Časopis pro pěstování matematiky

Libuše Marková

Reper sítě na ploše

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 98 (1973), No. 4, 369--374

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117818

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

# REPER SÍTĚ NA PLOŠE

LIBUŠE MARKOVÁ, Olomouc

(Došlo dne 13. prosince 1971)

Studium křivek na ploše v trojrozměrném prostoru patří k základním problémům diferenciální geometrie. R. N. ŠČERBAKOV užitím Cartanových metod konstruuje pohyblivý reper plochy, který je invariantně spojený s libovolnou vrstvou křivek na ploše [2], později charakterizuje obecně metodu reperáže subvariet dané variety pro speciální typy variet [3]. K. SVOBODA, V. HAVEL, I. KOLÁŘ v práci [6] zobecnili Ščerbakovovu metodu a vyložili obecně způsob konstrukce kanonického reperu systému subvariet.

Tento článek navazuje na uvedené výsledky a uvádí další konstrukci reperu sítě křivek na ploše v trojrozměrném ekviafinním prostoru, která je odlišná od konstrukce uvedené v článku [1]. Vychází ze stejných předpokladů o uvažovaných funkcích. Na nerozvinutelné ploše $\boldsymbol{P}$ je dána síť $\boldsymbol{S} = \{\Theta_1, \Theta_2\}$. Vrchol $\boldsymbol{M}$ pohyblivého reperu $\boldsymbol{R}$ je ztotožněn s bodem plochy $\boldsymbol{P}$ a vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ reperu $\boldsymbol{R}$ patří do zaměření tečné roviny plochy v tomto bodě.

V tomto stadiu byl v [1] reper $\boldsymbol{R}$ připojen k síti tím, že se ztotožnily přímky $(\boldsymbol{M}\mathbf{e}_1)$, $(\boldsymbol{M}\mathbf{e}_2)$ v bodě $\boldsymbol{M}$ s tečnami ke křivkám vrstev $\Theta_1$, $\Theta_2$ v tomto bodě. Toto připojení se dělo fixací dvou tzv. význačných parametrů sítě, které odpovídaly formám $\pi_2^1$, $\pi_1^2$. Reper, který závisí pouze na hlavních, tj. na parametrech plochy, a význačných parametrech sítě nazveme polokanonický.

## 1. Konstrukce polokanonického reperu $\boldsymbol{R}$ plochy $\boldsymbol{P}$ vzhledem k síti $\boldsymbol{S}$.

Pro tento reper platí

$$\mathrm{d}\boldsymbol{m} = \omega^i \mathbf{e}_i\,, \quad \mathrm{d}\mathbf{e}_i = \omega_i^k \mathbf{e}_k \quad i, k = 1, 2, 3\,,$$

jednak obvyklé rovnice struktury ekviafinního prostoru a dále

$$(1) \qquad \omega^3 = 0\,, \quad \omega_1^3 = a\omega^1 + b\omega^2\,, \quad \omega_2^3 = b\omega^1 + c\omega^2\,.$$

Prodloužením rovnic (1) lze získat

$$
\begin{aligned}
(2)\qquad & da - a(3\omega_1^1 + \omega_2^2) - 2b\omega_1^2 = m\omega^1 + n\omega^2\,,\\
& db - 2b(\omega_1^1 + \omega_2^2) - a\omega_2^1 - c\omega_1^2 = n\omega^1 + p\omega^2\,,\\
& dc - c(\omega_1^1 + 3\omega_2^2) - 2b\omega_2^1 = p\omega^1 + \omega^2\,.
\end{aligned}
$$

