1} <$$

$$< a^{-\alpha(n)}a^{-\lg(16/(a-1))/\lg a}(a-1)^{-1} = \tfrac{1}{16}a^{-\alpha(n)} .$$

Alors, pour $n > n_2$ nous avons

$$(14) \qquad \Big|\sum_{\nu=1}^{n-1} a^{-\alpha(\nu)}(f_\nu(t_n) - f_\nu(t_0)\Big| < \tfrac{1}{16}a^{-\alpha(n)}.$$

Pour $n > n_3 = \max(7, \lg a/\lg b)$, nous avons d'après (3), (1) et (2):

$$\Big|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a^{-\alpha(\nu)}(f_\nu(t_n) - f_\nu(t_0))\Big| \leqq \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a^{-\alpha(\nu)} \leqq$$

$$\leqq \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=\alpha(n+1)}^{\infty} a^{-\nu} < \tfrac{1}{2}(n+1)^{-1}\, b^{-\alpha(n)!} < \tfrac{1}{16}\big(a^{(\lg b/\lg a)(\alpha(n)-1)!}\big)^{-\alpha(n)} < \tfrac{1}{16}a^{-\alpha(n)}.$$

Alors, pour $n > n_3$ nous obtenons

$$(15) \qquad \Big|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a^{-\alpha(\nu)}(f_\nu(t_n) - f_\nu(t_0)\Big| < \tfrac{1}{16}a^{-\alpha(n)}.$$

Pour $n > \max(n_2, n_3)$, on obtient de (11), (14) et (15):

$$|F(t_n) - F(t_0)| = \Big|\sum_{\nu=1}^{\infty} a^{-\alpha(\nu)}(f_\nu(t_n) - f_\nu(t_0))\Big| \geqq$$

$$\geqq a^{-\alpha(n)}|f_n(t_n) - f_n(t_0)| - \Big|\sum_{\nu=1}^{n-1} a^{-\alpha(\nu)}(f_\nu(t_n) - f_\nu(t_0))\Big| -$$

$$- \Big|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a^{-\alpha(\nu)}(f_\nu(t_n) - f_\nu(t_0))\Big| > a^{-\alpha(n)}(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{16}) = \tfrac{1}{8}a^{-\alpha(n)}.$$

Alors, pour $n > \max(n_2, n_3)$, on a

$$(16) \qquad |F(t_n) - F(t_0)| > \tfrac{1}{8}a^{-\alpha(n)}.$$

A l'aide de (9) et (12), on obtient aussi

$$(17) \qquad |F(u_n) - F(t_0)| > \tfrac{1}{8}a^{-\alpha(n)}$$

et de (13) on déduit

$$(18) \qquad \operatorname{sgn}(F(t_n) - F(t_0)) = \operatorname{sgn}(F(u_n) - F(t_0))$$

pour $n > \max(n_2, n_3)$.

Pour $n > n_0 = \max(n_2, n_3, \log(2a)/\lg b)$, nous obtenons d'après (16), (8) et (2):

$$\left|\frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0}\right| > \frac{\frac{1}{8}a^{-\alpha(n)}}{b^{-\alpha(n)!}} = \frac{1}{8}\left(\frac{b^{(\alpha(n)-1)!}}{a}\right)^{\alpha(n)} >$$

$$> \frac{1}{8}\left(\frac{b^n}{a}\right)^{\alpha(n)} > \frac{1}{8}\left(\frac{b^{\lg 2a/\lg b}}{a}\right)^{\alpha(n)} \geqq \tfrac{1}{8}\cdot 2^n.$$

Alors, pour $n > n_0$ nous avons

$$(19) \qquad \left|\frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0}\right| > \tfrac{1}{8} \cdot 2^n .$$

D'après (17) et (9) on a aussi

$$(20) \qquad \left|\frac{F(u_n) - F(t_0)}{u_n - t_0}\right| > \tfrac{1}{8} \cdot 2^n$$

et d'après (18) et (10) on a

$$(21) \qquad \operatorname{sgn} \frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = - \operatorname{sgn} \frac{F(u_n) - F(t_0)}{u_n - t_0} .$$

Parce que, d'après (8) et (9), on a $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$, $\lim_{n\to\infty} u_n = t_0$, nous déduisons de (19) et (20) que la fonction F n'a pas de dérivée finie au point t_0. De (21) nous déduisons qu'elle ne possède même de dérivée infinie en ce point.

