Věra Radochová

Die Lösung der partiellen Differentialgleichung $u_{xxtt} = A(t,x)u_{xx} + B(t,x)u_{tt}$ mit gewissen Nebenbedingungen

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 98 (1973), No. 4, 389--397

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

DIE LÖSUNG DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNG $u_{xxtt} = A(t, x)\, u_{xx} + B(t, x)\, u_{tt}$ MIT GEWISSEN NEBENBEDINGUNGEN

VĚRA RADOCHOVÁ, Brno

(Eingegangen am 19. April 1972)

Wenn wir bei dem Ableiten der partiellen Differentialgleichung der Längsschwingungen von Stäben die energetische Methode benützen und dabei die Deformation des Querschnittes in seiner Ebene in Erwägung ziehen, erhalten wir die Differentialgleichung der Schwingungen mit einem Korrektionsglied vierter Ordnung

$$u_{tt} + a(t, x)\, u_{xxtt} + b(t, x)\, u_{xx} = 0\,,$$

welche von A. E. LOVE stammt [1].

Ist $a(t, x) \neq 0$, so können wir diese Differentialgleichung in der Form

$$u_{xxtt} = A(t, x)\, u_{xx} + B(t, x)\, u_{tt} \tag{1}$$

oder noch allgemeiner in der Form

$$u_{xxtt} = f(t, x, u_{xx}, u_{tt}) \tag{2}$$

schreiben.

Der Lösung und den Eigenschaften dieser Differentialgleichung für gewisse Anfangs- und Randbedingungen, sind die folgenden Absätze gewidmet.

Wir beschäftigen uns mit der Lösung der Differentialgleichung (2), die den folgenden Nebendingungen genügt:

Die Integralfläche soll zwei sich schneidende Raumkurven enthalten, die über zwei Charakteristiken liegen, die in ihrem Schnittpunkte verschiedene Richtungen haben. Längs einer dieser Raumkurven werden noch die Tangenten in der Richtung gegeben, deren Projektion auf die tx-Ebene mit der Richtung der zweiten Charakteristikenschar übereinstimmt. Längs einer dritten Charakteristik, die zu demselben System gehört wie die, über welcher wir nur die Funktionenwerte kennen, ist noch die Richtung der Tangenten gegeben und zwar so, dass ihre Projektion auf die tx-Ebene mit der Richtung des zweiten Charakteristikensystems übereinstimmt. Diese dritte

Charakteristik kann entweder von den ersten zwei Charakteristiken verschieden sein, oder kann mit der übereinstimmen, über welcher wir nur die Funktionenwerte kennen.

Die physikalische Bedeutung dieser Nebenbedingungen liegt darin, dass wir für einen Stab, dessen Achse mit der x-Achse übereinstimmt, den Anfangszustand und die Anfangsgeschwindigkeit kennen und an einem Ende des Stabes die Verschiebung und entweder an dem zweiten Ende, wenn die drei Charakteristiken verschieden sind, oder an demselben Ende, wenn zwei von ihnen zusammenfliessen, die nichtkorrigierte Spannung vorgeschrieben haben.

Satz 1. *Es sei die Differentialgleichung* (2) *gegeben. Die Funktion* $f(t, x, v, w)$ *sei in dem Gebiete* $D = \{\alpha < x < \beta, \gamma < t < \delta\}$, *und für beliebige* v, w *stetig und erfülle in jedem kompakten Teilgebiete* $D_0 \subset D$ *in Bezug auf* v, w *die Lipschitz-Bedingung*

$$|f(t, x, v_2, w_2) - f(t, x, v_1, w_1)| \leqq M(|v_2 - v_1| + |w_2 - w_1|) . \tag{3}$$

