Časopis pro pěstování matematiky

Josef Doležal

Über eine gewisse Verallgemeinerung der Quasifleknodalgebilde in S_{2n-1}

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 98 (1973), No. 4, 375--388

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117819`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

ÜBER EINE GEWISSE VERALLGEMEINERUNG DER QUASIFLEKNODALGEBILDE IN S_{2n-1}

JOSEF DOLEŽAL, Brno

(Eingegangen am 11. April 1972)

1. DIE VERALLGEMEINERUNG DER BEGRIFFE DER QUASIFLEKNODALGEBILDE IN S_{2n-1}

Im projektiven Raum S_{2n-1} ($n \geqq 2$) betrachten wir ein aus zwei Mannigfaltigkeiten V und $\bar{V}$ zusammengesetztes Paar P von folgenden Eigenschaften: Die Mannigfaltigkeit V ist ein Monosystem (eine einparametrische Menge) linearer Unterräume $S(u)$ von Dimension $n - 1$, die Mannigfaltigkeit $\bar{V}$ ist ein Monosystem linearer Unterräume $\bar{S}(u)$ von derselben Dimension $n - 1$. Die Unterräume S und $\bar{S}$ nennen wir die erzeugenden Unterräume der Mannigfaltigkeiten V und $\bar{V}$. Beide Mannigfaltigkeiten befinden sich in Korrespondenz, wobei sich Unterräume, die demselben Wert des Parameters $u \in I$ (I ist ein offener Intervall) zugeordnet sind, entsprechen. Wir setzen voraus, daß kein Paar der sich entsprechenden Unterräume (weiter nur Räume) gemeinsame Punkte hat.

Wir betrachten nun ein System von $2n$ reellen Kurven $(A_1(u)), (A_2(u)), \ldots, (A_{2n}(u))$ von folgenden Eigenschaften: Jede der Kurven $(A_1), \ldots, (A_n)$ schneidet jeden der Räume $S(u)$ der Mannigfaltikeit V gerade in einem Punkt und jede der Kurven $(A_{n+1}), \ldots, (A_{2n})$ schneidet jeden der Räume $\bar{S}(u)$ ebenso gerade in einem Punkt. Dabei werden wir voraussetzen, daß für jedes $u \in I$ die Punkte A_i ($i = 1, 2, \ldots, 2n$) linear unabhängig sind. Sie können also als Ecken des Koordinatensystems gewählt werden. Die Kurven $(A_1), \ldots, (A_n)$ nennen wir die Leitlinien der Mannigfaltigkeit V, die Kurven $(A_{n+1}), \ldots, (A_{2n})$ diejenigen der Mannigfaltigkeit $\bar{V}$. Die Koordinaten der Punkte A_i sollen Funktionen der Klasse C^2 sein.

Für Bezeichnung und Summation nach den Indexen $1, 2, \ldots, n$ werden wir die Buchstaben r oder s, für die Bezeichnung und Summation nach $n + 1, n + 2, \ldots$ $\ldots, 2n$ die Buchstaben ϱ oder σ und für $1, 2, \ldots, 2n$ die Buchstaben i oder j benutzen.

Das infinitesimale Verrücken des Koordinatensystems ist durch

$$\mathrm{d}A_i = u_i^j A_j \,\mathrm{d}u \tag{1}$$

gegeben. Jeder Punkt Y des Raumes S kann mittels den zum Koordinatensystem mit den Eckpunkten A_r bezogenen Koordinaten y^r bestimmt werden

$$Y = y^r A_r \tag{2}$$

Wenn die Koordinaten y^r Funktionen von u sind, so bedeutet (2) eine Kurve $Y(u)$ der Mannigfaltigkeit V. Die Tangenten zu allen Kurven der Mannigfaltigkeit V, die durch einen festen Punkt $Y \in S$ gehen, liegen in einem linearen Raum

$$\tau_Y = (A_1, A_2, \ldots, A_n, \mathrm{d}Y)$$

Durch Differenzieren der Gleichung (2) bekommt man

$$\mathrm{d}Y = \mathrm{d}y^r A_r + y^r(u_r^s A_s + u_r^\varrho A_\varrho)\,\mathrm{d}u$$

und weiter

$$\tau_Y = (A_1, A_2, \ldots, A_n, u_r^\varrho y^r A_\varrho)\,.$$

Definition 1. Wenn n lineare Formen $u_r^{n+1} y^r, \ldots, u_r^{2n} y^r$ für ein bestimmtes n-Tuppel von Koordinaten des Punktes $Y \in S$ und ein bestimmtes $u = u_0$ durchwegs gleich Null sind, dann sagen wir, daß der Punkt Y ein *singulärer Punkt des Raumes* S ist. Punkte, die nicht singulär sind, nennen wir *reguläre Punkte.*

Der Raum τ_Y eines singulären Punktes $Y \in S$ fällt mit dem Raume S zusammen. Der Raum τ_X eines regulären Punktes $X \in S$ ist der *Berührraum* der Mannigfaltigkeit V.

Die Koordinaten jedes singulären Punktes genügen dem System von linearen Gleichungen

$$u_r^\varrho y^r = 0 \tag{4}$$

das in Form eines Matrizenproduktes

$$MY = 0 \tag{5}$$

geschrieben werden kann. Dabei bezeichnet M die Quadratmatrix

$$M = \begin{pmatrix} u_1^{n+1} & \ldots & u_n^{n+1} \\ \vdots & & \\ u_1^{2n} & \ldots & u_n^{2n} \end{pmatrix}$$

und Y die Spaltenmatrix aus den Koordinaten des Punktes Y. Wir werden voraussetzen, daß die Matrix M für $u \in I$ nicht alle Elemente gleich Null hat. Wenn M für $u = u_0$ den Rang $n - h$ $(0 \leqq h < n)$ besitzt, dann wird die Gleichung (5) durch alle Punkte eines linearen Raumes S_{h-1} (von Dimension $h - 1$) befriedigt. Umgekehrt, wenn S_{h-1} der Raum aller singulären Punkte in S ist, dann hat M den Rang $n - h$. Wir nennen S_{h-1} den *singulären Raum* von S.