6. *La fonction F ne possède pas de dérivée (finie ou infinie) au point $t_0 = 0$ non plus.*

En effet, posons, pour n naturel

$$(22) \qquad t_n = -u_n = \tfrac{3}{2} b^{-\alpha(n)!} .$$

Pour chaque n, on a

$$(23) \qquad f_n(t_n) = f(b^{\alpha(n)!} t_n) = f(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{1}{2} .$$

En outre, pour $n > n_1 = \max(3, 1 + 2 \lg a/\lg b, \lg(16/(a-1))/\lg a)$, il y a

$$(24) \qquad \left|\sum_{\nu=1}^{n-1} a^{-\alpha(\nu)}(f_\nu(t_n) - f_\nu(0)\right| < \tfrac{1}{8} a^{-\alpha(n)} ,$$

car d'après (4) et (2):

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n-1} a^{-\alpha(\nu)}(f_\nu(t_n) - f_\nu(0))\right| \leqq \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{b^{\alpha(\nu)!}}{a^{\alpha(\nu)}} t_n = \tfrac{3}{2} \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{b^{\alpha(\nu)!}}{a^{\alpha(\nu)}} \cdot \frac{1}{b^{\alpha(n)!}} <$$

$$< 2 \cdot \frac{b^{(\alpha(n)-1)!}}{b^{\alpha(n)!}} \sum_{\nu=1}^{\infty} a^{-\nu} = 2 \cdot \left(\frac{1}{b^{\alpha(n)-1}}\right)^{(\alpha(n)-1)!} \frac{1}{a-1} <$$

$$< \left(\frac{1}{a^2}\right)^{(\alpha(n)-1)!} \cdot \frac{2}{a-1} < \frac{1}{a^{2\alpha(n)}} \cdot \frac{2}{a-1} < \tfrac{1}{8} a^{-\alpha(n)} .$$

On voit aisément que (15) a lieu aussi pour $t_0 = 0$, si $n > n_3 = \max(7, \lg a/\lg b)$. Si nous tenons encore compte du fait que $f_n(0) = 0$, nous recevrons d'après (23), (24) et (15) pour $n > \max(n_1, n_3)$:

$$|F(t_n) - F(0)| \geqq a^{-\alpha(n)}|f_n(t_n) - f_n(0)| - |\sum_{\nu=1}^{n-1} a^{-\alpha(\nu)}(f_\nu(t_n) - f_\nu(0))| -$$

$$- |\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a^{-\alpha(\nu)}(f_\nu(t_n) - f_\nu(0))| > a^{-\alpha(n)}(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{16}) = \tfrac{5}{16}a^{-\alpha(n)}.$$

Alors, pour $n > \max(n_1, n_3)$, on a

$$|F(t_n) - F(0)| > \tfrac{5}{16}a^{-\alpha(n)}; \tag{25}$$

on peut également obtenir

$$|F(u_n) - F(0)| > \tfrac{5}{16}a^{-\alpha(n)}, \tag{26}$$

$$\operatorname{sgn}(F(t_n) - F(0)) = \operatorname{sgn}(F(u_n) - F(0)) \tag{27}$$

pour $n > \max(n_1, n_3)$.

