Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

ÚLOHY A PROBLÉMY

POZNÁMKA O SEMIREGULÁRNÍCH MNOŽINÁCH

V tomto časopise, roč. *97* (1972), str. 334, byla J. KRÁLEM předložena následující

Úloha č. 1. Nechť U je resolutivní množina s hranicí $U^* \neq \emptyset$ v harmonickém prostoru X (viz [1]) a označme pro každý kompakt $K \subset X$ symbolem $C(K)$ prostor všech spojitých (konečných) reálných funkcí na K. Každé funkci $f \in C(U^*)$ je tedy přiřazena harmonická funkce H_f^U na U, která je zobecněným řešením (v Perronově smyslu) Dirichletovy úlohy příslušné k množině U a okrajové podmínce f. Nechť U_r značí množinu všech $x \in U^*$, pro něž $\lim_{\substack{y \to x \\ y \in U}} H_f^U(y) = f(x)$ pro každou funkci $f \in C(U^*)$. Množina U se nazývá semiregulární, jestliže pro každou funkci $f \in C(U^*)$ lze příslušnou funkci H_f^U rozšířit na $F \in C(U \cup U^*)$. Je-li U semiregulární, pak U_r je kompaktní. Obrácení tohoto tvrzení neplatí v Bauerových harmonických prostorech. Rozhodněte, zda obrácené tvrzení platí v Brelotových prostorech (nebo alespoň v harmonickém prostoru indukovaném klasickými harmonickými funkcemi na n-rozměrném euklidovském prostoru $X = R^n$), tj. rozhodněte o správnosti následujícího

Tvrzení. *Nechť X je Brelotův prostor a buď $U \subset X$ relativně kompaktní otevřená (a tedy resolutivní) množina, $U^* \neq \emptyset$. Pak U je semiregulární, právě když U_r je kompaktní.*

V této poznámce dokážeme jedno tvrzení o semiregulárních množinách a jeho aplikaci na parciální diferenciální rovnice.

Označení. Je-li M množina v topologickém prostoru, označíme $\overline{M}$ její uzávěr a int M její vnitřek.

Lemma. *Nechť U je relativně kompaktní otevřená resolutivní množina v harmonickém prostoru X, $U^* \neq \emptyset$. Předpokládejme, že množina $U^* - \overline{U}_r$ je polární. Potom platí $U^* - \overline{U}_r \subset \operatorname{int} \overline{U}$.*

Důkaz. Nechť $x \in U^* - \overline{U}_r$ a Y je otevřené souvislé okolí bodu x takové, že $Y \cap \overline{U}_r = \emptyset$. Označme $P = Y \cap (U^* - \overline{U}_r)$, $Y_1 = U \cap Y$, $Y_2 = Y - \overline{U}$. Zřejmě platí $Y - P = Y_1 \cup Y_2$, $Y_1 \cap \overline{Y}_2 = \overline{Y}_1 \cap Y_2 = \emptyset$ a $Y_1 \neq \emptyset$. Uvažujme nyní Y jako harmonický prostor. Podle předpokladu je $U^* - \overline{U}_r$ polární množina v X a tedy P

je polární podmnožina souvislého harmonického prostoru Y. Z toho plyne, že množina $Y - P$ je souvislá ([2], Proposition 6.2.5), takže $Y_2 = \emptyset$. Vidíme, že $Y \subset \overline{U}$ a tedy $x \in \operatorname{int} \overline{U}$.

Věta. *Nechť U je relativně kompaktní otevřená resolutivní množina v $\mathfrak{S}$-harmonickém prostoru X, $U^* \neq \emptyset$ a nechť množina $U^* - U_r$ je polární.*

Jestliže U_r je kompaktní, potom je U semiregulární.

Důkaz. Nechť $f \in C(U^*)$. Protože X je $\mathfrak{S}$-prostor, je funkce H_f^U omezená harmonická funkce v U ([2]. Proposition 2.4.1.b). Zvolme $x \in U^* - U_r$ a buď Y otevřené okolí bodu x takové, že $Y \subset \operatorname{int} \overline{U} - U_r$ (podle lemmatu takové okolí existuje). Uvažujme nyní harmonický prostor Y a označme $F = U^* - U_r$. Potom je $F \cap Y$ uzavřená polární podmnožina harmonického prostoru Y a tedy omezenou harmonickou funkci H_f^U v $Y - F$ lze spojitě (dokonce harmonicky) rozšířit na celé Y ([2], Corollary 6.2.5). Speciálně tedy pro každé $x \in U^* - U_r$ existuje vlastní $\lim_{\substack{y \to x \\ y \in U}} H_U^f(y)$. Odtud již snadno plyne, že U je semiregulární.