Jelikož plocha $\boldsymbol{P}$ je nerozvinutelná, lze provést fixaci

$$(3)\qquad b^2 - ac = 1\,.$$

Užitím (3) dostáváme z (2) rovnici

$$(4)\qquad -2(\omega_1^1 + \omega_2^2) = F\omega^1 + G\omega^2\,,$$

kde

$$F = \tfrac{1}{2}(2bn - ap - cm)\,,\quad G = \tfrac{1}{2}(2bp - aq - cn)\,.$$

Pokračujeme-li v prodlužování rovnic (4), můžeme provést další fixaci $F = G = 0$. Nyní reper závisí na třech vedlejších parametrech, které odpovídají třem nezávislým formám $\pi_1^1 = -\pi_2^2, \pi_1^2, \pi_2^1$ a určují polohu vektorů $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ v tečné rovině plochy $\boldsymbol{P}$. Fixujeme jeden ze zbývajících parametrů. Předpokládáme-li, že ani jedna vrstva parametrických křivek není asymptotická, je $a \neq 0$, $c \neq 0$. Pak vektor $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ volíme za tečný vektor asociované konjugované sítě (viz [1]), což odpovídá volbě

$$(5)\qquad a = c\,.$$

Polokanonický reper $\boldsymbol{R}$ plochy $\boldsymbol{P}$ vzhledem k síti $\boldsymbol{S}$ je pak dán následující soustavou rovnic

$$
\begin{aligned}
(6)\qquad & d\boldsymbol{m} = \omega^1\mathbf{e}_1 + \omega^2\mathbf{e}_2\,,\\
& d\mathbf{e}_1 = \omega_1^1\mathbf{e}_1 + \omega_1^2\mathbf{e}_2 + (a\omega^1 + b\omega^2)\,\mathbf{e}_3\,,\\
& d\mathbf{e}_2 = \omega_2^1\mathbf{e}_1 - \omega_1^1\mathbf{e}_2 + (b\omega^1 + a\omega^2)\,\mathbf{e}_3\,,\\
& d\mathbf{e}_3 = (M_1\omega^1 + M_2\omega^2)\,\mathbf{e}_1 + (N_1\omega^1 + N_2\omega^2)\,\mathbf{e}_2\,,
\end{aligned}
$$

kde $M_1 = ha - bk$, $M_2 = ka - lb$, $N_1 = ka - bh$, $N_2 = la - kb$, $b^2 - a^2 = 1$. $aM_2 - aN_1 - bM_1 + bN_2 = 0$,

$$\omega_1^1 = \frac{1}{4a}\{(p - m)\,\omega^1 + (q - n)\,\omega^2 + 2b(\omega_2^1 - \omega_1^2)\}\,.$$

Soustava příslušných vnějších rovnic je pak

$$
\begin{aligned}
(7)\quad & (\mathrm{d}a - 2a\omega_1^1 - 2b\omega_1^2) \wedge \omega^1 + (db - a\omega_1^2 - a\omega_2^1) \wedge \omega^2 = 0\,, \\
& (\mathrm{d}b - a\omega_1^2 - a\omega_2^1) \wedge \omega^1 + (da + 2a\omega_1^1 - 2b\omega_2^1) \wedge \omega^2 = 0\,, \\
& (\mathrm{d}M_1 + N_1\omega_2^1 - M_2\omega_1^2) \wedge \omega^1 + (\mathrm{d}M_2 + 2M_2\omega_1^1 + N_2\omega_2^1 - M_2\omega_2^1) \wedge \omega^2 = 0, \\
& (\mathrm{d}N_1 - 2N_1\omega_1^1 - M_1\omega_1^2 - N_2\omega_1^2) \wedge \omega^1 + (\mathrm{d}N_2 - N_1\omega_2^1 + M_2\omega_1^2) \wedge \omega^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Libovůle řešení soustavy (6) závisí na třech funkcích dvou argumentů.