Pour $n > n_0 = \max(n_1, n_3, \lg(2a)/\lg b)$ nous obtenons d'après (25) et (22):

$$\left|\frac{F(t_n) - F(0)}{t_n}\right| > \frac{\frac{5}{16}a^{-\alpha(n)}}{\frac{3}{2}b^{-\alpha(n)!}} > \frac{5}{24}\cdot\left(\frac{b^n}{a}\right)^{\alpha(n)} > \frac{5}{24}\cdot 2^n.$$

Alors, pour $n > n_0$ nous avons

$$\left|\frac{F(t_n) - F(0)}{t_n}\right| > \frac{5}{24}\cdot 2^n; \tag{28}$$

à l'aide de (26), (27) et (22) nous obtenons aussi

$$\left|\frac{F(u_n) - F(0)}{u_n}\right| > \frac{5}{24}\cdot 2^n, \tag{29}$$

$$\operatorname{sgn}\frac{F(t_n) - F(0)}{t_n} = -\operatorname{sgn}\frac{F(u_n) - F(0)}{u_n}. \tag{30}$$

Comme d'après (22) on a

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

nous déduisons de (28) et (29) que la fonction F n'a pas de dérivée finie au point 0; d'après (30), elle n'y a pas même de dérivée infinie.

7. *Soit $t_0 \neq 0$. Alors la fonction G ne possède pas de dérivée (finie ou infinie) au point t_0.*

En effet, définissons, pour n naturel, les nombres t_n, u_n d'après la règle suivante: si $f(c^{(\alpha(n)!)!}t_0) \leqq \frac{1}{4}$, alors u_n est le plus grand nombre, t_n le plus petit nombre, avec les propriétés:

$$u_n < t_0 < t_n\,,$$
$$f(c^{(\alpha(n)!)!}t_n) = f(c^{(\alpha(n)!)!}u_n) = \tfrac{1}{2}\,;$$

si $f(c^{(\alpha(n)!)!}t_0) > \frac{1}{4}$, alors u_n est le plus grand nombre, t_n le plus petit nombre, avec les propriétés:

$$u_n < t_0 < t_n\,,$$
$$f(c^{(\alpha(n)!)!}t_n) = f(c^{(\alpha(n)!)!}u_n) = 0\,.$$

D'après la définition des nombres ε_n, on a

$$0 < \varepsilon_n < n^{-1/2}b^{-\alpha(n)!} + c^{-(\alpha(n)!)!}\,,$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0\,.$$

Alors, un nombre n_1 existe que pour $n > n_1$ on a

$$\varepsilon_n < |t_0| - c^{-(\alpha(n)!)!}\,.$$

Pour $n > n_1$, il vient

$$g_n(t) = f(c^{(\alpha(n)!)!}t)$$

pour

$$t_0 - c^{-(\alpha(n)!)!} \leqq t \leqq t_0 + c^{-(\alpha(n)!)!}\,;$$

on en déduit

$$g_n(t_n) = f(c^{(\alpha(n)!)!}t_n)\,,$$
$$g_n(u_n) = f(c^{(\alpha(n)!)!}u_n)$$

et l'on voit aisément qu'on a pour $n > n_1$:

$$\tfrac{1}{4}c^{-(\alpha(n)!)!} \leqq |t_n - t_0| < c^{-(\alpha(n)!)!} \tag{31}$$

$$\tfrac{1}{4}c^{-(\alpha(n)!)!} \leqq |u_n - t_0| < c^{-(\alpha(n)!)!} \tag{32}$$

$$\operatorname{sgn}(t_n - t_0) = -\operatorname{sgn}(u_n - t_0)\,, \tag{33}$$

$$|g_n(t_n) - g_n(t_0)| \geqq \tfrac{1}{4}\,, \tag{34}$$

$$|g_n(u_n) - g_n(t_0)| \geqq \tfrac{1}{4}\,, \tag{35}$$

$$\operatorname{sgn}(g_n(t_n) - g_n(t_0)) = \operatorname{sgn}(g_n(u_n) - g_n(t_0))\,. \tag{36}$$

Pour $n > n_2 = \max(n_1, 3, 1 + 2\lg b/\lg c, \lg(16/(b-1))/\lg b)$, nous avons d'après (2), (7) et (31):

