Josef Král; Jaroslav Lukeš

Brelotovy prostory na jednodimensionálních varietách

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 99 (1974), No. 2, 179--185

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117828`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 99 (1974), Praha

BRELOTOVY PROSTORY NA JEDNODIMENSIONÁLNÍCH VARIETÁCH

JOSEF KRÁL a JAROSLAV LUKEŠ, Praha

(Došlo dne 20. března 1973)

1. Úvod. V dalším X znamená jednodimensionální varietu, tj. Hausdorffův topologický prostor, v němž každý bod má okolí homeomorfní s reálnou osou R^1. Obloukem (resp. kompaktním obloukem) v X rozumíme podmnožinu X homeomorfní s R^1 (resp. s uzavřeným intervalem $\langle 0, 1 \rangle$). Předpokládejme, že každé otevřené množině $U \subset X$ je přiřazen vektorový prostor $\mathscr{H}_U$ spojitých reálných funkcí, nazývaných harmonické funkce na U, tak, že zobrazení $\mathscr{H} : U \mapsto \mathscr{H}_U$ splňuje následující axiomy.

I. Axiom svazku. Jestliže $U \subset V$ jsou otevřené množiny a h je harmonická funkce na V, potom $\mathrm{Rest}_U\, h$ ($=$ restrikce funkce h na množinu U) je harmonická na U; dále, je-li f funkce na U, která je harmonická v okolí každého bodu množiny U, potom f je harmonická na U.

II. Axiom base. Regulární množiny tvoří basi pro topologii X (relativně kompaktní otevřená množina $U \subset X$, jejíž hranice ∂U je neprázdná, je regulární, jestliže každá spojitá funkce f na ∂U má spojité rozšíření H_f^U na $\bar{U} = U \cup \partial U$, harmonické v U; navíc nezáporné, je-li f nezáporná na ∂U).

III. Princip minima. Ke každému $x \in X$ existuje okolí U_x tak, že na U_x existuje striktně kladná harmonická funkce a pro každý kompaktní oblouk $C \subset U_x$ je splněn následující princip minima: Je-li h spojitá funkce na C, nezáporná na ∂C a harmonická na vnitřku C, je h nezáporná na C.

Dvojice $(X, \mathscr{H})$ splňující axiomy I, II, III se nazývá *harmonický prostor*.

Je-li $U \subset X$ regulární množina, potom zobrazení $\omega_x^U : f \mapsto H_f^U(x)$ je pro každé $x \in U$ nezáporná Radonova míra na ∂U, tzv. *harmonická míra* příslušná k U a x, jejíž nosič budeme značit symbolem $\mathrm{spt}\, \omega_x^U$. Řekneme, že bod $x \in X$ je *eliptický*, jestliže x má fundamentální systém regulárních okolí U takových, že $\mathrm{spt}\, \omega_x^U = \partial U$. Harmonický prostor (X, H) nazveme *Brelotův*, jestliže každý bod X je eliptickým bodem.

Protože $(X, \mathscr{H})$ splňuje lokálně axiomy H. BAUERA ([1], str. 11; viz [6], remark

2.1), má svazek $\mathscr{H}$ Doobovu konvergenční vlastnost (limitní funkce neklesající posloupnosti harmonických funkcí na otevřené množině U je harmonická, pokud je konečná na množině husté v U). Je-li tedy $(X, \mathscr{H})$ Brelotův, má $\mathscr{H}$ podle [5], cvičení 3.1.3, Brelotovu konvergenční vlastnost (limitní funkce neklesající posloupnosti harmonických funkcí na oblasti je harmonická, pokud je konečná v jednom bodě) a podle [6], corollary 2.3, má každá komponenta X spočetnou basi.

Je-li F funkce na X, označme $F_{-1}(0) = \{x \in X; F(x) = 0\}$. Pro funkce f, g definované na otevřené množině $M \subset X$ nechť $\{f, g\}_M$ značí množinu všech funkcí, které jsou na každé komponentě množiny M lineární kombinací funkcí f, g.