Was über den Raum S gesagt wurde, kann in ähnlicher Weise über den Raum $\bar{S}$ ausgesprochen werden: Ein willkürlicher Punkt $Z \in \bar{S}$ der Mannigfaltigkeit $\bar{V}$ kann mittels den zum Koordinatensystem mit den Eckpunkten A_ϱ bezogenen Kordinaten $z^{n+1}, \dots, z^{2n}$ bestimmt werden

$$Z = z^\varrho A_\varrho \,. \tag{6}$$

Der lineare Raum

$$\tau_Z = \left(A_{n+1}, A_{n+2}, \dots, A_{2n}, u^r_\varrho z^\varrho A_r\right) \tag{7}$$

ist der Berührraum der Mannigfaltigkeit $\bar{V}$ im Punkte Z falls $Z \in \bar{S}$ ein regulärer Punkt ist, degegen $\tau_Z = \bar{S}$ falls Z ein singulärer Punkt desselben Raumes ist. Die Koordinaten z^ϱ der singulären Punkte befriedigen das System

$$u^r_\varrho z^\varrho = 0 \tag{8}$$

oder in Matrizenform

$$NZ = 0 \,. \tag{9}$$

Dabei sind unter N die Matrix

$$N = \begin{pmatrix} u^1_{n+1} & \dots & u^1_{2n} \\ \vdots & & \\ u^n_{n+1} & \dots & u^n_{2n} \end{pmatrix}$$

und unter Z die Spaltenmatrix aus den Koordinaten des Punktes Z zu verstehen.

Definition 2. Ein linearer Raum $S \in V$, dessen alle singulären Punkte einen linearen Unterraum S_{p-1} $(0 \leqq p \leqq n - 1)$ bilden, nennen wir den *torsalen Raum der Mannigfaltigkeit V von der Stufe p*. Einen Raum ohne singuläre Punkte bezeichnen wir als *regulären Raum*.

Definition 3. Ein Punktepaar $Y \in S$, $Z \in \bar{S}$ nennt man das Paar *zugeordneter Quasifleknodalpunkte*, wenn die Räume (τ_Y, Z) und (τ_Z, Y) die Dimensionen n haben. Den Punkt Y nennt man den *Quasifleknodalpunkt des Raumes S*, den Punkt Z den *Quasifleknodalpunkt des Raumes $\bar{S}$* (weiter nur Q-Punkte). Die Gerade (YZ) nennen wir die *Quasifleknodalgerade* (Q-Gerade) *des Paares der Räume S, $\bar{S}$*. Wenn u das Intervall I durchläuft, kann für jeden Wert des Parameters ein Paar von zugeordneten Q-Punkten $Y \in S$, $Z \in \bar{S}$ ausgewählt werden, so daß $(Y(u))$, $(Z(u))$ ein Kurvenpaar bilden. Diese Kurven nennt man *zugeordnete Quasifleknodalkurven* (Q-Kurven). Die Regelfläche mit den Leitkurven $(Y(u))$, $(Z(u))$ nennen wir die *Quasifleknodalfläche* (Q-Fläche) *des P-Paares*.

Aus den Definitionen folgt:

a) Wenn die beiden Punkte $Y \in S$, $Z \in \bar{S}$ eines Paares der zugeordneten Q-Punkte regulär sind, dann gehen die Berührräume τ_Y bzw. τ_Z durch den Punkt Z bzw. Y.

Beide haben die Dimension n. Die Gerade (Y, Z) ist die gemeinsame Tangente beider Mannigfaltigkeiten V, $\bar{V}$.

Der Berührraum τ_Y schneidet den entsprechenden Raum $\bar{S}$ im Punkte Z mit den Koordinaten $z^\varrho = u^\varrho_r y^r$, oder kurz

$$Z = MY. \tag{10}$$

Ebenso schneidet der Berührraum τ_Z der Mannigfaltigkeit $\bar{V}$ im Punkte $Z \in \bar{S}$ den entsprechenden Raum S im Punkte

$$Y = NZ. \tag{11}$$

b) Wenn ein Raum τ_Y, der die Mannigfaltigkeit V im Punkt Y berührt, den entsprechenden Raum $\bar{S}$ in einem singulären Punkt Z durchschneidet, so sind die in der Definition 3 gestellte Bedingungen für die Dimensionen der Räume (τ_Y, Z), (τ_Z, Y) befriedigt. Die Punkte $Y \in S$ der eben erwähnten Eigenschaft genügen daher wegen (10) und (9) der Gleichung

$$NMY = 0. \tag{12}$$

In ähnlicher Weise ergibt sich für die regulären Punkte $Z \in \bar{S}$, deren Berührräume den entsprechenden Raum S in einem singulären Punkt durchschneiden, die Gleichung

$$MNZ = 0. \tag{13}$$

In beiden Fällen bilden Y und Z ein Paar der zugeordneten Q-Punkte. Den Gleichungen (12) bzw. (13) genügen außer den regulären Punkten $Y \in S$, bzw. $Z \in \bar{S}$ noch alle singulären Punkte der Räume S bzw. $\bar{S}$, da die Gleichungen (12) bzw. (13) die triviale Lösung $MY = 0$ bzw. $NZ = 0$ haben.

c) Wenn $Y \in S$, $Z \in \bar{S}$ zwei beliebige singuläre Punkte sind, dann haben die Räume (τ_Y, Z), (τ_Z, Y) die Dimensionen n. Die genannten Punkte bilden daher ein Paar der zugeordneten Q-Punkte.