## 2. Geometrická charakteristika reperu *R*.

Z předchozí volby vyplynulo, že směry $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ jsou tečné ke křivkám sítě ***S***. Zbývá stanovit směr vektora $\mathbf{e}_3$. V knize [2] kap. III. § 21. je sestrojen kanonický reper plochy ***P***. Jeho vektory $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ jsou tečnými vektory asymptotických křivek. Vektor $\varepsilon_3$ určuje směr afinní normály plochy. Určíme vztah mezi kanonickým reperem a naším reperem ***R***. Z rovnic asymptotických křivek obou reperů lze odvodit následující relace mezi formami obou reperů

$$
\begin{aligned}
(8)\qquad \omega^1 &= k_1(-b-1)\,v^1 + k_2(-b+1)\,v^2\,, \\
\omega^2 &= k_1 a v^1 + k_2 a v^2\,,
\end{aligned}
$$

kde $v^1, v^2$ jsou Pfaffovy formy příslušné kanonickému reperu. Mezi vektory obou reperů pak platí následující transformační rovnice

$$
\begin{aligned}
(9)\qquad \varepsilon_1 &= k_1\{(-b-1)\,\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2\}\,, \\
\varepsilon_2 &= k_2\{(-b+1)\,\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2\}\,, \\
\varepsilon_3 &= S_1\mathbf{e}_1 + S_2\mathbf{e}_2 + k_3\mathbf{e}_3\,.
\end{aligned}
$$

Diferencujeme-li (9) a bereme-li v úvahu (6) a soustavu diferenciálních rovnic kanonického reperu, získáme řadu vztahů mezi koeficienty a invarianty obou reperů, z nichž lze vyjmout

$$(10)\qquad k_3^2 = 1\,,\quad S_1 = S_2 = 0\,,$$

a dále

$$k_1^6 = \frac{1}{8a^3k_3^3}\,\frac{Z_2}{Z_1}\,,\quad k_2^6 = \frac{1}{8a^3k_3^3}\,\frac{Z_1}{Z_2}\,,$$

kde $Z_1 = 2an(b+1) - m(b+1)^2 - a^2p$, $Z_2 = 2an(b-1) - m(b-1)^2 - a^2p$.
Z (10) okamžitě vyplývá:

*Vektor $\mathbf{e}_3$ reperu **R** patří směru, který určuje afinní normálu plochy v bodě **M** a je stejně normovaný jako $\varepsilon_3$ u kanonického reperu plochy.*

### 3. Kanonický reper sítě na ploše.

Rozhodneme-li se nyní pro síť se speciálními vlastnostmi, lze kanonizaci dokončit pouze prodlužováním rovnic (2) nebo rovnic

$$\omega_3^1 = M_1\omega^1 + M_2\omega^2\,, \quad \omega_3^2 = N_1\omega^1 + N_2\omega^2$$

a získáme pro variace koeficientů podle význačných parametrů vztahy

$$\begin{aligned}
2a\delta m &= 3mb\pi_2^1 + (6an - 3mb)\,\pi_1^2\,, & \delta M_1 &= N_1\pi_2^1 + M_2\pi_1^2\,,\\
2a\delta n &= (nb + 2am)\,\pi_2^1 + (4ap - nb)\,\pi_1^2\,, & \delta M_2 &= -2M_1\pi_1^1 - N_2\pi_2^1 + M_1\pi_1^2\,,\\
2a\delta p &= (4an - pb)\,\pi_2^1 + (2aq + pb)\,\pi_1^2\,, & \delta N_1 &= 2N_1\pi_1^1 + (N_2 - M_1)\,\pi_1^2\,,\\
2a\delta q &= (6ap - 3bq)\,\pi_2^1 + 3bq\pi_1^2\,, & \delta N_2 &= N_1\pi_2^1 - M_2\pi_1^2\,.
\end{aligned}$$

Pak je možné volit:

a) $m = 0$, $q = 0$ za předpokladu, že $np \neq 0$,

b) $m = a$, $q = a$ za předpokladu, že $b^2 - (5b - 2an)(5b - 6ap) \neq 0$,

c) $M_2 = N_2 = 0$ za předpokladu, že $M_1N_1 \neq 0$,

d) $M_1 = N_2 = 0$ za předpokladu, že $N_1M_2 \neq 0$.

Geometrické vlastnosti zvolených sítí ukážeme v dalším.