Buď $(R^1, \mathscr{H})$ Brelotův harmonický prostor. Potom podle [6], lemma 1.2, platí:

(α) Je-li h harmonická funkce na R^1 a množina $h_{-1}(0)$ má hromadný bod, je $h \equiv 0$ na R^1.

(β) (R^1, H) má „rozšiřovací vlastnost," tj. každá harmonická funkce definovaná na podoblasti prostoru R^1 se dá jednoznačně rozšířit na funkci harmonickou v celém R^1 (charakteristika harmonických prostorů s „rozšiřovací vlastností" je podána v [7]).

2. Příklady. (A) *Buďte h, g spojité funkce na R^1 splňující následující podmínky:*

(i) *h, g jsou lineárně nezávislé na R^1,*

(ii) *množiny $h_{-1}(0), g_{-1}(0)$ jsou isolované a $h_{-1}(0) \cap g_{-1}(0) = \emptyset$,*

(iii) *funkce hg^{-1} je prostá na každé komponentě množiny $R^1 \setminus g_{-1}(0)$ a funkce gh^{-1} je prostá na každé komponentě množiny $R^1 \setminus h_{-1}(0)$.*

Potom $(R^1, U \mapsto \{h, g\}_U)$ (kde U probíhá otevřené množiny v R^1) je Brelotův harmonický prostor.

Důkaz. Pomocí Borelovy věty se ověří axiom svazku. Každý interval (a, b), pro nějž $\langle a, b\rangle \subset R^1 \setminus g_{-1}(0)$ anebo $\langle a, b\rangle \subset R^1 \setminus h_{-1}(0)$, je regulární. Toto plyne ihned z (iii) jednoduchým výpočtem. Lehko též zjistíme, že pro každý takový interval je splněn princip minima a nosič harmonické míry $\omega_x^{(a,b)}$ je pro každé $x \in (a, b)$ roven $\partial(a, b)$.

Poznámka. *Jsou-li $a < b$ takové body z $g_{-1}(0)$, že $(a, b) \cap g_{-1}(0) = \emptyset$, je množina $(a, b) \cap h_{-1}(0)$ jednobodová a* $\operatorname{sign} h(a) = -\operatorname{sign} h(b) \neq 0$. *Jestliže* $\sup h_{-1}(0) = +\infty$, *je i* $\sup g_{-1}(0) = +\infty$.

Důkaz. Funkce hg^{-1} je prostá a spojitá na (a, b) a $g(a) = g(b) = 0$. Tedy $\lim_{x \to a+} hg^{-1}(x) = -\lim_{x \to b-} hg^{-1}(x)$ a tyto limity jsou nevlastní. Existuje tudíž právě jedno $\xi \in (a, b)$, pro něž $hg^{-1}(\xi) = 0$.

(B) *Nechť $-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$ a nechť $\mathscr{H} : U \mapsto \mathscr{H}_U$ přiřazuje každé otevřené množině $U \subset (a, b)$ vektorový prostor $\mathscr{H}_U$ všech řešení y diferenciální rovnice $y'' + y = 0$ na U. Pak $((a, b), \mathscr{H}) \equiv H(a, b)$ je Brelotův prostor.*

Důkaz. Položíme-li $h(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ $(x \in R^1)$, pak Brelotův prostor konstruovaný v příkladu (A) splývá s $H(-\infty, +\infty)$.

Poznámka. Jsou známy velmi obecné podmínky na diferenciální operátor P zaručující, že svazek definovaný řešeními rovnice $Pu = 0$ v otevřené podmnožině prostoru R^n určuje Brelotův prostor; o tom viz např. [2].

3. Definice. Zobrazení, které vznikne složením zobrazení φ se zobrazením ψ, budeme značit symbolem $\psi * \varphi$. Řekneme, že harmonický prostor $(X, \mathscr{H})$ je *harmonicky ekvivalentní* (krátce jen *ekvivalentní*) s harmonickým prostorem $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}})$, jestliže existuje homeomorfní zobrazení φ prostoru X na $\tilde{X}$ a kladná spojitá funkce q na $\tilde{X}$ tak, že pro každou otevřenou množinu $G \subset X$ je funkce h harmonická na G, právě když existuje $\tilde{h} \in \tilde{\mathscr{H}}_{\varphi(G)}$, pro niž $h = (q\tilde{h}) * \varphi$ na G.