Wir werden jetzt alle Q-Punkte und Q-Geraden eines P-Paares aufsuchen. Wir betrachten zuerst den Fall, wann beide Räume regulär sind, und dann, wann einer von ihnen oder beide torsal sind.

1. Setzen wir voraus, daß beide Räume S und $\bar{S}$ regulär sind. Die Ränge der Matrizen M und N sind beide gleich n. Die Gleichungen (10) und (11) drücken reguläre projektive Transformationen von S in $\bar{S}$ und von $\bar{S}$ in S aus. Durch das Zusammensetzen beider Transformationen bekommt man in S eine reguläre Kollineation K mit der Matrix NM. Punkte, die durch die Kollineation K in sich übergeführt werden, und nur diese Punkte bilden die Gesamtheit aller Q-Punkte des Raumes S. Analogisch bekommt man in $\bar{S}$ durch das Zusammensetzen der Transformationen (11) und (10) die Kollineation $\bar{K}$ mit der Matrix MN. Die durch die Kollineation $\bar{K}$ in sich übergeführte Punkte bilden die Gesamtheit der Q-Punkte in $\bar{S}$.

Die Q-Punkte in S bzw. in $\bar{S}$ befriedigen die Gleichungen

$$\alpha Y = NMY \tag{14}$$

bzw.

$$\beta Z = MNZ \tag{15}$$

wo α, β von Null verschiedene Faktoren sind. Beide Gleichungen können in folgender äquivalenter Form geschrieben werden

$$(NM - \alpha E)\, Y = 0 \tag{16}$$

bzw.

$$(MN - \beta E)\, Z = 0 \tag{17}$$

Dabei bedeutet E die Einheitsmatrix.

Da beide Matrizen M, N den Rang n haben, gilt dasselbe auch für die Matrizen NM und MN. Damit beide Gleichungen (16) und (17) eine nicht triviale Lösung besitzen, ist es notwendig und hinreichend, daß α bzw. β die Wurzeln der charakteristischen Gleichungen

$$|NM - \alpha E| = 0 \tag{18}$$

bzw.

$$|MN - \beta E| = 0 \tag{19}$$

sind. Beide Matrizen NM und MN haben dieselben charakteristischen Wurzeln. In der Tat, wählen wir eine der Gleichung (18) genügende Zahl $\alpha \neq 0$, dann hat (16) eine nichttriviale Lösung. Durch das Multiplizieren der Gleichung (16) mit der Matrix M von links ergibt sich nach Umformung

$$(MN - \alpha E)\,(MY) = 0\,.$$

Da Y kein singulärer Punkt ist, hat die letzte Gleichung eine Lösung $MY = Z$ und daher ist α die charakteristische Wurzel der Gleichung

$$|MN - \alpha E| = 0 \tag{20}$$

d.i. der Gleichung (19). Multiplizieren wir die Gleichung (17) mit der Matrix N von links, so ergibt sich, daß jede Wurzel der Gleichung (19) auch der Gleichung (18) genügt.

Bemerkung. Am Beweis wird nichts geändert, wenn die Matrix M oder N oder beide keine regulären Matrizen sind. Die Matrizen NM und MN haben wieder dieselbe charakteristischen Wurzeln, wobei eine von ihnen gleich Null ist.

Im Weiteren werden wir wieder voraussetzen, daß M und N reguläre Matrizen sind.

Es ist wohlbekannt, daß die Gleichungen (16) bzw. (17) durch die Punkte der linearen Räume $S_{s_1-1}, S_{s_2-1}, \ldots, S_{s_m-1}$, bzw. $\bar{S}_{s_1-1}, \bar{S}_{s_2-1}, \ldots, \bar{S}_{s_m-1}$ befriedigt werden, von denen jeder einer von verschiedenen Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ oder $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ der charakteristischen Gleichungen (18) oder (19) entspricht [1]. Die Indexe $s_k - 1$ $(k = 1, \ldots, m)$ geben die Dimensionen der betreffenden Räume an. Die Zahlen $n - s_k$ sind die Ränge der Matrizen $(NM - \alpha E)$ bzw. $(MN - \beta E)$. Die Räume S_{s_k-1} haben keine Punkte gemeinsam. Dasselbe gilt von den Räumen $\bar{S}_{s_k-1}$. Sie heißen Haupträume der Kollineationen K und $\bar{K}$. Daraus ergibt sich der

Satz 1. *Die beiden entsprechenden Räume $S, \bar{S}$ der Mannigfaltigkeiten $V, \bar{V}$ für ein festes $u \in I$ seien regulär. Die Q-Punkte der Räume S bzw. $\bar{S}$ und nur diese sind die Haupträume S_{s_k-1} bzw. $\bar{S}_{s_k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ der Kollineationen K bzw. $\bar{K}$. Sie genügen den Gleichungen* (16) *bzw.* (17), *wenn man in diese nacheinander für α und β die Wurzeln der charakteristischen Gleichungen* (18) *oder* (19) *einsetzt.*

Paare der zugeordneten Q-Punkte bilden: Ein willkürlicher Q-Punkt $Y \in S_{s_k-1} \subset S$ und der zugeordnete Q-Punkt $Z = MY \in \bar{S}_{s_k-1} \subset \bar{S}$ oder ein willkürlicher Q-Punkt $Z \in \bar{S}_{s_k-1} \subset \bar{S}$ und der zugeordnete Q-Punkt $Y = NZ \in S_{s_k-1} \subset S$.

