Časopis pro pěstování matematiky

Jaromír Krys

Konfigurace bodů rovinné kubiky. II.

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 98 (1973), No. 3, 252--260

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117806

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

KONFIGURACE BODŮ ROVINNÉ KUBIKY II

Jaromír Krys, Hradec Králové

(Došlo dne 24. listopadu 1971)

1. ÚVOD

Tato práce je pokračováním článku [1], jehož znalost předpokládáme a pokračujeme také v označování vět i poznámek. V příspěvku dokážeme existenci nekonečně mnoha dalších konfigurací bodů rovinné kubiky. Celá práce je založena na studiu grupy bodů rovinné kubiky. Hned připojujeme poznámku, že vzhledem ke stručnosti nerozlišujeme pojem grupa a její množina. Čtenář jistě snadno pozná, kdy se jedná o množinu (pole grupy) a kdy o strukturu. Všechny problémy řešíme v komplexně projektivní rovině a předpokládáme znalosti vět o rovinné kubice.

2. PODGRUPY GRUPY G

Věta 25. *Nechť G je komutativní grupa a pro každé $a \in G$ existuje takové $a_1 \in G$, pro které platí $a_1^2 = a$. (Operaci grupy označujeme jako násobení.) Potom platí: Jestliže v G existuje podgrupa G_n řádu n, kde n je přirozené číslo větší než 1, pak v G existuje také podgrupa G_{2n} řádu $2n$.*

Důkaz. Nejdříve dokážeme, že existuje takový prvek $y \in G$ a $y \notin G_n$, že současně platí $y^2 = g_i$, přičemž $g_i \in G_n$. Pro $a \neq 1$, $a \in G_n$ nemůže zřejmě být $a^2 = a$, proto v G_n existuje prvek x, pro který je $x^2 = g_j$, $x \neq g_j$ a $g_j \in G_n$.

Kdyby neexistoval prvek y (uvažovaných vlastností), potom musí v G_n existovat aspoň jeden (podle předpokladu) prvek $x_1 \neq x$, takový, že platí $x_1^2 = x$. Podobně v G_n musí existovat prvky $x_2, x_3, \ldots, x_n$, pro které platí, že jsou navzájem různé a dále $x_{j+1}^2 = x_j$, kde $j = 1, 2, \ldots, n$. To však nemůže nastat, neboť G_n je konečná podgrupa.

Nyní dokážeme, že $G_n \cup \{y\} \equiv G_{2n}$, kde $\{y\}$ je prvek grupy G/G_n určený uvažovaným prvkem y. G_{2n} je pologrupou, neboť je-li:

1. $y_i \in \{y\}$, $y_j \in \{y\}$, potom $y_i y_j = g_i \in G_n$;
2. $y_i \in \{y\}$, $g_i \in G_n$, potom $y_i g_i = y_j \in \{y\}$;
3. $g_i \in G_n$, $g_j \in G_n$, potom $g_i g_j = g_k \in G_n$.

Konečně dokážeme, že ke každému $y_i \in \{y\}$ existuje jediný prvek inverzní. Položíme $y_i = yg_i$, $y'_i = yg_j$, kde g_j je takové, že $g_i g_j = g_i^{-1}$ a g_i, y jsou prvky uvažované v prvé části důkazu této věty. Protože $g_i \in G_n$, existuje jediné g_j této vlastnosti. Dostáváme $y_i y'_i = 1$ a tedy existuje k danému y_i jediné $y'_i = y_i^{-1}$.

Uvažme nyní, zda grupa G bodů rovinné kubiky C rodu 1 splňuje větu 25. Nechť bod $A \in C$. Hledejme bod A_1, pro který platí $A_1 + A_1 = A$. Přímka OA protne kubiku ještě v bodě A'. Hledaný bod A_1 má za svůj tečnový bod bod A'. Zřejmě ke každému bodu A existují v tomto případě čtyři vesměs navzájem různé body A_1. Můžeme tedy aplikovat větu 25 na grupu G. Nechť J_0 je množina uvažovaná ve větě 10, D_0 z věty 12, E_1 z věty 14 a F_0 z věty 16. Potom zřejmě platí:

Věta 26. *Grupa G bodů rovinné kubiky rodu 1 má tyto podgrupy:*

1. $J_0, J'_1, J'_2, \ldots, J'_n$. *$J_0$ má devět bodů a J'_n má $9 \cdot 2^n$ prvků (bodů).*
2. $D_0, D'_1, D'_2, \ldots, D'_n$. *$D_0$ má právě dva prvky a D'_n má $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ prvků.*
3. $E_1, E'_2, E'_3, \ldots, E'_n$. *$E_1$ má právě čtyři prvky a E'_n má $4 \cdot 2^n = 2^{n+2}$ prvků.*
4. $F_0, F'_1, F'_2, \ldots, F'_n$. *$F_0$ má právě tři prvky a F'_n má $3 \cdot 2^n$ prvků.*

Poznámka 8. Grupa bodů kubiky s bodem uzlovým splňuje také větu 25, zde však další podgrupy nedostáváme. Později ukážeme, že nemusí být $J'_{2k} \equiv J_k$ a obdobně $D'_{2k} \equiv D_k$, $E'_{2k} \equiv E_k$ a $F'_{2k} \equiv F_k$.

3. KONFIGURACE BODŮ KUBIKY RODU 1

Aplikujeme-li nyní větu 2 na podgrupy J'_n, F'_n a D'_n, dostáváme:

Věta 27. *Existují rovinné konfigurace bodů rovinné kubiky rodu 1 typu:*

$$(27 \cdot 2^n_{9 \cdot 2^n}, 9^2 \cdot 2^{2n}_3), \quad (9 \cdot 2^n_{3 \cdot 2^n}, 9 \cdot 2^{2n}_3) \quad \text{a} \quad (3 \cdot 2^{n+1}_{2^{n+1}}, 2^{2n+2}_3),$$

kde n je přirozené číslo a u prvních dvou typů může být n také rovno nule.

K odvození dalších konfigurací, je třeba poznat strukturu podgrup grupy G. V dalším budeme studovat jenom ty podgrupy, které obsahují aspoň jeden inflexní bod a tedy splňují větu 4. Dále budeme uvažovat jenom podgrupy grupy G bodů kubiky rodu 1.

Věta 28. *Jestliže podgrupa $\bar{G} = \{X_1, \ldots, X_g\}$ grupy G obsahuje tři navzájem různé dotykové body tečen vedených z bodu M ke kubice, potom $\bar{G}$ je složena z $g/4$ čtveřic bodů se společným tečnovým bodem.*

Důkaz. Nechť X_1, X_2, X_3 splňují podmínky věty 28. Nechť X_4 je bod kubiky, který má s body X_1, X_2, X_3 společný tečnový bod. Přímka X_1X_2 protíná kubiku ještě v dalším bodě např. Z a podle věty 4 platí $Z \in \bar{G}$. Přímka X_3Z zřejmě protíná kubiku v bodě $X_4 \in \bar{G}$. Nechť $X_5 \in \bar{G}$ ($X_5 \neq X_1, X_2, X_3, X_4$). Přímka X_1X_5 protíná kubiku ještě v bodě např. X_9. Přímka X_2X_9 protíná kubiku ještě v dalším bodě grupy $\bar{G}$, např. X_6. Podle známé věty X_5 a X_6 mají společný tečnový bod. Pomocí bodů X_3 a X_4 dostaneme body X_7 a X_8 a platí, že X_5, X_6, X_7, X_8 mají společný tečnový bod. X_5 jsme však zvolili libovolně a tedy s každým bodem leží v $\bar{G}$ celá čtveřice se společným tečnovým bodem. Těchto čtveřic je zřejmě $g/4$.