Vztah ekvivalence právě definovaný je zřejmě reflexivní, symetrický a transitivní.

4. Příklad. Vyšetříme, kdy prostory $H(a_1, b_1)$ a $H(a_2, b_2)$ z příkladu 2(B) jsou harmonicky ekvivalentní.

(A) *Buďte* (a_1, b_1), (a_2, b_2) *omezené intervaly,* $b_1 - a_1 = b_2 - a_2$. *Potom* $H(a_1, b_1)$ *a* $H(a_2, b_2)$ *jsou ekvivalentní.*

Důkaz. Položme $\varphi : x \mapsto x + (a_2 - a_1)$ pro $x \in (a_1, b_1)$, $q = 1$ na (a_2, b_2). Potom pro $x \in (a_1, b_1)$ jest

$$q(\varphi(x)) \sin \varphi(x) = \cos(a_2 - a_1) \sin x + \sin(a_2 - a_1) \, . \cos x \, ,$$

$$q(\varphi(x)) \cos \varphi(x) = \cos(a_2 - a_1) \cos x - \sin(a_2 - a_1) \, . \sin x \, ,$$

odkud již lehko plyne tvrzení.

(B) *Nechť* $(-a, a), (-b, b)$ *jsou omezené intervaly,* $|b - a| \geqq \frac{1}{2}\pi$. *Potom* $H(-a, a)$ *a* $H(-b, b)$ *nejsou ekvivalentní.*

Důkaz. Nechť $0 < a < a + \frac{1}{2}\pi \leqq b$. Nalezněme celé nezáporné k tak, aby $\frac{1}{2}k\pi < a \leqq \frac{1}{2}(k + 1)\pi$ a předpokládejme zprvu, že k je sudé. Nechť $H(-a, a)$ a $H(-b, b)$ jsou ekvivalentní, buďte φ, q příslušné funkce z definice 3, $\varphi : (-a, a) \to$ $\to (-b, b)$. V intervalu $\langle a, b)$ leží alespoň jeden nulový bod funkce cos (a sice bod $(k + 1)\frac{1}{2}\pi$), kromě toho v intervalu $(-a, a)$ je k nulových bodů funkce cos. Tedy množina $\{\varphi_{-1}(x);\ x \in (-b, b),\ \cos x = 0\}$ má alespoň $(k + 2)$ různých prvků. Ale $2a \leqq (k + 1)\pi$, čili existují $A, B \in (-a, a)$ tak, že $0 < |A - B| < \pi$, $\cos \varphi(A) =$ $= \cos \varphi(B) = 0$. Nalezněme dále $\alpha, \beta \in R^1$ tak, aby

$$\alpha \sin x + \beta \cos x = q(\varphi(x)) \, . \cos \varphi(x)$$

pro $x \in (-a, a)$. Potom ovšem $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, $\alpha \sin A + \beta \cos A = \alpha \sin B +$ $+ \beta \cos B = 0$, tedy $\sin A \cos B - \sin B \cos A = \sin(A - B) = 0$, což jest ve sporu s podmínkou $0 < |A - B| < \pi$. Je-li k liché, je úvaha obdobná, pouze pracujeme s funkcí sin místo cos.

(C) *Nechť $k \geqq 0$ je celé, $\frac{1}{2}k\pi < a < b < \frac{1}{2}(k+1)\pi$. Potom $H(-a, a)$ a $H(-b, b)$ jsou ekvivalentní.*