Pokud další speciální požadavky na síť neklademe, stačí předpokládat, že jsme tuto síť již vybrali, což ve skutečnosti znamená pokládat formy $\omega_1^2$, $\omega_2^1$ za hlavní, tj. položit

$$\omega_1^2 = t\omega^1 + u\omega^2\,, \quad \omega_2^1 = f\omega^1 + g\omega^2\,.$$

Pak reper je určen soustavou

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\boldsymbol{m} = \omega^1\mathbf{e}_1 + \omega^2\mathbf{e}_2\,,\\
&\mathrm{d}\mathbf{e}_1 = (r\omega^1 + s\omega^2)\,\mathbf{e}_1 + (t\omega^1 + u\omega^2)\,\mathbf{e}_2 + (a\omega^1 + b\omega^2)\,\mathbf{e}_3\,,\\
&\mathrm{d}\mathbf{e}_2 = (f\omega^1 + g\omega^2)\,\mathbf{e}_1 - (r\omega^1 + s\omega^2)\,\mathbf{e}_2 + (b\omega^1 + a\omega^2)\,\mathbf{e}_3\,,\\
&\mathrm{d}\mathbf{e}_3 = (M_1\omega^1 + M_2\omega^2)\,\mathbf{e}_1 + (N_1\omega^1 + N_2\omega^2)\,\mathbf{e}_2\,.
\end{aligned} \tag{11}$$

Soustava vnějších rovnic je pak

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}r \wedge \omega^1 + \mathrm{d}s \wedge \omega^2 &= (rf - su - fu + gt - 2rs - M_1b + M_2a)\,\omega^1 \wedge \omega^2\,,\\
\mathrm{d}t \wedge \omega^1 + \mathrm{d}u \wedge \omega^2 &= (-3st + ru + tf - u^2 - N_1b + N_2a)\,\omega^1 \wedge \omega^2\,,\\
\mathrm{d}a \wedge \omega^1 + \mathrm{d}b \wedge \omega^2 &= (-2as - 2bn + af + at)\,\omega^1 \wedge \omega^2\,,\\
\mathrm{d}b \wedge \omega^1 + \mathrm{d}a \wedge \omega^2 &= (-as - 2ar - au + br + ft)\,\omega^1 \wedge \omega^2\,,\\
\mathrm{d}f \wedge \omega^1 + \mathrm{d}g \wedge \omega^2 &= (f^2 - 2gr - gu - M_1a + M_2b)\,\omega^1 \wedge \omega^2\,,
\end{aligned}$$

$$dM_1 \wedge \omega^1 + dM_2 \wedge \omega^2 = (M_1 f - M_2 u - 2M_2 r - N_2 f + N_1 g)\, \omega^1 \wedge \omega^2 \,,$$
$$dN_1 \wedge \omega^1 + dN_2 \wedge \omega^2 = (-M_2 t + M_1 u - 2N_1 s + 2N_1 f - N_2 u)\, \omega^1 \wedge \omega^2 \,.$$

Mezi 12 funkcemi na levé straně rovnic vnějšího systému jsou tři závislosti $-ru + ts = -fu + gt$, (3), (6) a podle Bachvalovy věty ([2] kap. III. § 21.) libovůle řešení závisí na dvou funkcích dvou argumentů.

## 4. Geometrický význam invariantů kanonického reperu sítě.

Ze zadání repera je zřejmé, že obě vrstvy křivek $\Theta_1$, $\Theta_2$ jsou vzájemně rovnocenné a že přechod od vrstvy $\Theta_1$ k vrstvě $\Theta_2$ se děje následující záměnou

$$\begin{array}{c|cccccccc} & 1 & r & t & a & f & b & M_1 & N_1 \\ \downarrow & 2 & -s & g & a & u & b & N_2 & M_2 \end{array}$$

K určení geometrického významu invariantů stačí tedy určit význam invariantů jednoho řádku.

Koeficient $b$. Rovina $z = 1$ protne paraboloid svazku základních kvadrik v hyperbole, jejíž vrcholy jsou $(\pm 1/\sqrt{b}, \pm 1/\sqrt{b})$.