2. Es seien die beiden entsprechenden Räume $S, \bar{S}$ torsal und zwar S von der Stufe h und $\bar{S}$ von der Stufe k. $(0 \leqq h < n, 0 \leqq k < n)$. Die Matrix M hat den Rang $n - h$, die Matrix N den Rang $n - k$. Im Raume S befindet sich der singuläre Raum S_{h-1}, im Raume $\bar{S}$ der singuläre Raum $\bar{S}_{k-1}$.

Die Gleichung (10) drückt jetzt eine singuläre projektive Transformation T_1 von S in $\bar{S}$ aus. Alle reguläre Punkte $Y \in S$ bilden sich mittels T_1 in einen Raum $\bar{S}_{n-h-1} \subset \bar{S}$ ab. Die Gleichung (11) drückt eine singuläre projektive Transformation T_2 von $\bar{S}$ in S aus. Alle reguläre Punkte $Z \in \bar{S}$ bilden sich mittels T_2 in einen Raum $S_{n-k-1} \subset S$ ab. Wir setzen voraus, daß $\bar{S}_{n-h-1}$ kein Unterraum von $\bar{S}_{k-1}$ ist. Dann gibt es in $\bar{S}_{n-h-1}$ reguläre Punkte, die sich mittels T_2 in Punkte $Y \in S$ abbilden. Im Raume S entsteht also eine singuläre Kollineation $K^s = T_2 T_1$ mit der Gleichung

$$Y^* = NMY. \tag{21}$$

Die Matrix NM hat den Rang $r \leqq \min(n - h, n - k)$. Deren charakteristische Gleichung besitzt eine r-fache Wurzel $\alpha = 0$ und q $(0 \leqq q \leqq n - r)$ voneinander verschiedene Wurzeln $\alpha_k \neq 0$ $(k = 1, \ldots, q)$. (Der Fall $q = 0$ bedeutet, daß die Wurzeln der charakteristischen Gleichung durchwegs Null sind.) Die Wurzeln $\alpha_k \neq 0$ geben — in die Gleichung (16) eingesetzt — die Haupträume der Kollineation K^s

und damit Q-Punkte in S. Durch jeden Punkt Y des Hauptraumes geht eine einzige Q-Gerade durch.

In analoger Weise ensteht in $\bar{S}$ eine singuläre Kollineation $\bar{K}^s$ mit der Gleichung

$$Z^* = MNZ \tag{22}$$

deren Haupträume Q-Punkte in $\bar{S}$ bilden.

Bezeichnen wir weiter mit S_h den Raum, der durch den regulären Punkt $Y \in S$ und den singulären Raum S_{h-1} durchgeht. Es sei $U \in S_h$, $U \neq Y$ ein beliebiger regulärer Punkt und X der Schnittpunkt der Geraden (UY) mit S_{h-1}. Wenn λ_1 und λ_2 passende Zahlen sind, dann ergibt sich wegen (5) und (10)

$$MU = M(\lambda_1 Y + \lambda_2 X) = \lambda_1 MY + \lambda_2 MX = \lambda_1 Z . \tag{23}$$

Daraus folgt: Die Berührräume der Mannigfaltigkeit V in allen regulären Punkten des Raumes S_h schneiden den Raum $\bar{S}$ in einem und demselben Punkte Z. Wenn nun Z ein singulärer Punkt ist, bildet er mit einem beliebigen Punkt $Y \in S_h$ immer ein Paar der zugeordneten Q-Punkte. Durch den Punkt Z gehen also ∞^h verschiedene Q-Geraden durch. Alle Punkte, die sich in Z abbilden, befriedigen die Gleichung (12), die als die Gleichung (16) angesehen werden kann, wenn man in (16) die Wurzel $\alpha = 0$ einsetzt. Da die singulären Punkte – die immer Q-Punkte sind – auch der Gleichung (16) genügen, bekommt man den

Satz 2. *Die entsprechenden Räume S, $\bar{S}$ seien beide torsal und zwar S von der Stufe h, $\bar{S}$ von der Stufe k $(0 \leqq h < n,\ 0 \leqq k < n)$. Die Q-Punkte $Y \in S$ und nur diese befriedigen die Gleichung (16), in der α eine beliebige Wurzel der Gleichung (18) oder (19) bedeutet. Die Punkte $Z \in \bar{S}$ und nur diese befriedigen die Gleichung (17), in der β eine beliebige Wurzel der Gleichung (19) oder (18) bedeutet.*

Die Matrizenprodukte NM bzw. MN definieren in S bzw. in $\bar{S}$ die singulären Kollineationen K^s bzw. $\bar{K}^s$.

Paare der zugeordneten Q-Punkte (soweit sie existieren) sind folgende:

a) *Ein willkürlicher regulärer Q-Punkt Y des Hauptraumes $S_{s_k-1} \subset S$ der singulären Kollineation K^s und der zugeordnete reguläre Q-Punkt $Z = MY$ des Hauptraumes $\bar{S}_{s_k-1} \subset \bar{S}$ der singulären Kollineation $\bar{K}^s$ (oder $Z \in \bar{S}_{s_k-1}$ und $Y = NZ \in S_{s_k-1}$).*

b) *Ein regulärer Punkt $Y \in S$ und ein singulärer Punkt $Z = MY \in \bar{S}_{k-1}$ (oder ein regulärer Punkt $Z \in \bar{S}$ und ein singulärer Punkt $Y = NZ \in S_{h-1}$).*

c) *Ein willkürlicher Punkt des singulären Raumes $S_{h-1} \subset S$ und ein willkürlicher Punkt des singulären Raumes $\bar{S}_{k-1} \subset \bar{S}$.*

2. Q-FLÄCHEN

In dieser Kapitel werden einige geometrische Eigenschaften der Q-Flächen behandelt. Zuerst führen wir die von Bonpiani stammende Definition:

Definition 4. Mit Φ bezeichnen wir eine durch die Leitlinien $(Y(u))$, $(Z(z))$ gegebene Regelfläche. Unter dem *Abwickelbarkeitsindex der Fläche* Φ vesteht man die kleinste Zahl ν, für die der Rang der Matrix

$$(Y, Z, Y', Z', \ldots, Y^{(\nu)}, Z^{(\nu)}) \tag{24}$$

kleiner als $2\nu + 2$ ist. [3].