Důkaz. Položme $A = \operatorname{tg} b \,.\, (\operatorname{tg} a)^{-1} > 0$ a předpokládejme pro jednoduchost, že k je liché. Definujeme-li $\varphi(x) = \operatorname{arctg}(A \operatorname{tg} x) + j\pi$ pro $x \in (\frac{1}{2}(2j-1)\pi, \frac{1}{2}(2j+1)\pi))$, $j = 0, 1, \ldots, \frac{1}{2}(k-1)$, $\varphi(x) = \operatorname{arctg}(A \operatorname{tg} x) + \frac{1}{2}k\pi$ pro $x \in (\frac{1}{2}k\pi, a)$, $\varphi(x) = -\varphi(-x)$ pro $x \in (-a, 0)$, $\varphi(\frac{1}{2}j\pi) = \frac{1}{2}j\pi$, je φ rostoucí a spojitá na intervalu $(-a, a)$ a $\varphi((-a, a)) = (-b, b)$. Pro $y \in (-b, b)$ dále položme $q(y) = \cos \varphi_{-1}(y) \,.\, (\cos y)^{-1}$, pokud $\cos y \neq 0$ a $q(y) = A$, pokud $\cos y = 0$. Funkce q je kladná a spojitá na $(-b, b)$, přičemž pro $x \in (-a, a)$ platí

$$q(\varphi(x)) \sin \varphi(x) = \frac{\cos x}{\cos \varphi(x)} \,.\, \sin \varphi(x) = \cos x \,.\, \operatorname{tg} \varphi(x) =$$
$$= \cos x \,.\, A \operatorname{tg} x = A \sin x\,, \quad q(\varphi(x)) \,.\, \cos \varphi(x) = \cos x\,.$$

(D) *Buď $k > 0$ celé, $a > 0$, $a \neq k\pi$. Potom prostory $H(0, a)$ a $H(0, k\pi)$ nejsou ekvivalentní.*

Důkaz pro $|a - k\pi| \geqq \pi$ plyne tvrzení z (A) a (B). Nechť $|a - k\pi| < \pi$ a předpokládejme, že $H(0, a)$ a $H(0, k\pi)$ jsou ekvivalentní, buďte $q, \varphi : (0, a) \to (0, k\pi)$ příslušné funkce z definice 3. Potom existují $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ tak, že pro každé $x \in (0, a)$ platí

$$(*) \quad q(\varphi(x)) \sin \varphi(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x\,,$$

$$(**) \quad q(\varphi(x)) \cos \varphi(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x\,.$$

Je-li φ rostoucí na $(0, a)$, potom $\varphi(0+) = 0$, $\varphi(a-) = k\pi$ a z $(*)$ plyne $\beta = 0$ (pro $x \to 0+$). Tedy $0 = \sin a$ (pro $x \to a-$), odkud $\alpha = \beta = 0$. Obdobně zjistíme, že $\alpha = \beta = 0$ i v případě, kdy φ je klesající.

Shrnutí. *Buďte $(-a, a)$, $(-b, b)$ omezené intervaly, $a < b$. Potom $H(-a, a)$ a $H(-b, b)$ jsou ekvivalentní, právě když existuje $k \geqq 0$ celé tak, že $\frac{1}{2}k\pi < a < b < \frac{1}{2}(k+1)\pi$.*

Důkaz. Buď k celé. Je-li $\frac{1}{2}k\pi = a$ anebo $\frac{1}{2}k\pi = b$, nejsou podle (D) a (A) prostory $H(-a, a)$ a $H(-b, b)$ nikdy ekvivalentní. Je-li $a < \frac{1}{2}k\pi < b$, potom $H(-a, a)$ a $H(-b, b)$ nejsou ekvivalentní podle (B) v případě $b - a \geqq \frac{1}{2}\pi$. Je-li však $\frac{1}{2}(k-1)\pi < a < \frac{1}{2}k\pi < b < \frac{1}{2}(k+1)\pi$, lze použít (C) k převedení na případ $\frac{1}{2}(k-1)\pi < a' < a < b < b' < \frac{1}{2}(k+1)\pi$, kde $b' - a' > \frac{1}{2}\pi$ a ukázat opět pomocí (B), že ani v tomto případě nemohou být $H(-a, a)$ a $H(-b, b)$ ekvivalentní.