Ferner seien $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ *Funktionen der Klasse* $C^2(I_1)$, *wobei* $I_1 = \{\alpha < x < \beta\}$ *ist,* $\psi_0(t), \psi_1(t)$ *Funktionen der Klasse* $C^2(I_2)$, *wobei* $I_2 = \{\gamma < t < \delta\}$ *ist, und die Zahlen* $\xi_0 \leqq \xi_1 \in I_1$, $\tau \in I_2$ *so gegeben, dass für diese Funktionen die Beziehungen*

$$\varphi_0(\xi_0) = \psi_0(\tau) , \quad \varphi_1(\xi_0) = \psi_0'(\tau) , \quad \varphi_0'(\xi_1) = \psi_1(\tau) , \quad \varphi_1'(\xi_1) = \psi_1'(\tau) \tag{4}$$

gelten. Dann hat die Differentialgleichung (2) *in dem Gebiete* D *mindestens eine Lösung* $u = u(t, x)$, *die längs der Charakteristiken* $x = \xi_0$, $x = \xi_1$, $t = \tau$ *die Bedingungen*

$$u(\tau, x) = \varphi_0(x) , \quad u_t(\tau, x) = \varphi_1(x) , \quad u(t, \xi_0) = \psi_0(t) , \quad u_x(t, \xi_1) = \psi_1(t) \tag{5}$$

erfüllt.

Beweis. Wir werden diesen Satz mittels des Iterationsverfahrens beweisen.

Als erste Annäherung nehmen wir die Funktion

$$\begin{aligned} u_0(t, x) = {} & \varphi_0(x) + \psi_0(t) - \psi_0(\tau) + \\ & + (t - \tau) [\varphi_1(x) - \varphi_1(\xi_0)] + (x - \xi_0) [\psi_1(t) - \psi_1(\tau)] - (x - \xi_0)(t - \tau) \psi_1'(\tau) . \end{aligned} \tag{6}$$

Sie erfüllt die Bedingungen (5) und gehört der Klasse $C^2(D)$.

Wenn $u_{n-1}(t, x)$ die $(n - 1)$-te Näherungsfunktion ist, die der Klasse $C^2(D)$ gehört, so gehört der Klasse $C^2(D)$ auch die n-te Annäherung

$$u_n(t, x) = u_0(t, x) + F_{n-1}(t, x) , \tag{7}$$

wobei die Bezeichnung

$$(8) \qquad F_k(t, x) = \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \int_{\xi_0}^x \int_{\xi_1}^{x_1} f\left(t_2, x_2, \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 u_k}{\partial t_2^2}\right) \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}t_2 \, \mathrm{d}t_1$$

benützt wurde.

Es soll nun gezeigt werden, dass die Folge der Näherungsfunktionen $u_n(t, x)$ in jedem kompakten Teilgebiete $D_0 \subset D$, $D_0 = \{\alpha_0 \leqq x \leqq \beta_0, \gamma_0 \leqq t \leqq \delta_0\}$, wobei $\alpha_0 \leqq \xi_0 \leqq \xi_1 \leqq \beta_0$, $\gamma_0 \leqq \tau \leqq \delta_0$ ist, gleichmässig konvergiert.

Die Funktion $f(t, x, \partial^2 u_0/\partial x^2, \partial^2 u_0/\partial t^2)$ ist in D_0 stetig, so dass $|f| \leqq A$ ist und für $n = 1$ die folgenden Beziehungen gelten:

$$|u_1(t, x) - u_0(t, x)| \leqq \frac{A}{4} |t - \tau|^2 \, |x - \xi_0| \, |x - \xi_1| ,$$

$$\left| \frac{\partial^2 u_1(t, x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_0(t, x)}{\partial x^2} \right| \leqq \frac{A}{2} |t - \tau|^2 ,$$

$$\left| \frac{\partial^2 u_1(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0(t, x)}{\partial t^2} \right| \leqq \frac{A}{2} |x - \xi_0| \, |x - \xi_1| .$$

Wird $2K = \max\{2; [(\beta_0 - \alpha_0) + (\delta_0 - \gamma_0)]^2\}$ gesetzt, gelten die Beziehungen

$$(8) \qquad |u_1(t, x) - u_0(t, x)| \leqq \tfrac{1}{2} AK(|t - \tau| + |x - \xi_0| + |x - \xi_1|)^2 ,$$

$$\left| \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right| \leqq \tfrac{1}{2} AK(|t - \tau| + |x - \xi_0| + |x - \xi_1|)^2 ,$$

$$\left| \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right| \leqq \tfrac{1}{2} AK(|t - \tau| + |x - \xi_0| + |x - \xi_1|)^2 .$$