Důsledek. *Nechť X je $\mathfrak{P}$-harmonický prostor se spočetnou bazí a nechť v X platí axiom polarity. Buď $U \subset X$ relativně kompaktní otevřená resolutivní množina s neprázdnou hranicí.*

Pak U je semiregulární, právě když U_r je kompaktní.

Důkaz. Tvrzení okamžitě plyne z dokázané věty a z [2], Corollary 9.1.3.

Poznámky. 1. Výsledek zformulovaný v důsledku lze pro harmonické prostory splňující dodatečné předpoklady odvodit z vět o Choquetových simplexech ([3], Theorem 3.9). (V citované práci se předpokládá, že X je souvislý harmonický prostor ve smyslu Baureovy axiomatiky, v němž konstanty jsou harmonické, body polární, nezáporné harmonické funkce oddělují body a platí axiom D.)

2. V Brelotově prostoru obecně nemusí být množina $U^* - U_r$ polární; existují tedy Brelotovy prostory, v nichž neplatí axiom polarity ([2], Exercise, 6.3.10). Na druhé straně existují harmonické prostory splňující předpoklady tvrzení uvedeného v důsledku, které nejsou Brelotovy ([2], Exercises 3.1.7, 9.1.3). Každý $\mathfrak{P}$-harmonický prostor se spočetnou bazí splňující dominační axiom splňuje však axiom polarity ([2], Corollary 9.2.3). Poznamenejme, že důležité příklady Brelotových prostorů, indukovaných řešeními parciálních diferenciálních rovnic eliptického typu, jsou $\mathfrak{P}$-prostory, v nichž platí dominační axiom.

Jako aplikaci tvrzení uvedeného v důsledku odvodíme jedno tvrzení týkající se řešení parciálních diferenciálních rovnic.

Nechť X je otevřená podmnožina euklidovského prostoru R^n ($n \geqq 2$) a nechť a_{ij}, b_i, c ($i, j = 1, \ldots, n$) jsou spojité reálné funkce na X takové, že $a_{ij} = a_{ji}$, matice

(a_{ij}) je positivně definitní v každém bodě z X, funkce a_{ij}, b_i, c jsou lokálně lipschitzovské a $c \leqq 0$. Pro každou otevřenou množinu $U \subset X$ buď $\mathscr{H}(U)$ množina všech reálných funkcí h na U třídy C^2 takových, že na U platí

$$(*) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial h}{\partial x_i} + ch = 0 .$$

Potom je $(X, \mathscr{H})$ Brelotův harmonický prostor splňující dominační axiom. Jestliže je $Y \subset \bar{Y} \subset X$ otevřená množina, je $(Y, \mathscr{H})$ $\mathfrak{P}$-prostor. Je-li $U \subset \bar{U} \subset X$ otevřená množina, pak pro $x \in U^*$ platí $x \in U_r$, právě když x je regulárním bodem množiny U pro Laplaceovu rovnici ([2], exercises 3.2.7, 9.2.9, [4], chap. VII). Odtud a z důsledku plyne snadno následující

Tvrzení. *Nechť U je libovolná neprázdná otevřená omezená množina, pro niž $\bar{U} \subset X$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *Pro každou $f \in C(U^*)$ je zobecněné řešení Dirichletovy úlohy rovnice $(*)$ (příslušné f a U) stejnoměrně spojité v U.*

(ii) *Množina regulárních bodů množiny U vzhledem k* Laplaceově rovnici *je uzavřená.*

Speciálně v případě klasických harmonických funkcí je neprázdná omezená otevřená množina $U \subset R^n$ semiregulární tehdy a jen tehdy, když U_r je kompaktní.

Poznámka při korektuře. Existuje Brelotův prostor X a relativně kompaktní množina $U \subset X$ tak, že U_r je neprázdná kompaktní množina a přitom U není semiregulární. (Konstrukce takového prostoru bude uvedena v příštím čísle tohoto časopisu.) Tvrzení uvedené ve formulaci úlohy tedy obecně v Brelotových prostorech neplatí.

Literatura

[1] *C. Constantinescu:* Harmonic spaces and their connections with the semi-elliptic differential equations and with the Markov processes, Elliptische Differentialgleichungen (Symposium), Akademie-Verlag, Berlin 1969.

[2] *C. Constantinescu - A. Cornea:* Potential theory on harmonic spaces, Springer Verlag, Berlin 1972.

[3] *E. G. Effros - J. L. Kazdan:* Applications of Choquet simplexes to elliptic and parabolic boundary value problems, J. Diff. Equations *8* (1970), 95—134.

[4] *R. M. Hervé:* Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Ann. Inst. Fourier *12* (1962), 415—571.

Ivan Netuka, Praha