Koeficient $a$. Charakteristika obálky rovin $(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{M}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0$ při pohybu $\omega^1 = 0$ je proťata průmětem hořejší hyperboly do roviny $z = 0$ rovnoběžně s $\mathbf{e}_3$ v bodech $(\pm\sqrt{-a/b}, \pm 1/\sqrt{-a})$.

Koeficient $f$. $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M} - (1/f)\, \mathbf{e}_2$ je ohniskem kongruence $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M} + \alpha \mathbf{e}_2$.

Koeficient $t$. Oskulační rovina křivky $\omega^2 = 0$ je určena vektory $\mathbf{e}_1$, $t\mathbf{e}_2 + a\mathbf{e}_3$.

Koeficient $r$. Průsečnice roviny $(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{E}_3, \mathbf{e}_1, d\mathbf{e}_2)_{\omega^2=0} = 0$ kde $\boldsymbol{E}_3 = M + \mathbf{e}_3$ s rovinou $x = 0$ má směr určený vektorem $(0, -r, b)$.

Koeficient $M_1$. Charakteristika obálky rovin $(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{M}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0$ při $\omega^2 = 0$ je směru $(0, M_1, -f)$.

Koeficient $N_1$. Charakteristika obálky rovin $(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{M}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 0$ při $\omega^2 = 0$ je směru $(N_1, 0, -t)$.

Fixace (a). Za souřadné křivky sítě jsou zvoleny takové křivky, pro které průsečné křivky plochy s rovinami $y = 0$, $x = 0$ měly s parabolami $z = \frac{1}{2}ax^2$, $z = \frac{1}{2}ay^2$ v daném bodě $\boldsymbol{M}$ plochy $\boldsymbol{P}$ dotyk aspoň třetího řádu.

Fixace (b) volí za souřadné křivky takové, pro něž příslušné průsečné křivky mají afinní normály určené směry $(1, 0, -3a)$, $(0, 1, -3a)$ (viz [2] kap. I. § 8.).

Fixace (c), (d). Fixace (c) určuje takové souřadné křivky, pro které charakteristika obálky tečných rovin $(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{M}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0$ při $\omega^1 = 0$ a $\omega^2 = 0$ je směru $\mathbf{e}_3$. Analogický význam má fixace (d). Lze rovněž ukázat, že při fixaci (c) je jedno ohnisko kongruence $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M} + t\boldsymbol{e}_3$ nevlastním bodem, při fixaci (d) jsou ohniska této kongruence souměrně položená vzhledem k bodu $\boldsymbol{M}$ plochy $\boldsymbol{P}$ na afinní normále plochy.

### *Literatura*


[1] *L. Marková:* Konstrukce kanonického reperu sítě na ploše v ekviafinním prostoru, Čas. pro pěst. mat., roč. *96* (1971), Praha.

[2] *P. H. Щербаков*: Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии, Томск 1960.

[3] *Я. Н. Щербаков*: О методе репеража подмногообразий, Труды Томского гос. унив, *168* (1963) 5—11.

[4] *С. Р. Фиников*: Метод внешних форм Картана, Москва-Ленинград 1948.

[5] *I. Kolář:* Užití Cartanových metod ke studiu obecné sítě křivek na ploše v trojrozměrném prostoru, Rozpravy čes. ak. věd 1967 ročník *77*, sešit 5.

[6] *K. Svoboda, V. Havel, I. Kolář:* La métode du repérage des systémes de sous-variétés, Comm. Math. Univ. Carolinae, *5* (1964), 4, 183—201.



*Adresa autorky:* 771 46 Olomouc, Leninova 26 (Přírodovědecká fakulta UP).


## Summary

## MOVING FRAME OF A NET ON A SURFACE


LIBUŠE MARKOVÁ, Olomouc



In this article the construction of a semicanonical and canonical moving frame of an arbitrary net $\boldsymbol{S}$ on a surface $\boldsymbol{P}$ in unimodular threedimensional space is suggested and its geometrical characterisation is given. Besides that the geometrical meaning of some invariants of the canonical moving frame is given.