Časopis pro pěstování matematiky

Pavel Bartoš

K riešiteľnosti diofantickej rovnice $\sum_{j=1}^{n}(1/x_j) = a/b$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 98 (1973), No. 3, 261--264

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117807`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

K RIEŠITEĽNOSTI DIOFANTICKEJ ROVNICE $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} = \frac{a}{b}$

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

(Došlo dňa 10. decembra 1971)

V článku [1] je odvodená veta 3 o postačujúcich podmienkach rieštieľnosti rovnice

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} = \frac{a}{b}, \quad (a, b) = 1, \quad n \geqq 2 \tag{1}$$

v prirodzených číslach $x_1, x_2, \ldots, x_n$ v prípade $n = 3$. V tomto článku túto vetu zovšeobecníme pre ľubovoľné $n \geqq 2$.

Veta 1. *Prirodzené čísla x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, ktoré možno vyjadriť vo forme*

$$x_1 = \frac{\gamma \prod_{j=2}^{n} u_j}{ab}, \quad x_k = \frac{\gamma b \prod_{j=2}^{n} u_j \sum_{j=2}^{n} u_j}{a u_k (\gamma \prod_{j=2}^{n} u_j - b^2)}, \quad k = 2, 3, \ldots, n \tag{2}$$

kde $a, b, \gamma, u_2, u_3, \ldots, u_n$ sú prirodzené čísla, tvoria riešenie rovnice (1).

Dôkaz sa vykoná dosadením (2) do (1).

Veta 2. *Pre čísla $\gamma, u_2, u_3, \ldots, u_n$ v* (2) *platí za predpokladu $x_1 = \min_j \{x_j\}$*

$$b^2 < \gamma \prod_{j=2}^{n} u_j \leqq n b^2 . \tag{3}$$

Dôkaz. Za učineného predpokladu platí $1/x_1 < a/b$, $n/x_1 \geqq a/b$, z čoho vyplýva (3).

Poznámka 1. Podmienky (2) vety 1 sú v prípade $n = 3$ aj nutné (pozri vetu 1 článku [1]). Tak je tomu aj v prípade $n = 2$, v ktorom znejú:

$$x_1 = \frac{\gamma u}{ab}, \quad x_2 = \frac{\gamma b u}{a(\gamma u - b^2)} . \tag{2'}$$

Ak vyjadríme triviálne $x_1 = (b + k)/a$, potom z (2') $\gamma u = b^2 + bk$, takže $x_2 = (b + b^2/k)/a$, čo sú nutné a postačujúce podmienky pre riešenia rovnice (1) pri $n = 2$ (pozri vetu 1 v článku [2]).

Pre $n > 3$ podmienky (2) nie sú nutné. Napr. rovnica $\sum_{j=1}^{4} (1/x_j) = 1$ má podľa tab. 1 v článku [3] 14 riešení. Pretože v tomto prípade podľa vety 2 $1 < \gamma \prod_{j=2}^{4} u_j \leqq 4$, ľahko sa presvedčíme že zo vzorcov (2) všetky tieto riešenia nedostaneme. Jednako možno vzorce (2) použiť na vypočítanie značného počtu riešení rovnice (1) pri ľubovoľnom $n \geqq 2$.

Veta 3. *Nech $b \equiv r \pmod a$, $0 < r < a$. Nech $b = b_1 b_2 \dots b_n$ je rozklad na prirodzené čísla. Číslo a/b je číslom A_n, čiže rovnica (1) má riešenie v prirodzených číslach, ak buď b, buď $\sum_{j=2}^{n} b_j$ má deliteľa tvaru $at - r$, $t \geqq 1$.*

Dôkaz. Voľme

$$\gamma = (b + at - r)\, b_1\,, \quad u_j = b_j\,, \quad j = 2, 3, \dots, n\,. \tag{4}$$

Podmienka (3) je zrejme splnená. Po dosadení (4) do (2) máme

$$x_1 = \frac{b + at - r}{a}\,, \quad x_k = \frac{(b + at - r)\, b_1 \prod_{j=2}^{n} b_j \sum_{j=2}^{n} b_j}{a b_k (at - r)}\,, \quad k = 2, 3, \dots, n\,. \tag{5}$$

Z $(a, b) = 1$ a $b \equiv r \pmod a$ ihneď vyplýva $(a, at - r) = 1$. Preto keď $(at - r) \mid b$, potom tiež $a(at - r) \mid (b + at - r)$. Ďalej $b_k \mid \prod_{j=2}^{n} b_j$, takže x_j sú prirodzené čísla, $j = 1, 2, \dots, n$. Obdobne keď $(at - r) \mid \sum_{j=2}^{n} b_j$. Tým je veta dokázaná.