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n-1} b^{-\alpha(\nu)!}(g_\nu(t_n) - g_\nu(t_0))\right| \leqq \sum_{\nu=1}^{n-1} b^{-\alpha(\nu)!} c^{(\alpha(\nu)!)!} |t_n - t_0| <$$

$$< \sum_{\nu=1}^{n-1} b^{-\nu} \cdot \frac{c^{(\alpha(\nu)!)!}}{c^{(\alpha(n)!)!}} < \frac{c^{(\alpha(n)!-1)!}}{c^{(\alpha(n)!)!}} \sum_{\nu=1}^{\infty} b^{-\nu} = \frac{1}{b-1} \cdot \left(\frac{1}{c^{\alpha(n)!-1}}\right)^{(\alpha(n)!-1)!} =$$

$$= (b-1)^{-1} \left(b^{(-2\lg c/2\lg b)(\alpha(n)!-1)}\right)^{(\alpha(n)!-1)!} < (b-1)^{-1} \left(b^{-2}\right)^{(\alpha(n)!-1!)} <$$

$$< (b-1)^{-1} b^{-2(\alpha(n)!)} < \tfrac{1}{16} b^{-\alpha(n)!};$$

pour $n > n_3 = \max(n_1, \lg(8b/(b-1))/\lg b)$ on a d'après (6) et (2):

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} b^{-\alpha(\nu)!}(g_\nu(t_n) - g_\nu(t_0))\right| \leqq \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} b^{-\alpha(\nu)!} < \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=\alpha(n+1)!}^{\infty} b^{-\nu} =$$

$$= b^{-\alpha(n+1)!} \frac{b}{2(b-1)} < b^{-2(\alpha(n)!)} \frac{b}{2(b-1)} < \tfrac{1}{16} b^{-\alpha(n)!};$$

alors, d'après (34) on a pour $n > \max(n_2, n_3)$:

$$|G(t_n) - G(t_0)| = \left|\sum_{\nu=1}^{\infty} b^{-\alpha(\nu)!}(g_\nu(t_n) - g_\nu(t_0))\right| \geqq$$

$$\geqq b^{-\alpha(n)!} |g_n(t_n) - g_n(t_0)| - \left|\sum_{\nu=1}^{n-1} b^{-\alpha(\nu)!}(g_\nu(t_n) - g_\nu(t_0))\right| -$$

$$- \left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} b^{-\alpha(\nu)!}(g_\nu(t_n) - g_\nu(t_0))\right| > b^{-\alpha(n)!}\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{16}\right) = \tfrac{1}{8} b^{-\alpha(n)!}$$

et pour $n > n_0 = \max(n_2, n_3, \lg(2b)/\lg c)$ on déduit de (31) et (2):

$$\left|\frac{G(t_n) - G(t_0)}{t_n - t_0}\right| > \frac{1}{8} \frac{c^{(\alpha(n)!)!}}{b^{\alpha(n)!}} = \frac{1}{8}\left(\frac{c^{(\alpha(n)!-1)!}}{b}\right)^{\alpha(n)!} > \frac{1}{8}\left(\frac{c^n}{b}\right)^{\alpha(n)!} > \frac{1}{8}\left(\frac{2b}{b}\right)^{\alpha(n)!} > \frac{1}{8} \cdot 2^n .$$

Alors, pour $n > n_0$ nous obtenons

$$\left|\frac{G(t_n) - G(t_0)}{t_n - t_0}\right| > \tfrac{1}{8} \cdot 2^n ; \tag{37}$$

de (35) et (32) nous pouvons obtenir

$$\left|\frac{G(u_n) - G(t_0)}{u_n - t_0}\right| > \tfrac{1}{8} \cdot 2^n \tag{38}$$

et de (36) et (33):

$$\text{(39)} \qquad \operatorname{sgn} \frac{G(t_n) - G(t_0)}{t_n - t_0} = - \operatorname{sgn} \frac{G(u_n) - G(t_0)}{u_n - t_0} .$$

Comme d'après (31) et (32) on a

$$\lim_{n\to\infty} t_n = t_0 , \quad \lim_{n\to\infty} u_n = t_0 ,$$

nous déduisons de (37) et (38) que la fonction G n'a pas de dérivée finie au point t_0. De (39) nous déduisons qu'elle ne possède même pas de dérivée infinie à ce point.