Wir nehmen nun an, dass für $n = m$ die Beziehungen

$$(9) \qquad |u_m(t, x) - u_{m-1}(t, x)| \leqq \frac{A}{2M} \frac{(2MK)^m}{(2m)!} (|t - \tau| + |x - \xi_0| + |x - \xi_1|)^{2m} ,$$

$$\left| \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial x^2} \right| \leqq \frac{A}{2M} \frac{(2MK)^m}{(2m)!} (|t - \tau| + |x - \xi_0| + |x - \xi_1|)^{2m} ,$$

$$\left| \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial t^2} \right| \leqq \frac{A}{2M} \frac{(2MK)^m}{(2m)!} (|t - \tau| + |x - \xi_0| + |x - \xi_1|)^{2m}$$

gelten, wo M die Lipschitz-Konstante ist. Für $m = 1$ sind die Beziehungen (9) erfüllt, da sie mit den Beziehungen (8) übereinstimmen.

Wegen der Gültigkeit der Lipschitz-Bedingung (3) ist für $n = m + 1$

$$|u_{m+1} - u_m| \leqq$$

$$\leqq M \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \int_{\xi_0}^x \int_{\xi_1}^{x_1} \left(\left| \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial x_2^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 u_m}{\partial t_2^2} - \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial t_2^2} \right| \right) dx_2\, dx_1\, dt_2\, dt_1 \leqq$$

$$\leqq \frac{A}{2M} \frac{(2MK)^m}{(2m)!} 2M \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \int_{\xi_0}^x \int_{\xi_1}^{x_1} (|x_2 - \xi_0| + |x_2 - \xi_1| + |t_2 - \tau|)^{2m} .$$

$$. \, dx_2\, dx_1\, dt_2\, dt_1 \leqq \frac{A}{2M} \frac{(2MK)^{m+1}}{(2m+2)!} (|t - \tau| + |x - \xi_0| + |x - \xi_1|)^{2m+2} ,$$

$$\left| \frac{\partial^2 u_{m+1}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} \right| \leqq M \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \left(\left| \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial x^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 u_m}{\partial t_2^2} - \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial t_2^2} \right| \right) dt_2\, dt_1 \leqq$$

$$\leqq \frac{A}{2M} \frac{(2MK)^{m+1}}{(2m+2)!} (|t - \tau| + |x - \xi_0| + |x - \xi_1|)^{2m+2} ,$$

$$\left| \frac{\partial^2 u_{m+1}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} \right| \leqq M \int_{\xi_0}^x \int_{\xi_1}^{x_1} \left(\left| \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial x_2^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial t^2} \right| \right) dx_2\, dx_1 \leqq$$

$$\leqq \frac{A}{2M} \frac{(2MK)^{m+1}}{(2m+2)!} (|t - \tau| + |x - \xi_0| + |x - \xi_1|)^{2m+2} .$$

Daraus folgt, dass die Folge der Funktionen

$$u_n(t, x) = u_0(t, x) + [u_1(t, x) - u_0(t, x)] + \ldots + [u_n(t, x) - u_{n-1}(t, x)]$$

und die Folgen ihrer partiellen Ableitungen zweiter Ordnung nach x und t für $n \to \infty$ in jedem kompakten Rechteck D_0 gleichmässig gegen die Funktion $u(t, x)$ und gegen ihre zweiten partiellen Ableitungen nach x und t konvergieren.

Die Funktion $u(t, x)$ und ihre zweiten partiellen Ableitungen nach x und t sind also in dem ganzen Gebiete D vorhanden.

Aus der Beziehung (7) erhalten wir für $n \to \infty$ die Funktion $u(t, x)$ in der Form

$$(10) \qquad u(t, x) = u_0(t, x) + \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \int_{\xi_0}^x \int_{\xi_1}^{x_1} f(t_2, x_2, u_{xx}, u_{tt})\, dx_2\, dx_1\, dt_2\, dt_1 ,$$

woraus folgt, dass auch die vierte Ableitung u_{xxtt} existiert und stetig ist, so dass die Funktion $u(t, x)$ der Differentialgleichung (2) genügt. Aus der Beziehung (10) ersieht man auch, dass die Funktion $u(t, x)$ die vorgeschriebenen Bedingungen (5) erfüllt.