Satz 3. *Φ sei eine Q-Fläche des P-Paares mit dem Abwickelbarkeitsindex $\nu > 1$. Die Tangentenebenen der Fläche Φ in den zugeordneten Q-Punkten $Y(u) \in S$, $Z(u) \in \bar{S}$ haben mit den erzeugenden Räumen S bzw. $\bar{S}$ je eine Gerade gemeinsam.*

Beweis. Wir beweisen z.B., daß die Tangentenebene π_Z $(Z \in \bar{S})$ der Fläche Φ den Raum $\bar{S}$ in einer einziger Geraden durchschneidet. Da $\nu > 1$ vorausgesetzt wird, besitzt die Matrix (Y, Z, Y', Z') den Rang 4 und daher die Matrix

$$(Y, Z, Z') \tag{25}$$

den Rang 3.

Wenn Z ein singulärer Punkt ist, liegt die Gerade (Z, Z') im Raume $\bar{S}$ und der Satz ist bewiesen. Wenn Z ein regulärer Punkt ist, geht der Berührraum $\tau_Z = (A_{n+1}, \ldots, A_{2n}, Z')$ durch den dem Punkte Z zugeordneten Q-Punkt Y. Es gibt daher die Zahlen $\mu^{n+1}, \ldots, \mu^{2n+1}$, die folgenden Beziehungen genügen:

$$Y = \mu^{\varrho} A_{\varrho} + \mu^{2n+1} Z', \quad \mu^{2n+1} \neq 0\,. \tag{26}$$

Wenn $\mu^{n+1} = \mu^{n+2} = \ldots = \mu^{2n} = 0$ wäre, dann hätten wir $Y = \mu^{2n+1} Z'$ und der Rang der Matrix (25) wäre kleiner als 3. Da $\mu^{\varrho} A_{\varrho} \neq \mu Z$ ist (sonst wäre der Punkt Z' von Y und Z linear abhängig), liegt der Punkt $X = \mu^{\varrho} A_{\varrho}$ im Raum $\bar{S}$ und wegen (26) auch in der Ebene π_Z. Die Gerade (ZX) ist dem Raum $\bar{S}$ und der Tangentenebene π_Z gemeinsam.

Satz 4. *Φ sei eine Q-Fläche des P-Paares mit dem Abwickelbarkeitsindex $\nu = 1$. Die Leitlinien der Q-Fläche seien die zugeordneten Q-Kurven $(Y) \subset V$, $(Z) \subset \bar{V}$, die keine stationären Tangenten besitzen. Eine der Leitkurven ist dann die Rückkehrkante der Fläche Φ. Die Bezeichnung kann so durchgeführt werden, daß die Rückkehrkante die Kurve (Y) ist. Kein Punkt der Kurve (Y) ist ein singulärer Punkt im Sinne der Definition 1. Die Schmiegebene σ_Y der Kurve (Y) im Punkt Y hat mit dem Raume S gerade den Punkt Y, mit $\bar{S}$ dagegen eine Gerade gemeinsam.*

Beweis. Da $v = 1$ ist, hat die Matrix (Y, Z, Y', Z') für jedes $u \in I$ den Rang 3 (wäre er 2, so würde Φ in eine Gerade entarten). Man kann also die Zahlen μ^i ($i = 1, \dots, 4$) – nicht alle Null gleich – finden, daß die folgende Gleichung gilt:

$$\mu^1 Y + \mu^2 Z + \mu^3 Y' + \mu^4 Z' = 0 . \tag{27}$$

Es ist klar, daß beide Zahlen μ^3, μ^4 gleichzeitig nicht verschwinden können. Wir zeigen aber, daß eine von ihnen notwendigerweise gleich Null ist.

Wir setzen für einen Augenblick voraus, daß der Gegenteil gilt:

$$\mu^3 . \mu^4 \neq 0 . \tag{28}$$

Da Y, Z für $u = u_0$ zugeordnete Q-Punkte sind, haben die Räume (τ_Y, Z), (τ_Z, Y) die Dimensionen n. Wir wissen, daß beide Räume nur die Gerade (Y, Z) gemeinsam haben. Sollten jetzt beide Gleichungen (27) und (28) richtig sein, so hätten die Räume (τ_Y, Z), (τ_Z, Y) die Ebene (Y, Z, Y', Z') gemeinsam. Daher hat man $\mu^3 . \mu^4 = 0$.

Wenn $\mu^4 = 0$ ist, hat die Fläche Φ nach (27) ihre Rückkehrkante in der Kurve (Y). Wenn $\mu^3 = 0$ ist, so ist es die Kurve (Z). Wir werden voraussetzen $\mu^4 = 0$. Man bekommt dann

$$Y' = \lambda_1 Y + \lambda_2 Z . \tag{29}$$

Kein Punkt der Rückkehrkante ist ein singulärer Punkt. In der Tat, für einen singulären Punkt Y gilt $Y' \in S$ und daraus nach (29) auch $Z \in S$ gegen der Voraussetzung.