Věta 29. *Nechť podgrupa $\bar{G}$ grupy G nesplňuje tvrzení věty* 28 *a nechť má sudý počet prvků. Potom je tvořena dvojicemi bodů se společným tečnovým bodem. Těchto dvojic je zřejmě $g/2$.*

Důkaz. Bod X_i dané grupy lze spojit s každým bodem dané grupy a třetí průsečík této spojnice s kubikou leží také v dané grupě (věta 4). Nechť X_i je inflexní bod. Potom jeho tečnový bod je X_i. Protože g je sudé musíme rozdělit lichý počet bodů do dvojic jejichž spojnice prochází bodem X_i. Právě jedna z těchto spojnic musí být tečna vedená z X_i ke kubice. Bod dotyku této tečny označme X_j. Body X_i a X_j mají společný tečnový bod a sice bod X_i. Nechť X_i není inflexní bod. Tečnový bod bodu X_i označme $\bar{X}_i$. Tečnový bod $\bar{X}_i$ označme $\bar{\bar{X}}_i$. Zřejmě je $\bar{X}_i \neq \bar{\bar{X}}_i$. Bodem $\bar{X}_i$ lze vést spojnici s X_i a spojnici s $\bar{\bar{X}}_i$. Zbývajících $g - 3$ bodů dané grupy musíme rozdělit do disjuktních dvojic. Protože $g - 3$ je číslo liché, lze to jedině tak, že tečnový bod jednoho z těchto $g - 3$ bodů např. X_j je bod $\bar{X}_i$. Opět jsme našli k X_i bod X_j a platí, že mají společný tečnový bod.

Tím jsme rozdělili námi uvažované grupy v podstatě do dvou skupin. Z uvažovaných grup jsme nezařadili jedině grupu J_0 a F_0, jejichž strukturu však známe. V dalším budeme označovat ${}_1\bar{G}$ grupu splňující tvrzení věty 28 a ${}_2\bar{G}$ grupu splňující tvrzení věty 29.

Věta 30. a) *Prvek* (třída) $\{A\}$ *grupy* $G/{}_1\bar{G}$ *je tvořen* $g/4$ *čtveřicemi bodů se společným tečnovým bodem.*

b) *Prvek* (třída) $\{B\}$ *grupy* $G/{}_2\bar{G}$ *je tvořen* $g/2$ *dvojicemi bodů se společným tečnovým bodem.*

Důkaz. a) Nechť $A_i \in \{A\}$, $A_i \notin {}_1\bar{G}$. Nechť O je inflexním bodem grupy ${}_1\bar{G}$. Společně s bodem O leží v ${}_1\bar{G}$ i body G_1, G_2, G_3 o nichž platí, že mají společný tečnový bod a sice bod O. Další body třídy $\{A\}$ dostaneme takto: Spojíme A_i postupně s O, G_1, G_2 a G_3 a dostaneme ještě body kubiky A_i^1, A_i^2, A_i^3 a A_i^4. Tyto body mají podle známé věty společný tečnový bod a dále platí, že tyto body neleží v $\{A\}$. Nyní body A_i^i, ($i = 1, \ldots, 4$) spojíme s O a dostaneme ještě další body kubiky A_i, A_j, A_k, A_m, které leží v $\{A\}$ a zřejmě tyto body, tak jako body A_i^i, mají společný tečnový bod. Bod A_i jsme volili libovolně a tedy platí, že s každým bodem prvku $\{A\}$ leží v $\{A\}$ celá čtveřice bodů se společným tečnovým bodem. Zřejmě těchto čtveřic je $g/4$.

b) Zcela obdobně dokážeme tvrzení b) věty 30. Tento důkaz přenecháme čtenáři.

Uvažujme nyní prvek (třídu) $\{A\}$ grupy $G/_2\bar{G}$. Nechť $\{2A\} \not\equiv \{T - A\}$. Potom $\{A\}$ a $\{T - 2A\}$ jsou dvě různé třídy a platí, že přímka $A_iA_j(A_i, A_j \in \{A\})$ protne kubiku ještě v bodě $M_i \in \{T - 2A\}$. Každým bodem $A_i \in \{A\}$ prochází $g - 1$ přímek takových, že na každé z nich leží právě dva různé body třídy $\{A\}$ a právě jeden bod M_i třídy $\{T - 2A\}$. Vzhledem k větě 30 jsou body M_i rozděleny do dvou disjunktních množin M a M' takových, že $g/2$ body M_i množiny M prochází právě $g - 2/2$ přímek výše uvažovaných a $g/2$ body M_i množiny M' prochází právě $g/2$ těchto přímek. Dokažme nyní existenci třídy např. $\{B\} \not\equiv \{A\}$ o které platí $\{T - 2A\} \equiv \{T - 2B\}$ a dále, že body M_i se dají rozdělit do uvažovaných množin M a M', přičemž platí, že body množiny M prochází právě $g/2$ přímek $B_iB_jM_i$ a body množiny M' prochází právě $g - 2/2$ přímek $B_iB_jM_i$ $(B_i \not\equiv B_j)$. Podle věty 6 existují ještě další tři třídy $\{B\}$, $\{C\}$, $\{D\}$ pro něž platí $\{T - 2A\} \equiv \{T - 2B\} \equiv \{T - 2C\} \equiv \{T - 2D\}$. Aspoň jedna z těchto tříd má uvažovanou vlastnost, neboť v opačném případě snadnou úvahu zjistíme, že v aspoň jednom bodě M_i existuje ke kubice více tečen než čtyři. Nechť tedy uvažovanou vlastnost má třída $\{B\}$, potom body tříd $\{A\}$, $\{B\}$ a $\{T - 2A\}$ prochází právě $g - 1$ přímek na nichž leží právě tři vesměs navzájem různé body daných tříd. Proto platí věta:

Věta 31. *Existuje konfigurace typu* $(3g_{g-1}, g(g - 1)_3)$ *bodů rovinné kubiky rodu* 1, *kde* g *je počet prvků grupy* $_2\bar{G}$, *která splňuje větu* 29.

Poznámka 8. Tyto konfigurace existují i na kubice s bodem uzlovým, neboť jak snadno zjistíme všechny podgrupy této kubiky jsou typu druhého. K důkazu věty 31 je ještě třeba dodat, že existuje vždy taková třída $\{A\}$, pro kterou platí $\{2A\} \not\equiv \{T - A\}$. Jistě existuje třída, která neobsahuje ani jediný inflexní bod.

Věta 32. *Existují konfigurace typu* $(3g_{(g-2/2)}, \frac{1}{2}g(g - 2)_3)$ *a* $(3g_{g/2}, \frac{1}{2}g_3^2)$ *bodů rovinné kubiky rodu* 1, *kde* g *je počet prvků grupy* $_2\bar{G}$, *která splňuje větu* 29.

Důkaz. Tato věta vyplývá bezprostředně z úvahy, která předcházela větě 31. V případě prvého typu konfigurace vynecháme v konfiguraci z věty 31 přímky $A_iA_jM_i$, přičemž $M_i \in M'$ a $B_iB_jM_i$, kde $M_i \in M$. V případě druhého typu vynecháme v dané konfiguraci přímky $A_iA_jM_i$, přičemž $M_i \in M$ a $B_iB_jM_i$, kde $M_i \in M'$.

Poznámka 9. Konfigurace z vět 31 a 32 mají právě $3g$-tice prvků, neplatí však jako v ostatních dosud odvozených konfigurací, že body každé g-tice jsou od sebe odděleny.

Dokažme nyní, že existují podgrupy $_1\bar{G}$ a $_2\bar{G}$ pro všechny podgrupy dosud námi odvozené. Uvažujme podgrupu D_0. Grupa D_0 obsahuje inflexní bod J_1 a bod dotyku např. J_{11} tečny vedené z bodu J_1 ke kubice. Hledejme D_1'. Z věty 25 vyplývá, že každý bod $X \notin D_0$ a o němž platí $2X \in D_0$ určuje prvek (třídu) grupy G/D_0 a $\{X\} \cup \cup D_0 \equiv D_1'$. Těchto bodů je celkem šest a označme je $J_{12}, J_{13}, J_{111}, J_{112}, J_{113}, J_{114}$. Označili jsme J_{12} a J_{13} body dotyku tečen vedených bodem J_1 ke kubice a obdobně J_{11i}, kde $i = 1, 2, 3, 4$ jsou body dotyku tečen vedených bodem J_{11}

ke kubice. Zřejmě jenom pro tyto body platí, že $2X \in D_0$ a proto existují tři různé třídy (prvky) grupy G/D_0. Podle předcházejícího tedy tři různé grupy D'_1. Z věty 28 vyplývá, že body J_{12} a J_{13} patří stejné třídě a dostáváme grupu ${}_1\bar{G}_4 \equiv E_1$. Body J_{11i} tvoří dvě třídy a zřejmě spojnice dvou bodů stejné třídy musí procházet bodem J_{11}. Dostáváme další dvě grupy a ty jsou zřejmě typu ${}_2\bar{G}_4$.