Aus der Gültigkeit der Lipschitz-Bedingung folgt nicht nur die Existenz der Lösung des Problems (2), (5), sondern auch die Eindeutigkeit dieser Lösung.

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen des Satzes* 1 *gibt es in D genau eine Lösung der Differentialgleichung* (2), *die die Nebenbedingungen* (5) *erfüllt.*

Beweis. Wir nehmen an, dass es zwei solche Lösungen $u(t, x)$ und $\bar{u}(t, x)$ gibt, die den Nebenbedingungen (5) und den anderen Voraussetzungen des Satzes 1. genügen.

Für diese Lösungen muss also gelten:

$$(11) \qquad u(t, x) = u_0(t, x) + \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \int_{\xi_0}^x \int_{\xi_1}^{x_1} f(t_2, x_2, u_{xx}, u_{tt})\, dx_2\, dx_1\, dt_2\, dt_1\,,$$

$$\bar{u}(t, x) = u_0(t, x) + \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \int_{\xi_0}^x \int_{\xi_1}^{x_1} f(t_2, x_2, \bar{u}_{xx}, \bar{u}_{tt})\, dx_2\, dx_1\, dt_2\, dt_1\,,$$

$$(12) \qquad \begin{aligned} u(\tau, x) &= \bar{u}(\tau, x)\,, & u_x(\tau, x) &= \bar{u}_x(\tau, x)\,, & \ldots \\ u(t, \xi_0) &= \bar{u}(t, \xi_0)\,, & u_t(t, \xi_0) &= \bar{u}_t(t, \xi_0)\,, & \ldots \\ u_t(\tau, x) &= \bar{u}_t(\tau, x)\,, & u_x(t, \xi_1) &= \bar{u}_x(t, \xi_1)\,. \end{aligned}$$

Es genügt nun zu zeigen, dass die beiden Funktionen $u(t, x)$ und $\bar{u}(t, x)$ in jedem kompakten Teilrechteck $D_0 \subset D$, das die drei Charakteristiken $t = \tau$, $x = \xi_0$, $x = \xi_1$ enthält, übereinstimmen. Der Lipschitz-Bedingung gemäss ist:

$$(13) \qquad |f(t, x, u_{xx}, u_{tt}) - f(t, x, \bar{u}_{xx}, \bar{u}_{tt})| \leqq M(|u_{xx} - \bar{u}_{xx}| + |u_{tt} - \bar{u}_{tt}|)\,.$$

Es sei für $\alpha_0 \leqq x \leqq \beta_0$ entweder $\xi = \xi_0$, wenn $|x - \xi_0| \geqq |x - \xi_1|$ gilt, oder $\xi = \xi_1$, wenn $|x - \xi_0| < |x - \xi_1|$ gilt. Wir führen die Funktion

$$(14) \qquad \omega(t, x) = (|u - \bar{u}| + |u_{xx} - \bar{u}_{xx}| + |u_{tt} - \bar{u}_{tt}|)\, e^{-E}$$

ein, wobei $E = K(|x - \xi| + |t - \tau|)$ und $K = ((\sqrt{(2M)}/(\sqrt{(1 + 2M)} - \sqrt{(2M)}))^{1/2}$ ist, wobei M die Lipschitz-Konstante darstellt.

Wenn wir ferner die Bezeichnung

$$(15) \qquad F_{xx}(t, x) = \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} f(t_2, x, u_{xx}, u_{tt})\, dt_2\, dt_1\,,$$

$$F_{tt}(t, x) = \int_{\xi_0}^x \int_{\xi_1}^{x_1} f(t, x_2, u_{xx}, u_{tt})\, dx_2\, dx_1$$

einführen und mit dem Querstrich dieselben Werte für die Funktion $\bar{u}(t, x)$ bezeichnen, gilt für die Funktion $\omega(t, x)$ wegen (8), (11), (12), (13), (14) und (15) die Beziehung