Wir beweisen noch die letzte Behauptung des Satzes 4. Die Schmiegebene $\sigma_Y = (Y, Y', Y'')$ ist wegen (29) durch linear unabhängige Punkte Y, Z, Z' aufgespannt. Der Rang der Matrix (Y, Z, Z') ist 3. Weiter deckt sich der Beweis mit dem Beweis des Satzes 3. Damit wird bewiesen, daß σ_Y mit dem Raum $\bar{S}$ eine Gerade gemeinsam hat. Daraus folgt $\sigma_Y \cap S = Y$.

Im nächsten Abschnitt wird vorausgesetzt, daß in S_{2n-1} eine feste Regelfläche Φ gegeben ist. Wir beantworten die Frage, ob es solche P-Paare gibt, die die gegebene Fläche Φ als eine Q-Fläche besitzen. Wir geben auch die Anzahl der Funktionen an, von denen die Wahl der P-Paare abhängt.

Satz 5. *Φ sei eine Regelfläche mit den Leitkurven $(Y(u))$, $(Z(u))$ der Klasse C^{n-1}. Der Abwickelbarkeitsindex sei $v = n$. Dann können P-Paare so gefunden werden, daß Φ eine gemeinsame Q-Fläche dieser Paare ist und (Y) und (Z) ihre Q-Kurven sind. Die P-Paare hängen von $3n^2 - 9n + 8$ willkürlichen Funktionen eines Parameters ab.*

Beweis. Da $v = n$ vorausgesetzt wird, so hat die Matrix aus den Koordinaten der Punkte $Y, Z, Y', Z', \dots, Y^{(n-1)}, Z^{(n-1)}$ für jedes $u \in I$ den Rang $2n$. Als Ecken des Koordinatensystemes in S_{2n-1} können also die genannten Punkte gewählt werden. Man bezeichne mit π_Y bzw. π_Z die Tangentenebenen der Fläche Φ in den Punkten Y bzw. Z.

Wir konstruieren nun für jedes $u \in I$ die folgende Reihe von $2n$ linear unabhängigen Punkten: $A_1 = Y$, $A_2 \in \pi_Y$, $A_{n+1} = Z$, $A_{n+2} \in \pi_Z$. Die Punkte A_2 und A_{n+2} liegen außer der Geraden (Y, Z). Die übrigen Punkte A_i $(i = 3, \ldots, n, n+3, \ldots, 2n)$ sind beliebige Punkte im Raum S_{2n-1}.

Wir müssen also Funktionen a_i^k in folgender Weise wählen:

$$
\begin{aligned}
(30)\qquad A_1 &= Y,\\
A_2 &= a_2^0 Y + a_2^1 Y' + \qquad\qquad + a_2^n Z,\\
A_3 &= a_3^0 Y + a_3^1 Y' + \ldots + a_3^{n-1} Y^{(n-1)} + a_3^n Z + a_3^{n+1} Z' + \ldots\\
&\quad \ldots + a_3^{2n-1} Z^{(n-1)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_n &= a_n^0 Y + a_n^1 Y' + \ldots + a_n^{n-1} Y^{(n-1)} + a_n^n Z + a_n^{n+1} Z' + \ldots\\
&\quad \ldots + a_n^{2n-1} Z^{(n-1)},\\
A_{n+1} &= Z,\\
A_{n+2} &= a_{n+2}^0 Y + \qquad\qquad a_{n+2}^n Z + a_{n+2}^{n+1} Z',\\
A_{n+3} &= a_{n+3}^0 Y + a_{n+3}^1 Y' + \ldots + a_{n+3}^{n-1} Y^{(n-1)} + a_{n+3}^n Z + a_{n+3}^{n+1} Z' + \ldots\\
&\quad \ldots + a_{n+3}^{2n-1} Z^{(n-1)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{2n} &= a_{2n}^0 Y + a_{2n}^1 Y' + \ldots + a_{2n}^{n-1} Y^{(n-1)} + a_{2n}^n Z + a_{2n}^{n+1} Z' + \ldots\\
&\quad \ldots + a_{2n}^{2n-1} Z^{(n-1)}.
\end{aligned}
$$

Dabei müssen noch die Bedingung der Unabhängigkeit der Punkte $A_1, \ldots, A_{2n}$ bewährt werden und die Relationen

$$a_2^1 \neq 0, \quad a_{n+2}^{n+1} \neq 0$$

gelten.

Die Punkte $A_1, \ldots, A_n$ spannen für jedes $u \in I$ den Raum S und die Punkte $A_{n+1}, \ldots, A_{2n}$ den Raum $\bar{S}$ auf.

Wir zeigen, daß Φ tatsächlich eine Q-Fläche des P-Paares ist. Aus (30) folgt:

$$
\begin{aligned}
a_2^1 Y' &= A_2 \quad\; - a_2^0 Y \quad - a_2^n Z,\\
a_{n+2}^{n+1} Z' &= A_{n+2} - a_{n+2}^0 Y - a_{n+2}^n Z.
\end{aligned}
$$

Durch Einsetzen der rechten Seiten der letzten Gleichungen in

$$\tau_Y = (A_1, \ldots, A_n, Y'), \quad \tau_Z = (A_{n+1}, \ldots, A_{2n}, Z')$$

überzeugt man sich leicht, daß die Räume (τ_Y, Z) und (τ_Z, Y) die Dimensionen n haben. Dies genügt zur Behauptung, daß Φ eine Q-Fläche des P-Paares ist.

Die Anzahl der Funktionen a_i^j in (30) beträgt $2[3 + 2n(n - 2)]$. Sie kann noch vermindert werden.