Poznámka 10. Podle věty 7 tvoří D_0 spolu s uvažovanými třemi třídami grupu a to typu ${}_1\bar{G}_8$. Kromě toho k větě 7 chybí důkaz, že ke každému bodu existuje bod inverzní. Doplňujeme tímto tento důkaz s tím, že existence jediného inverzního prvku k danému okamžitě vyplývá z věty 25.

Pokračujme nyní v úvaze před poznámkou 10. Tímto jsme udělali první krok úplné indukce. Nechť ${}_2\bar{G}_{2^k}$ je podgrupa grupy G splňující větu 29. Grupa ${}_2\bar{G}_{2^k}$ je tedy složena z $2^k/2$ dvojic bodů se společným tečnovým bodem a tyto tečnové body leží v této grupě (uvažujeme stále grupy splňující větu 4). Množinu těchto tečnových bodů označme T. Existuje celkem $3 . 2^k$ bodů, které neleží v ${}_2\bar{G}_{2^k}$ a jejichž tečnové body leží v ${}_2\bar{G}_{2^k}$. Tyto body tvoří zřejmě tři prvky (třídy) grupy $G/{}_2\bar{G}_{2^k}$ a každý tento prvek spolu s danou grupou tvoří grupu $\bar{G}_{2^{k+1}}$. Jednu z těchto tříd zřejmě tvoří množina bodů jejichž tečnové body jsou body množiny T a dostáváme tak grupu ${}_1\bar{G}_{2^{k+1}}$. Zbývající body tj. body dotyku tečen vedených ke kubice z bodů množiny ${}_2\bar{G}_{2^k} - T$, mohou tvořit dané dvě třídy jedině tímto způsobem: Jednu třídu tvoří body, které dostaneme jako body dotyku dvou různých tečen vedených ze všech bodů množiny ${}_2\bar{G}_{2^k} - T$. Druhou třídu tvoří zbývající body. V každém jiném případě prochází některým z bodů množiny ${}_2\bar{G}_{2^k} - T$ např. A aspoň tři tečny a grupa $G = {}_2\bar{G}_{2^k} \cup \{A\}$ je typu jedna, ale body množiny T prochází jenom dvě tečny, jejichž dotykové body leží v dané grupě. Tím jsme ukázali, že existují jak ${}_1\bar{G}_{2^n}$, tak i ${}_2\bar{G}_{2^n}$, kde n je přirozené číslo (s výjimkou $D_0 = {}_2\bar{G}_2$). Grupy F'_i a J'_i můžeme dostat obdobnou úvahou. Pokračujme rychleji. Nechť je dána $\bar{G}_{2^n}$ a platí $J_1 \in \bar{G}_{2^n}$, J_2 a J_3 neleží v $\bar{G}_{2^n}$ (zde označujeme J_i inflexní body kubiky). J_2 a J_3 zřejmě určují dva různé prvky grupy $G/\bar{G}_{2^n}$. Zřejmě prvky $\{J_1\} \equiv \bar{G}_{2^n}$, $\{J_2\}$ a $\{J_3\}$ mají obdobné vlastnosti jako body J_1, J_2 a J_3. Platí tedy $\bar{G}_{2^n} \cup \{J_2\} \cup \{J_3\} \equiv \bar{G}_{3.2^n}$. Podobně platí $\{J_2\} \cup \{J_3\} \cup \{J_4\} \cup \{J_5\} \cup \cup \{J_6\} \cup \{J_7\} \cup \{J_8\} \cup \{J_9\} \cup \bar{G}_{2^n} \equiv \bar{G}_{9.2^n}$. Tím jsme dostali podgrupy J'_i i F'_i. Dále jsme ukázali, že existují jak ${}_1\bar{G}_{3.2^n}$ a ${}_1\bar{G}_{9.2^n}$, tak i ${}_2\bar{G}_{3.2^n}$ a ${}_2\bar{G}_{9.2^n}$, kde n je přirozené číslo a v případě grup prvého typu nemůže být rovno 1. Platí tedy:

Věta 33. *V konfiguracích z vět* 31 *a* 32 *můžeme za g postupně dosadit*: 2^{n+1}, $3 . 2^n$ a $9 . 2^n$.