$$\omega(t, x) = e^{-E}\{|F(t, x) - \bar{F}(t, x)| + |F_{xx}(t, x) - \bar{F}_{xx}(t, x)| + \\ + |F_{tt}(t, x) - \bar{F}_{tt}(t, x)|\} \leqq$$

$$\leqq Me^{-E}\left\{\int_{\xi_0}^{x}\int_{\xi_1}^{x_1} \omega(t, x_2)\, e^E \,\mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_1 + \int_{\tau}^{t}\int_{\tau}^{t_1} \omega(t_2, x)\, e^E \,\mathrm{d}t_2\, \mathrm{d}t_1 + \right.$$

$$\left. + \int_{\tau}^{t}\int_{\tau}^{t_1}\int_{\xi_0}^{x}\int_{\xi_1}^{x_1} \omega(t_2, x_2)\, e^E \,\mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}t_2\, \mathrm{d}t_1\right\}.$$

Wenn wir $\mu = \max\limits_{(t,x)\in D_0} \omega(t, x)$ bezeichnen, folgt:

$$\omega(t, x) \leqq Me^{-E}\mu\left[\int_{\tau}^{t}\int_{\tau}^{t_1}\int_{\xi_0}^{x}\int_{\xi_1}^{x_1} e^E \,\mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}t_2\, \mathrm{d}t_1 + \int_{\xi_0}^{x}\int_{\xi_1}^{x_1} e^E \,\mathrm{d}x_2\, dx_1 + \right.$$

$$\left. + \int_{\tau}^{t}\int_{\tau}^{t_1} e^E \,\mathrm{d}t_2\, \mathrm{d}t_1\right] \leqq M\mu\left[\frac{2}{k^2} + \frac{1}{k^4}\right] = \frac{1}{2}\,\mu\,.$$

Für jeden Punkt von D_0 gilt $\omega(t, x) \leqq \frac{1}{2}\mu$, also auch $\mu \leqq \frac{1}{2}\mu$, woraus folgt, dass $\mu = 0$ ist und damit auch $\omega(t, x) = 0$ in jedem Teilgebiete D_0 ist.

Wenn die rechte Seite der Differentialgleichung (1) *die Voraussetzungen des Satzes* 1 *erfüllt, gibt es in dem Gebiete D genau eine Lösung des Problems* (1), (5).

Wir befassen uns nun mit der Differentialgleichung (1), in welche

$$A(t, x) = -\frac{c^2}{a^2}, \quad B(t, x) = \frac{1}{a^2} \tag{16}$$

eingesetzt wird, wobei $a^2 \neq 0$, c^2 gegebene Konstanten sind. Die Funktion

$$f(t, x, u_{xx}, u_{tt}) = \frac{1}{a^2}\, u_{tt} - \frac{c^2}{a^2}\, u_{xx}$$

erfüllt die Lipschitz-Bedingung in der ganzen tx-Ebene.

Wir wählen $\tau = 0$, $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = L$, so dass die Nebenbedingungen (5) die Form

$$u(0, x) = \varphi_0(x)\,, \quad u_t(0, x) = \varphi_1(x)\,, \quad u(t, 0) = \psi_0(t)\,, \quad u_x(t, L) = \psi_1(t) \tag{17}$$

erhalten, wobei $\varphi_0(0) = \psi_0(0)$, $\varphi_1(0) = \psi_0'(0)$, $\varphi_0'(0) = \psi_1(0)$, $\varphi_1'(0) = \psi_1'(0)$ ist.

Wir nehmen ferner an, dass die Funktionen $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllen, sodass die partielle Differentialgleichung

$$u_{xxtt} = \frac{1}{a^2}\, u_{tt} - \frac{c^2}{a^2}\, u_{xx} \tag{18}$$

genau eine Lösung in dem Gebiete D hat.