Der Raum S kann statt $A_1, \dots, A_n$ durch die Punkte $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n$ aufgespannt werden, die man in folgender Weise bestimmt: $\bar{A}_1 = A_1$, die Gerade

$$(A_1, A_2) = (Y, a_2^0 Y + a_2^1 Y' + a_2^n Z)$$

ist von dem Koeffizienten a_2^0 unabhängig. Wir setzen $a_2^0 = 0$. Die Gerade (A_1, A_2) verbindet die Punkte $\bar{A}_1$ und

$$\bar{A}_2 = a_2^1 Y' + a_2^n Z\,, \quad a_2^1 \neq 0\,.$$

Die Anzahl der Koeffizienten in $\bar{A}_2$ ist um 1 kleiner als in A_2. Weiter ist es möglich zu schreiben:

$$A_3 = a_3^0 Y + \bar{a}_3^1(a_2^1 Y' + a_2^n Z) + a_3^2 Y'' + \dots + a_3^{n-1} Y^{(n-1)} +$$
$$+ \bar{a}_3^n Z + \dots + a_3^{2n-1} Z^{(n-1)}$$
$$\bar{a}_3^1 = a_3^1 : a_2^1\,, \quad \bar{a}_3^n = (a_3^n a_2^1 - a_2^n a_3^1) : a_2^1\,.$$

Zur Bestimmung der Ebene (A_1, A_2, A_3) ist es möglich die Punkte $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ und

(31) $$\bar{A}_3 = a_3^2 Y''' + a_3^3 Y''' + \dots + \bar{a}_3^n Z + \dots + a_3^{2n-1} Z^{(n-1)}$$

zu nehmen. Die Anzahl der Koeffizienten in A_3 ist um 2 kleiner als in A_3.

Unter Voraussetzung $a_3^2. \neq 0$ ist es möglich zu schreiben:

$$A_4 = a_4^0 Y + \bar{a}_4^1(a_2^1 Y' + a_2^n Z) + \bar{a}_4^2(a_3^2 Y'' + a_3^3 Y''' + \dots + \bar{a}_3^n Z + \dots$$
$$\dots + a_3^{2n-1} Z^{(n-1)}) + \bar{a}_4^3 Y''' + \dots$$
$$\bar{a}_4^1 = a_4^1 : a_2^1\,, \quad \bar{a}_4^2 = a_4^2 : a_3^2\,, \quad \bar{a}_4^3 = (a_4^3 a_3^2 - a_4^2 a_3^3) : a_3^2, \dots$$

Den Raum (A_1, A_2, A_3, A_4) können wir also durch die Punkte $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ und

$$\bar{A}_4 = \bar{a}_4^3 Y''' + \dots + \bar{a}_4^{n-1} Y^{(n-1)} + \bar{a}_4^n Z + \dots + \bar{a}_4^{2n-1} Z^{(n-1)}$$

bestimmen. Unter der Voraussetzung $a_3^2 = 0$, suchen wir den nächsten Koeffizienten, der von Null verschieden ist. Man findet z.B. $a_3^3 \neq 0$. Die Gleichung (31) lautet nun:

$$\bar{A}_3 = a_3^3 Y''' + a_3^4 Y^{(\mathrm{IV})} + \dots + a_3^{2n-1} Z^{(n-1)}\,.$$

Man schreibt weiter

$$A_4 = a_4^0 Y + \bar{a}_4^1(a_2^1 Y' + a_2^n Z) + a_4^2 Y'' + \bar{a}_4^3(a_3^3 Y''' + a_3^4 Y^{(\mathrm{IV})} + \dots$$
$$\dots + a_3^{2n-1} Z^{(n-1)}) + \bar{a}_4^4 Y^{(\mathrm{IV})} + \dots,$$

wo $\bar{a}_4^3, \bar{a}_4^4 \ldots$ Ausdrücke sind, die a_i^j enthalten. Der Raum (A_1, A_2, A_3, A_4) kann durch die Punkte $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ und

$$\bar{A}_4 = a_4^2 Y'' + \bar{a}_4^4 Y^{(\mathrm{IV})} + \ldots + \bar{a}_4^{2n-1} Z^{(n-1)}$$

bestimmt werden. Die Anzahl der Koeffizienten in $\bar{A}_4$ ist um 3 kleiner als in A_4. Wenn wir in dieser Weise fortschreiten, vermindert sich die Anzahl der Koeffizienten in $\bar{A}_r\,(r = 2, \ldots, n)$ um $r - 1$ im Vergleich zu A_r.

Dasselbe Verfahren, durch das wir $A_1, \ldots, A_n$ durch die Punkte $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_n$ ersetzt haben, kann auch in $\bar{S}$ durchgeführt werden. So bekommt man statt $A_{n+1}, \ldots, A_{2n}$ die Punkte $\bar{A}_{n+1}, \ldots, \bar{A}_{2n}$. Schließlich können weitere $2(n-1)$ Koeffizienten durch Normierung der Punkte $\bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n, \bar{A}_{n+2}, \ldots, \bar{A}_{2n}$ weggeschafft werden, sodaß ihre endliche Anzahl

$$2[2 + (2n-2) + (2n-3) + \ldots + (2n - n + 1) - (n-1)] = 3n^2 - 9n + 8$$

gleich ist.

Satz 6. *Die Kurve (Y) der Differentialklasse C^{2n-1} sei als Rückkehrkante einer abwickelbaren Fläche Φ gegeben. Wir setzen für alle $u \in I$ voraus, daß*

$$|Y, Y', Y'', \ldots, Y^{(2n-1)}| \neq 0$$

gilt.

Dann gibt es P-Paare, für die Φ eine gemeinsame Q-Fläche ist. Die P-Paare hängen von $3n^2 - 7n + 6$ Funktionen einer Veränderlichen ab.