Úvaha, kterou jsme přešli od grupy $\bar{G}_{2^n}$ ke grupě $\bar{G}_{9.2^n}$ nám pomůže odvodit další typy zajímavých konfigurací. To co platí o inflexních bodech platí i o devíti třídách určených jednotlivými inflexními body.

Věta 34. *Existují konfigurace bodů rovinné kubiky rodu* 1 *typu*: $(9 . 2^n_{4.2^n}, 12 . 2^{2n}_3)$, *kde n je nezáporné celé číslo.*

Důkaz. Inflexní body kubiky rodu 1 tvoří známou konfiguraci $(9_4, 12_3)$. Zvolíme např. $J_1 \equiv 0$. Konstruujeme grupu $\bar{G}_{2^n}$, která má jediný inflexní bod a sice J_1. Každý další inflexní bod kubiky určuje prvek grupy $G/\bar{G}_{2^n}$. Dostaneme spolu s $\bar{G}_{2^n}$ celkem devět prvků, které tvoří uvažovanou konfiguraci. Každý tento prvek leží tedy na čtyřech „přímkách" dané konfigurace. Každou tuto „přímku" můžeme uvažovat jako konfiguraci $(3 . 2^n_{2^n}, 2^{2n}_3)$. V grupě $\bar{G}_{9.2^n}$, kterou tvoří uvažovaných devět prvků grupy $G/\bar{G}_{2^n}$, budeme uvažovat všechny přímky konfigurací $(3 . 2^n_{2^n}, 2^{2n}_3)$. Těchto přímek je zřejmě $9 . 2^n . 4 . 2^n/3 = 12 . 2^{2n}$ a každým bodem grupy $\bar{G}_{9.2^n}$ prochází právě $4 . 2^n$ těchto přímek.

Poznámka 11. V případě $n = 1$ dostáváme konfiguraci $(18_8, 48_3)$. Body této konfigurace jsou jednak inflexní body a jednak devět dotykových bodů tečen vedených ke kubice z inflexních bodů. Uvádíme tento případ hlavně proto, aby si čtenář uvědomil význam algebraického pohledu na kubiku, neboť tuto konfiguraci z vlastností kubiky bychom těžko odvodili.

Dvě disjunktní konfigurace např. $(3g_g, g^2_3)$ můžeme uvažovat jako konfiguraci $(6g_{2g}, 4g^2_3)$. Toto je zřejmé a v celém článku tohoto nepoužíváme, neboť tímto způsobem se nezmění počet přímek procházející daným bodem. Nyní provedeme úvahu v jistém smyslu obrácenou. Uvažujme podgrupy $\bar{G}_g$ a $\bar{G}_{4g}$ přičemž $\bar{G}_{4g} \supset \bar{G}_g$. Podle věty dvě tři navzájem různé třídy (prvky) $\{B\}$, $\{C\}$ a $\{T - (B + C)\}$ grupy $G/\bar{G}_{4g}$ tvoří konfiguraci $(12g_{4g}, 16g^2_3)$. Zřejmě existují prvky grupy $G/\bar{G}_g$ $\{E\} \subset \{B\}$, $\{F\} \subset \{C\}$ a $\{T - (E + F)\} \subset \{T - (B + C)\}$, které tvoří konfiguraci $(3g_g, g^2_3)$. Vynecháme nyní v předcházející konfiguraci všechny body, které patří prvkům $\{E\}$, $\{F\}$ a $\{T - (E + F)\}$. Tím se zmenší počet bodů v dané konfiguraci o $3g$ tj. zůstane $9g$. Každým z těchto $9g$ bodů prochází právě $2g$ přímek procházejících vynechanými body. Zmenší se tedy počet přímek procházejících danými body o $2g$ a dostáváme:

Věta 35. *Existují rovinné konfigurace bodů kubiky rodu 1 typu $(9g_{2g}, 6g^2_3)$, kde g je počet prvků podgrupy grupy G.*

Věta 36. *Existují rovinné konfigurace bodů kubiky rodu 1 typu $(3g . 4^k(4^m - 1)_{4^k g(4^m - 2)}, g^2 . 4^{2k}(4^m - 1)(4^m - 2)_3)$, kde g je počet prvků podgrupy grupy C a k, m jsou přirozená čísla.*