(E) *Buďte $a, b \in R^1$. Potom $H(-\infty, a)$ a $H(-\infty, b)$ jsou ekvivalentní. Také $H(-\infty, a)$ a $H(b, \infty)$ jsou ekvivalentní.*

Důkaz. V prvním případě stačí položit $\varphi(x) = x + (b - a)$ pro $x \in (-\infty, a)$, $q = 1$. Je jistě zřejmé, jak je třeba volit φ a q v druhém případě.

(F) *Buďte $a, b, c \in R^1$, $a < b$. Potom žádné ze dvou prostorů $H(a, b)$, $H(c, +\infty)$, $H(-\infty, +\infty)$ nejsou ekvivalentní.*

Důkaz probíhá obdobně jako pro případ (B).

5. Lemma. *Buď $(R^1, \mathscr{H})$ Brelotův harmonický prostor, nechť f, g jsou nenulové harmonické funkce na R^1. Mají-li f, g společný nulový bod, pak jsou lineárně závislé.*

Důkaz. Nechť $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Podle [6], lemma 1.21, je x_0 isolovaný bod množiny $f_{-1}(0)$. Zvolme $y > x_0$ tak, aby $y \notin f_{-1}(0)$ a aby pro interval $\langle x_0, y \rangle$ platil princip minima. Nechť $g(y) = \lambda f(y)$. Potom funkce $g - \lambda f$ se anuluje na množině $\{x_0, y\}$, tedy na $\langle x_0, y \rangle$, a tedy na R^1.

6. Lemma. *Buď $(R^1, \mathscr{H})$ Brelotův harmonický prostor a nechť $H_{R^1} = \{h, g\}_{R^1}$. Potom funkce h, g splňují (i)–(iii) z příkladu 2(A).*

Důkaz. Funkce h, g jsou lineárně nezávislé (neboť existuje regulární interval). Množiny $h_{-1}(0), g_{-1}(0)$ jsou isolované opět podle [6], lemma 1.21, a $h_{-1}(0) \cap g_{-1}(0) = \emptyset$ podle lemmatu 5. Buď C komponenta množiny $R^1 \setminus g_{-1}(0)$. Protože funkce g zachovává znamení na C, můžeme uvažovat prostor ${}^g\mathscr{H}_C = \{hg^{-1};\ h \in \mathscr{H}_C\}$ všech g-harmonických funkcí na C, který tedy obsahuje konstanty. Podle [6], lemma 1.6 existuje na C ryze monotonní spojitá funkce F a $k \in R^1$ tak, že ${}^g\mathscr{H}_C = \{F, k\}_C$. Tedy $hg^{-1} = aF + b$ $(a, b \in R^1)$ na C. Jelikož $a \neq 0$, je funkce hg^{-1} ryze monotonní na C.

7. Lemma. *Buď $(R^1, \mathscr{H})$ Brelotův harmonický prostor. Potom existují funkce h, g H_{R^1} tak, že $H_{R^1} = \{h, g\}_{R^1}$ (a funkce h, g mají vlastnosti (i)–(iii) z 2(A)).*

Důkaz. Buď $h \in \mathscr{H}_{R^1}$ nenulová na R^1. Za funkci g stačí vzít libovolnou harmonickou funkci na R^1, která je s h na R^1 lineárně nezávislá. Taková funkce zajisté existuje; stačí vzít regulární interval (a, b), najít řešení g Dirichletovy úlohy $g(a) = A$, $g(b) = B$, kde $A\,h(b) - B\,h(a) \neq 0$, a potom rozšířit g z (a, b) na R^1. Zřejmě každá další harmonická funkce na R^1 je lineární kombinací h, g.