Beweis. Die Fläche Φ hat den Abwickelbarkeitsindex $\nu = 1$. Sollte sie eine Q-Fläche sein, ist es gemäß dem Satz 4 notwendig, daß (Y) mit einer Q-Kurve des gesuchten P-Paares zusammenfällt. Jeder erzeugende Raum $S(u)$ für $u \in I$ ist so zu wählen, daß er durch den Punkt Y durchgeht, doch mit der Beschränkung, daß er mit der Schmiegebene $\sigma = (Y, Y', Y'')$ nur den Punkt Y gemeinsam hat.

Wir wählen die Kurven $(A_2(u)), \ldots, (A_n(u))$ so daß für alle $u \in I$ die Punkte

$$Y, Y', Y'', A_2, A_3, \ldots, A_n \tag{32}$$

linear unabhängig sind. Die Punkte $Y = A_1, A_2, \ldots, A_n$ bilden eine Basis des Raumes S.

Die erzeugenden Räume $\bar{S}(u)$ sind so zu wählen, daß sie mit $\sigma(u)$ immer eine Gerade gemeinsam haben. Man wähle also die Kurven $(A_{n+1}(u)), (A_{n+2}(u))$ so daß jede von ihnen die Schmiegebene $\sigma(u)$ in einem Punkte durchschneidet, der verschieden von Y ist, und weitere Kurven $(A_{n+3}(u)), \ldots, (A_{2n}(u))$ so daß für $u \in I$ die Determinante

$$|A_1, A_2, \ldots, A_{2n}|$$

von Null verschieden ist. Die Punkte $A_{n+1}, \ldots, A_{2n}$ bilden eine Basis des Raumes $\bar{S}$. Die Räume $S, \bar{S}$ sind erzeugende Räume der Mannigfaltigkeiten $V, \bar{V}$.

Zusammenfassend bekommt man

$$\begin{aligned}
A_1 &= Y, \\
A_2 &= a_2^0 Y + a_2^1 Y' + a_2^2 Y'' + \ldots + a_2^{2n-1} Y^{(2n-1)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_n &= a_n^0 Y + a_n^1 Y' + a_n^2 Y'' + \ldots + a_n^{2n-1} Y^{(2n-1)}, \\
A_{n+1} &= a_{n+1}^0 Y + a_{n+1}^1 Y', \\
A_{n+2} &= a_{n+2}^0 Y + a_{n+2}^1 Y' + a_{n+2}^2 Y'', \\
A_{n+3} &= a_{n+3}^0 Y + a_{n+3}^1 Y' + a_{n+3}^2 Y'' + \ldots + a_{n+3}^{2n-1} Y^{(2n-1)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{2n} &= a_{2n}^0 Y + a_{2n}^1 Y' + a_{2n}^2 Y'' + \ldots + a_{2n}^{2n-1} Y^{(2n-1)}, \\
&\qquad a_{n+1}^1 \neq 0, \qquad a_{n+2}^2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Die Anzahl der Funktionen, von denen die Wahl der Eckpunkte $A_2, \ldots, A_{2n}$ abhängig ist, kann wieder vermindert werden. In ähnlicher Weise wie im vorangehenden Falle sind die Punkte $A_1, \ldots, A_n$ des Raumes S durch die Punkte $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_n$ zu ersetzen. Die Anzahl der Koeffizienten, die die Punkte $\bar{A}_r$ $(r = 2, \ldots, n)$ bestimmen, ist um $r - 1$ kleiner als die der Punkte A_r. In analoger Weise werden die Punkte $A_{n+2}, \ldots$ $\ldots, A_{2n}$ eingeführt. Durch Normierung der Punkte $\bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_{2n}$ ist es möglich noch $2n - 1$ Koeffizienten abzuschaffen. Deren Gesamtanzahl ist also

$$\begin{aligned}
(2n - 1) + (2n - 2) + \ldots + (2n - n + 1) + 2 + 2 + (2n - 2) + \ldots \\
\ldots + (2n - n + 1) - (2n - 1) = 3n^2 - 7n + 6.
\end{aligned}$$

Durch die Wahl der Punkte A_i sind die notwendigen Bedingungen des Satzes 4 für Existenz der Mannigfaltigkeiten $V, \bar{V}$ erfüllt. Wir zeigen, daß diese Bedingun gen auch hinreichend sind.

Wir setzen z.B.

$$Z = A_{n+1} = a_{n+1}^0 Y + Y', \quad A_{n+2} = a_{n+2}^1 Y' + Y''.$$

Dann bekommt man

$$Z' = A_{n+2} + \left[a_{n+1}^{0\prime} - a_{n+1}^0 (a_{n+1}^0 - a_{n+2}^1)\right] Y + (a_{n+1}^0 - a_{n+2}^1)\, Z.$$

Man kann sich jetzt leicht überzeugen, daß die Räume $(\tau_Y, Z), (\tau_Z, Y)$ die Dimensionen n haben. Daher sind Y, Z zugeordnete Q-Punkte, (Y, Z) die Q-Gerade und Φ die gemeinsame Q-Fläche der betrachteten P-Paare.

Literatur

[1] *Hodge-Pedoe:* Metods of algebraic geometry, vol. I, Cambridge, 1953.
[2] *Ивлев Е. Т.:* Ȏ паре линейчатых поверхностей в трехмерном нростр., Геом. сб. 2, Труды Томского гос. унив. С. мех.-мат., Томск *161*, (1962).
[3] *Švec A.:* Přímkové plochy, litogr., Akad. věd, Praha.
[4] *Vala J.:* Über die Regelflächenpaare mit einer nicht abwickelbaren Quasifleknodalfläche, Czechoslovak Math. Journal *18* (*93*), 1968, Praha.

Anschrift des Verfassers: 611 00 Brno, Kraví hora XII (Vysoké učení technické).