8. *La fonction G ne possède pas de dérivée (finie ou infinie) au point $t_0 = 0$ non plus.*

En effet, posons, pour n naturel,

$$\text{(40)} \qquad t_n = -u_n = \varepsilon_n + \tfrac{1}{2}c^{-(\alpha(n)!)!} .$$

On a

$$\text{(41)} \qquad g_n(t_n) = g_n(u_n) = \tfrac{1}{2} ,$$

parce que d'après la définition de g_n et de ε_n

$$g_n(t_n) = g_n(u_n) = f(c^{(\alpha(n)!)!}(\varepsilon_n + \tfrac{1}{2}c^{-(\alpha(n)!)!})) = f(c^{(\alpha(n)!)!}\varepsilon_n + \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} .$$

Comme $\varepsilon_n < n^{-1/2}b^{-\alpha(n)!} + c^{-(\alpha(n)!)!}$, on a d'après (2) pour $n > n_1 = \max(2, 1/\lg^2 c, \lg b/\lg c)$:

$$t_n = \varepsilon_n + \tfrac{1}{2}c^{-(\alpha(n)!)!} < n^{-1/2}b^{-\alpha(n)!} + \tfrac{3}{2}c^{-(\alpha(n)!)!} < n^{-1/2}b^{-\alpha(n)!} +$$
$$+ \tfrac{3}{2}c^{-(\alpha(n)!-1)!}b^{-(\alpha(n)!-1)!(\lg c/\lg b)} < n^{-1/2}b^{-\alpha(n)!} + \tfrac{3}{2}c^{-n}b^{-\alpha(n)!\alpha(n)(\lg c/\lg b)} <$$
$$< n^{-1/2}b^{-\alpha(n)!} + \tfrac{3}{2}e^{-n\lg c}b^{-\alpha(n)!} < n^{-1/2}b^{-\alpha(n)!} + \tfrac{3}{2}(n \lg c)^{-1}\, b^{-\alpha(n)!} =$$
$$= n^{-1/2}b^{-\alpha(n)!} + \tfrac{3}{2}n^{-1/2}(n^{1/2} \lg c)^{-1}\, b^{-\alpha(n)!} < n^{-1/2}b^{-\alpha(n)!} +$$
$$+ \tfrac{3}{2}n^{-1/2}b^{-\alpha(n)!} < 3n^{-1/2}b^{-\alpha(n)!} .$$

Alors pour $n > n_1$ on a

$$\text{(42)} \qquad t_n < 3n^{-1/2}b^{-\alpha(n)!} .$$

D'après (5) et (2), nous avons pour $n > \lg 3/\lg b$ et pour $\nu < n$:

$$\frac{3n^{-1/2}b^{-\alpha(n)!}}{\varepsilon_\nu} \leqq \frac{3\nu^{1/2}b^{\alpha(\nu)!}}{n^{1/2}b^{\alpha(n)!}} < 3b^{-\alpha(n)} \leqq 3b^{-n} < 3b^{-\lg 3/\lg b} = 1 ,$$

alors d'après (42) on a

$$t_n < \varepsilon_\nu$$

pour $n > n_2 = \max(n_1, \lg 3/\lg b)$ et $\nu < n$, alors pour ces n et ν on a

$$g_\nu(t_n) = g_\nu(u_n) = 0\,. \tag{43}$$

Pour $n > n_3 = \lg(8b/(b-1))/\lg b$ et pour chaque t nous avons d'après (6) et (2):

$$\Big|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} b^{-\alpha(\nu)!} g_\nu(t)\Big| \leqq \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=n+1}^{\infty} b^{-\alpha(\nu)!} < \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=\alpha(n+1)!}^{\infty} b^{-\nu} =$$

$$= b^{-\alpha(n+1)!}\frac{b}{2(b-1)} \leqq b^{-2(\alpha(n)!)}\frac{b}{2(b-1)} < b^{-\alpha(n)!}b^{-n}\frac{b}{2(b-1)} < \tfrac{1}{16}b^{-\alpha(n)!}.$$