8. Věta. *Buď $(R^1, \mathscr{H})$ Brelotův harmonický prostor. Potom existuje interval $(A, B) \subset R^1$ tak, že $(R^1, \mathscr{H})$ a $H(A, B)$ jsou harmonicky ekvivalentní.*

Důkaz. Podle lemmatu 7 existují harmonické funkce h, g na R^1 tak, že $\mathscr{H}_{R^1} = \{h, g\}_{R^1}$. Nechť (a, b) je komponenta množiny $R^1 \setminus g_{-1}(0)$. Můžeme předpokládat, že funkce g je na intervalu (a, b) kladná a že funkce $\psi = hg^{-1}$ je na (a, b) rostoucí. Položme $\varphi = \operatorname{arctg} * \psi$ na (a, b). Potom $\varphi((a, b)) = (a', b') \subset (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$; přičemž $a' > -\frac{1}{2}\pi$ (resp. $b' < \frac{1}{2}\pi$), právě když ψ je zdola (resp. shora) omezená na

(a, b). Definujeme-li funkci q na (a', b') vztahem $q = g * \varphi_{-1}/\cos$, je q kladná a spojitá na (a', b') a $h * \varphi_{-1} = q \sin$ na (a', b'). Je-li $(a, b) = (-\infty, +\infty)$, jsme hotovi. Nechť $b < +\infty$, potom funkce ψ nemůže být shora omezená na (a, b) (neboť $g(b) = 0$, $h(b) > 0$), tedy $b' = \frac{1}{2}\pi$. Nechť (c, d) je komponenta množiny $R^1 \setminus h_{-1}(0)$, která obsahuje bod b. Potom funkce h je kladná na (c, d), funkce $\psi = hg^{-1}$ je rostoucí v jistém levém okolí bodu b, tedy funkce $\tilde{\psi} = gh^{-1}$ je klesající na intervalu (c, d). Položme $\tilde{\varphi} = \operatorname{arccotg} * \tilde{\psi}$ na (c, d). Potom $\tilde{\varphi}((c, d)) = (c', d')$, kde $0 \leqq c' < \frac{1}{2}\pi < < d' \leqq \pi$. Definujeme-li ještě funkci $\tilde{q}$ na (c', d') předpisem

$$\tilde{q} = \frac{h * \tilde{\varphi}_{-1}}{\sin},$$

je $\tilde{q}$ kladná a spojitá na (c', d') a $g * \tilde{\varphi}_{-1} = \tilde{q} \cos$ na (c', d'). Kromě toho na intervalu $(a, b) \cap (c, d) = (c, b)$ je $\varphi = \tilde{\varphi}$ a na intervalu $\varphi((c, b))$ je $q = \tilde{q}$. Vidíme tedy, že homeomorfismus φ lze z intervalu (a, b) prodloužit na (a, d) a funkci q na $\varphi((a, d))$ tak, aby

$$h(t) = q(\varphi(t)) \sin \varphi(t)\,, \quad g(t) = q(\varphi(t)) \cos \varphi(t)$$

pro $t \in (a, d)$. Je-li $d = +\infty$, jsme s „prodlužováním doprava" hotovi. Je-li $d < +\infty$, je $d' = \pi$, vezmeme komponentu množiny $R^1 \setminus g_{-1}(0)$, která obsahuje bod d a celou konstrukci opakujeme. Vzhledem k vlastnosti (ii) množin $h_{-1}(0)$, $g_{-1}(0)$ dostaneme tvrzení: Existuje interval (A, B), homeomorfismus $\varphi : R^1 \to (A, B)$ a kladná spojitá funkce q na (A, B) tak, že $h(t) = q(\varphi(t)) \sin \varphi(t)$, $g(t) = q(\varphi(t)) \cos \varphi(t)$ pro všechna $t \in R^1$. Odtud již lehko vyplývá, že prostory $(R^1, \mathscr{H})$, $H(A, B)$ jsou ekvivalentní.

9. Důsledek. *Buď X nekompaktní souvislá jednodimensionální varieta. Nechť $\mathscr{H}$ je takový svazek funkcí na X, že $(X, \mathscr{H})$ je Brelotův harmonický prostor. Potom existuje interval $(A, B) \subset R^1$ tak, že $(X, \mathscr{H})$ a $H(A, B)$ jsou harmonicky ekvivalentní.*

10. Poznámka. O souvislosti harmonických prostorů nad otevřenou částí prostoru R^n s řešeními parciálních diferenciálních rovnic pojednává přednáška [3], kde je uvedena další literatura o této problematice. Výsledky, jež se týkají mnohem složitějšího případu $n \geqq 2$, nejsou ovšem již tak elementární a úplné jako pro $n = 1$. Poznamenejme, že při vyšetřováních týkajících se vícerozměrného případu popsaných v [3] hraje podstatnou roli předpoklad, že mezi harmonickými funkcemi je v jistém smyslu mnoho funkcí dostatečně diferencovatelných; ekvivalence ve smyslu výše uvedené definice 3 se v tomto pojetí neuplatňuje.