Poznámka 2. Veta 3 v článku [1] je zvláštny prípad vety 3 tohoto článku pre $n = 3$, $b_1 = 1$, $b_2 = b$, $b_3 = 1$.

Dôsledok 1. *Ak $a \equiv n \pmod 2$, potom číslo $a/[aq + \frac{1}{2}(a - n + 2)]$ je číslom A_n. O tom sa ľahko presvedčíme, ak v (5) volíme $b_2 = b$, $b_1 = b_3 = b_4 = \dots = b_n = 1$. Stačí na základe vety 3 dokázať, že $b + n - 2$ má deliteľa tvaru $at - r$.*

Avšak $r \equiv \frac{1}{2}(a - n + 2) \pmod a$ a teda $b + n - 2 = aq + \frac{1}{2}(a + 2 - n) + (n - 2) \equiv aq + \frac{1}{2}(a - 2 + n) = -r \pmod a$; čím je tvrdenie dokázané.

Veta 4. *Nech b má deliteľa tvaru $at - 1$, $t \geqq 1$. Potom rovnica (1) má riešenie v prirodzených číslach, čiže číslo a/b je číslom A_n, $n \geqq 2$.*

Dôkaz. Podľa predpokladu $b = b'(at - 1)$. Stačí vetu dokázať pre rovnicu

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} = \frac{a}{at - 1}.$$

Ak je totižto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jej riešením, je $(b'x_1, b'x_2, \ldots, b'x_n)$ riešením rovnice $\sum_{j=1}^{n} 1/x_j = a/b'(at - 1) = a/b$, čiže ak je číslo $a/(at - 1)$ číslom A_n, je ním aj číslo a/b. Číslo $at - 1$ dáva modulo a najmenší kladný zvyšok $r = a - 1$ a má deliteľa $a - r = a - (a - 1) = 1$. Teda podľa vety 3 tohoto článku je $a/(at - 1)$ a potom aj a/b číslom A_n.

Dôsledok 2. *Čísla $1/b$, $2/b$ sú číslami A_n. V prvom prípade má b deliteľa $1 = 1 . 2 - 1$ a v druhom $1 = 2 . 1 - 1$, teda v oboch prípadoch deliteľa tvaru $at - 1$, $t = 1$.*

Veta 5. *Číslo a/b je číslom A_n pre*

$$n = a - r + 1 \tag{6}$$

(r má rovnaký význam ako vo vete 3).

Dôkaz. Voľme $b_1 = b$, $b_2 = b_3 = \ldots = b_n = 1$. Číslo $\sum_{j=2}^{n} b_j = n - 1$ má deliteľa tvaru $at - r$, čo je zrejmé zo (6). Preto podľa vety 3 je a/b číslom A_{a-r+1}. Tým je veta dokázaná.

Poznámka 3. Treba si uvedomiť, že ak je číslo a/b číslom A_n, je aj číslom $A_{n'}$ pre všetky $n' > n$.

Poznámka 4. Veta 5 dáva len v prípade $r = 1$ triviálny výsledok $n = a$. Je to práve ten prípad, ktorí robí ťažkosti v mnohých prípadoch (napr. pri dôkaze domnienky P. Erdösa, že $4/b$ je číslom A_3).

Literatúra

[1] *Bartoš P., Pehartzová-Bošanská K.:* K riešeniu diofantickej rovnice $1/x + 1/y + 1/z = a/b$. Čas. pro pěst. mat. *96* (1971), 294—299.

[2] *Bartoš P.:* Poznámka o počte riešení rovnice $1/x + 1/y = a/b$ v prirodzených číslach. Čas. pro pěst. mat. *95* (1970), 411—415.

[3] *Bartoš P.:* O riešení rovnice $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ a rovnice $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = yx_1x_2 \ldots x_n$ v prirodzených číslach. Čas. pro pěst. mat. *96* (1971), 367—370.

Adresa autora: 801 00 Bratislava, Sibírska 9.

Zusammenfassung

ZUR LÖSBARKEIT DER DIOPHANTISCHEN GLEICHUNG $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} = \frac{a}{b}$

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

Es werden die Formeln (2) abgeleitet, mit deren Hilfe man algorithmisch eine gewisse Anzahl von Lösungen der Gleichung (1) in natürlichen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bestimmen kann. Weiter wird dann Satz 3 bewiesen, der Bedingungen angibt, die dazu hinreichend sind, dass die Zahl a/b die Zahl A_n ist. Aus diesem Satz werden gewisse Folgerungen hergeleitet, insbesondere Satz 5, laut dem a/b die Zahl A_{a-r-1} ist, falls $b \equiv r \pmod{a}$ ist, $0 < r < a$.