Alors, pour $n > n_3$ et pour chaque t a lieu

$$\Big|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} b^{-\alpha(\nu)!} g_\nu(t)\Big| < \tfrac{1}{16}b^{-\alpha(n)!} \tag{44}$$

et pour $n > \max(n_2, n_3)$ on a d'après (41) et (43):

$$|G(t_n)| = \Big|\sum_{\nu=n}^{\infty} b^{-\alpha(\nu)!} g_\nu(t_n)\Big| \geqq \big|b^{-\alpha(n)!} g_n(t_n)\big| -$$

$$-\Big|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} b^{-\alpha(\nu)!} g_\nu(t_n)\Big| > \tfrac{7}{16}b^{-\alpha(n)!}$$

et aussi

$$|G(u_n)| > \tfrac{7}{16}b^{-\alpha(n)!},$$

$$\operatorname{sgn} G(t_n) = \operatorname{sgn} G(u_n)$$

et de (42) on déduit

$$\left|\frac{G(t_n)}{t_n}\right| > \tfrac{7}{48}n^{1/2}, \tag{45}$$

$$\left|\frac{G(u_n)}{u_n}\right| > \tfrac{7}{48}n^{1/2}, \tag{46}$$

$$\operatorname{sgn}\frac{G(t_n)}{t_n} = -\operatorname{sgn}\frac{G(u_n)}{u_n}. \tag{47}$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ d'après (40) et $G(0) = 0$, nous déduisons de (45) et (46) que la fonction G n'a pas de dérivée finie au point 0; d'après (47), elle n'y a même pas de dérivée infinie.

9. *La fonction $F \circ G$ possède la dérivée* 0 *au point* 0.

En effet, soit $\varepsilon > 0$. Choisissons un nombre naturel N tel que

$$N > \max\left(\varepsilon^{-2}, \frac{\lg(8b/(b-1))}{\lg b}\right) \tag{48}$$

et posons

$$\delta = N^{-1/2} \, . \, b^{-\alpha(N)!} \, . \tag{49}$$

Nous allons prouver que pour $0 < |t| < \delta$ on a

$$\left|\frac{F(G(t))}{t}\right| < \varepsilon \, , \tag{50}$$

et donc, comme $F(G(0)) = 0$, que la fonction $F \circ G$ possède la dérivée 0 au point 0.

Soit donc $|t| < \delta$. La suite $n^{-1/2} b^{-(\alpha(n)!)}$ étant décroissante avec $\lim_{n \to \infty} n^{-1/2} b^{-\alpha(n)!} = 0$, il existe d'après (49) un nombre naturel n que

$$n^{-1/2} b^{-\alpha(n)!} \leqq |t| < (n-1)^{-1/2} \, b^{-\alpha(n-1)!} \, , \quad n > N \, . \tag{51}$$

D'après la définition des fonctions g_ν et d'après (5) on a $g_\nu(t) = 0$ pour $\nu < n$, alors d'après (6) et (44) on a

$$0 < G(t) = b^{-\alpha(n)!} \, g_n(t) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} b^{-\alpha(\nu)!} \, g_\nu(t) < \tfrac{1}{2} b^{-\alpha(n)!} + \tfrac{1}{16} b^{-\alpha(n)!} < b^{-\alpha(n)!} \, .$$

Compte tenu de cette inégalité, on a $f_\nu(G(t)) = 0$ pour $\nu \leqq n$ d'après la définition des fonctions f_ν, alors d'après (3) et (1) nous avons

$$|F(G(t))| = \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a^{-\alpha(\nu)} f_\nu(G(t)) \right| \leqq \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a^{-\alpha(\nu)} \leqq$$

$$\leqq \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=\alpha(n+1)}^{\infty} a^{-\nu} < \tfrac{1}{2}(n+1)^{-1} \, b^{-\alpha(n)!} \, ,$$

donc d'après (51) et (48) on a

$$\left|\frac{F(G(t))}{t}\right| < \frac{n^{1/2} b^{\alpha(n)!}}{2(n+1) \, b^{\alpha(n)!}} < n^{-1/2} < N^{-1/2} < \varepsilon \, ,$$

et (50) a lieu.

Adresse de l'auteur: 106 00 Praha 10 - Zahradní Město, Sasanková 2655.