Als erste Annäherung nehmen wir die Funktion

$$(19)\qquad u_0(t, x) = \varphi_0(x) + \psi_0(t) - \psi_0(0) + t[\varphi_1(x) - \varphi_1(0)] + \\ + x[\psi_1(t) - \psi_1(0)] - tx\, \varphi_1'(L)\,.$$

Aus der Beziehung (7) erhalten wir die k-te Näherungsfunktion in der Form

$$\begin{aligned}
u_k(t, x) = {} & u_0(t, x) + [\psi_0(t) - \psi_0(0) - t\,\psi_0'(0)] \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{a^{2n}} P_{2n}(L, x) + \\
& + a[\psi_1(t) - \psi_1(0) - t\,\psi_1'(0)] \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{a^{2n}} P_{2n+1}(L, x) + [\varphi_0(x) - \varphi_0(0) - \\
& - x\,\varphi_0'(L)] \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{ct}{a}\right)^{2n} + \frac{a}{c}[\varphi_1(x) - \varphi_1(0) - \\
& - x\,\varphi_1'(L)] \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{ct}{a}\right)^{2n+1} + \sum_{m=1}^{k} \left\{ \frac{1}{a^{2m}} \left[\int_{2m} \varphi_0(x)\, \mathrm{d}x - \right.\right. \\
& \left. - P_{2m}\,\varphi_0(0) - P_{2m+1}\,\varphi_0'(L) \right] \sum_{n=1}^{k-m} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \binom{n+m-1}{m} \left(\frac{ct}{a}\right)^{2n} + \\
& + \frac{1}{a^{2m}} \frac{a}{c} \left[\int_{2m} \varphi_1(x)\, \mathrm{d}x - P_{2m}\,\varphi_1(0) - \right. \\
& \left. - P_{2m+1}\varphi_1'(L) \right] \sum_{n=1}^{k-m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \binom{n+m-1}{m} \left(\frac{ct}{a}\right)^{2n+1} + \\
& + (-1)^m \left(\frac{c}{a}\right)^{2m} \left[\int_{2m} \psi_0(t)\, \mathrm{d}t - \frac{t^{2m}}{(2m)!} \psi_0(0) - \right. \\
& \left. - \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!} \psi_0'(0) \right] \sum_{n=1}^{k-m} \frac{1}{a^{2n}} \binom{n+m-1}{m} P_{2n}(L, x) + \\
& + (-1)^m \left(\frac{c}{a}\right)^{2m} a \left[\int_{2m} \psi_1(t)\, \mathrm{d}t - \frac{t^{2m}}{(2m)!} \psi_1(0) - \right. \\
& \left.\left. - \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!} \psi_1'(0) \right] \sum_{n=1}^{k-m} \frac{1}{a^{2n}} \binom{n+m-1}{m} P_{2n+1}(L, x) \right\},
\end{aligned}$$

wobei die Bezeichnungen

$$\int_{2m} \varphi_i(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^x \int_L^{x_1} \ldots \int_0^{x_{2m-2}} \int_L^{x_{2m-1}} \varphi_i(x_{2m})\, \mathrm{d}x_{2m} \ldots \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_1\,, \quad i = 0, 1\,,$$

$$\int_{2m} \psi_i(t)\,dt = \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{2m-1}} \psi_i(t_{2m})\,dt_{2m} \ldots dt_2\,dt_1\,, \quad i = 0, 1\,,$$

$$P_{2m}(L, x) = \frac{x^{2m}}{(2m)!} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{L^{2m-2k-1}}{(2m-2k-1)!} P_{2k+1}(L, x)\,, \quad m = 1, 2, \ldots$$

$$P_{2m+1}(L, x) = \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{L^{2m-2k}}{(2m-2k)!} P_{2k+1}(L, x)\,, \quad m = 1, 2, \ldots$$

$$P_0(L, x) = 1\,, \quad P_1(L, x) = x$$

benützt wurden.

Durch den Grenzübergang $k \to \infty$ erhalten wir die Lösung des Problems (18), (17) in der Form