Literatura

[1] *H. Bauer:* Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie, Lecture Notes 22, Springer Verlag 1966.

[2] *N. Boboc - P. Mustaţa:* Espaces harmoniques associés aux opérateurs différentiels linéaires du second ordre de type elliptique, Lecture Notes 68, Springer Verlag 1969.

[3] *J. M. Bony:* Opérateurs elliptiques dégénérés associés aux axiomatiques de la théorie du potentiel, C.I.M.E. Stresa (2—10 Luglio 1969), Ed. Cremonese Roma 1970, 69—119.
]4] *M. Brelot:* Axiomatique des fonctions harmoniques, Université de Montréal, 1966.
[5] *C. Constantinescu - A. Cornea:* Potential theory on harmonic spaces, Springer Verlag 1972.
[6] *J. Král - J. Lukeš - I. Netuka:* Elliptic points in one-dimensional harmonic spaces, Comment. Math. Univ. Carolinae *12* (1971), 453—483.
[7] *J. Král - J. Lukeš:* Indefinite harmonic continuation, Časopis pro pěst. matematiky *98* (1973), 87—94.

Author's addresses: J. Král, 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV) J. Lukeš, 186 00 Praha 8-Karlín. Sokolovská 83 (Matematicko-fyzikální fakulta UK).

Summary

BRELOT SPACES ON ONE-DIMENSIONAL MANIFOLDS

JOSEF KRÁL and JAROSLAV LUKEŠ, Praha

A Brelot space $(X, \mathscr{H})$ is a locally connected Hausdorff topological space X equipped with a sheaf $\mathscr{H}$ associating with each open set $U \subset X$ a vector-space $\mathscr{H}_U$ of continuous functions (termed harmonic functions) on U such that the sheaf axiom, the base axiom and the Brelot convergence axiom hold. Two Brelot spaces $(X, \mathscr{H})$ and $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}})$ are termed equivalent if there is a homeomorphism φ of X onto $\tilde{X}$ and a positive continuous function q on $\tilde{X}$ such that, for any open $G \subset X$, $\tilde{h} \in \tilde{\mathscr{H}}_{\varphi(G)}$ if and only if the function h defined on G by $h(x) = q(\varphi(x))\, \tilde{h}(\varphi(x))$ $(x \in G)$ belongs to $\mathscr{H}_G$.

The purpose of this note is to present an elementary proof of the following result describing all equivalence classes of Brelot spaces that can be defined on a non-compact one-dimensional manifold.

Theorem. *Let X be a connected non-compact one-dimensional manifold. Given a Brelot space $(X, \mathscr{H})$ then there are numbers $-\infty \leqq A < B \leqq +\infty$ such that $(X, \mathscr{H})$ is equivalent with the Brelot space $H(A, B)$ determined on $(A, B) = \{x \in R^1;$ $A < x < B\}$ by solutions y of the differential equation $y'' + y = 0$; two spaces $H(A, B)$ and $H(\tilde{A}, \tilde{B})$ are equivalent if and only if one of the following conditions holds*:

1) *All the numbers $A, B, \tilde{A}, \tilde{B}$ are finite and either $B - A = \tilde{B} - \tilde{A}$ or there is an integer $k \geqq 0$ such that*
$$k\pi < \min(B - A, \tilde{B} - \tilde{A}) < \max(B - A, \tilde{B} - \tilde{A}) < (k + 1)\,\pi\,.$$
2) *Each of the intervals (A, B), $(\tilde{A}, \tilde{B})$ is unbounded and different from R^1.*
3) $A = -\infty = \tilde{A},\ B = +\infty = \tilde{B}$.