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \psi_0(t) - \psi_0(0) - \varphi_0(0) + x\,\psi_1(t) + \\ &+ [\varphi_0(x) - \varphi_0(0) - x\,\varphi_0'(L)] \cos\frac{ct}{a} + \frac{a}{c}[\varphi_1(x) - \varphi_1(0) - x\,\varphi_1'(L)] \sin\frac{ct}{a} + \\ &+ [\psi_0(t) - \psi_0(0) - t\,\psi_0'(0)] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{2n}} P_{2n} + a[\psi_1(t) - \psi_1(0) - \\ &- t\,\psi_1'(0)] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{2n+1}} P_{2n+1} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{a^{2m}} \left[\int_{2m} \varphi_0(x)\,dx - \right.\right. \\ &\left. - P_{2m}\,\varphi_0(0) - P_{2m+1}\,\varphi_0'(L) \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \binom{n+m-1}{m} \left(\frac{ct}{a}\right)^{2n} + \\ &+ \frac{1}{a^{2m}} \frac{a}{c} \left[\int_{2m} \varphi_1(x)\,dx - P_{2m}\,\varphi_1(0) - P_{2m+1}\,\varphi_1'(L) \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \\ &\cdot \binom{n+m-1}{m} \left(\frac{ct}{a}\right)^{2n+1} + (-1)^m \left(\frac{c}{a}\right)^{2m} \left[\int_{2m} \psi_0(t)\,dt - \frac{t^{2m}}{(2m)!} \psi_0(0) - \right. \\ &\left. - \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!} \psi_0'(0) \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{2n}} \binom{n+m-1}{m} P_{2n} + (-1)^m \left(\frac{c}{a}\right)^{2m} a \left[\int_{2m} \psi_1(t)\,dt - \right. \\ &\left.\left. - \frac{t^{2m}}{(2m)!} \psi_1(0) - \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!} \psi_1'(0) \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{2n+1}} \binom{n+m-1}{m} P_{2n+1} \right\}. \end{aligned}$$

Wenn die zwei Charakteristiken $x = 0$ und $x = L$ zusammenfliessen, wenn also die Nebenbedingungen die Form

(20) $$u(0, t) = \varphi_0(x)\,; \quad u_t(0, t) = \varphi_1(x)\,; \quad u(t, 0) = \psi_0(t)\,; \quad u_x(t, 0) = \psi_1(t)$$

haben, erhalten wir die Lösung des Problems (18), (20) in der Form

$$u(t, x) = \varphi_0(0) + t\,\varphi_1(0) + \psi_1(0) + tx\,\psi_1'(0) +$$

$$+ [\varphi_0(x) - \varphi_0(0) - x\,\varphi_0'(0)] \cos\frac{ct}{a} + \frac{a}{c}[\varphi_1(x) - \varphi_1(0) - x\,\varphi_1'(0)] \sin\frac{ct}{a} +$$

$$+ [\psi_0(t) - \psi_0(0) - t\,\psi_0'(0)] \cosh\frac{x}{a} + a[\psi_1(t) - \psi_1(0) - t\,\psi_1'(0)] \sinh\frac{x}{a} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{a^{2m}} \left[\left[\int_{2m} \varphi_0(x)\,dx - \frac{x^{2m}}{(2m)!}\varphi_0(0) - \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\varphi_0'(0)\right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \right.\right.$$

$$\cdot \binom{n+m-1}{m} \left(\frac{ct}{a}\right)^{2n} + \frac{1}{a^{2m}}\frac{a}{c}\left[\int_{2m} \varphi_1(x)\,dx - \frac{x^{2m}}{(2m)!}\varphi_1(0) -\right.$$

$$\left. - \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\varphi_1'(0)\right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \binom{n+m-1}{m} \left(\frac{ct}{a}\right)^{2n+1} +$$

$$+ (-1)^m \left(\frac{c}{a}\right)^{2m} \left[\int_{2m} \psi_0(t)\,dt - \frac{t^{2m}}{(2m)!}\psi_0(0) - \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!}\psi_0'(0)\right] \cdot$$

$$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \binom{n+m-1}{m} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n} + (-1)^m \left(\frac{c}{a}\right)^{2m} a \left[\int_{2m} \psi_1(t)\,dt -\right.$$

$$\left.\left. - \frac{t^{2m}}{(2m)!}\psi_1(0) - \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!}\psi_1'(0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \binom{n+m-1}{m} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} \right\}.$$

Literatur

[1] *A. E. H. Love:* A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Cambridge 1952.
[2] *E. Kamke:* Differentialgleichungen II, Leipzig 1962.

Anschrift des Verfassers: 662 95 Brno, Janáčkovo nám. 2a (Matematický ústav ČSAV, pobočka Brno).