Důkaz. Uvažujme $\bar{G}_{g.4^n} \supset \bar{G}_{g.4^k}$, přičemž platí $k + m = n$ a k, m, n jsou přirozená čísla. Nyní opět v konfiguraci $(3g . 4^n_{g.4^n}, g^2 . 4^{2n}_3)$ vynecháme body konfigurace $(3g . 4^k_{g.4^k}, g^2 . 4^{2k}_3)$. Tím se nám zmenší počet bodů první konfigurace o $3g . 4^k$ a dostáváme $3g . 4^k(4^m - 1)$ bodů. Počet přímek procházejících uvažovanými body se zmenší o $2g . 4^k$ a dostáváme $g . 4^k(4^m - 2)$ přímek.

V další větě budeme aplikovat na větu 35 a 36 důkaz resp. větu 34.

Věta 37. *Existují rovinné konfigurace bodů kubiky rodu 1 typu $(27g_{8g}, 72g^2_3)$ a $(27g . 4^k(4^m - 1)_{4^{k+m}.g(4^m-2)}, 9g^2 . 4^{2k+m}(4^m - 1)(4^m - 2)_3)$, kde g je počet prvků podgrupy, která má jediný inflexní bod tj. $g = 2^n$.*

Poznámka 12. Můžeme pokračovat v odvozování dalších konfigurací tak, že v případě kdy $n - k > 1$ vynecháme více než jednu konfiguraci uvažovaného typu. Tyto úvahy přenecháme čtenáři. Dále také nebudeme ve větách 35 a 36 dosazovat za g příslušná čísla.

Uvažujme nyní podgrupu ${}_1\bar{G}_{3.2^n}$ a ${}_1\bar{G}_{9.2^n}$. Podle věty 7, resp. podle poznámky 10, grupa ${}_1\bar{G}_{2^n}$ je rovna sjednocení $\bar{G}_{2^{n-2}}$ a tří tříd grupy $G/\bar{G}_{2^{n-2}}$. Tyto tři třídy zřejmě určují konfiguraci $(3 \,.\, 2^{n-2}_{2^n-2}, 2_3^{2(n-2)})$. Nyní v ${}_1\bar{G}_{2^n}$ vynecháme body grupy $\bar{G}_{2^{n-2}}$ a v třídách, které spolu s ${}_1\bar{G}_{2^n}$ určují postupně ${}_1\bar{G}_{3.2^n}$ a ${}_1\bar{G}_{9.2^n}$ vynecháme body třídy se stejnými vlastnostmi jako uvažovaná $\bar{G}_{2^{n-2}}$. Zbývající body tvoří podle vět 35 a 37 konfigurace z těchto vět. Přidáním přímek uvažované konfigurace $(3 \,.\, 2^{n-2}_{2^n-2}, 2_3^{2(n-2)})$ dostáváme konfigurace:

$$(9 \,.\, 2^{n-2}_{3.2^n-2}, 9 \,.\, 2_3^{2(n-2)}) \quad \text{a} \quad (27 \,.\, 2^{n-2}_{9.2^n-2}, 81 \,.\, 2_3^{2(n-2)}) \,.$$

Tyto konfigurace jsou podle počtu bodů a přímek stejné jako konfigurace z věty 27, mají však jinou strukturu.

Další typy konfigurací dostaneme, když budeme aplikovat konfigurace z věty 33 na grupy ${}_2\bar{G}_{3.2^n}$ a ${}_2\bar{G}_{9.2^n}$. Uvažujme ${}_2\bar{G}_{2^n}$. Uvědomíme-li si strukturu této grupy ihned dostáváme: ${}_2\bar{G}_{2^n} = {}_2\bar{G}_{2^{n-2}} \cup \{A\} \cup \{B\} \cup \{C\}$, kde $\{A\}, \{B\}$ a $\{C\}$ jsou prvky grupy $G/{}_2\bar{G}_{2^{n-2}}$ a dále platí ${}_2\bar{G}_{2^{n-2}} \cup \{A\} = {}_2\bar{G}_{2^{n-1}}$. ${}_2\bar{G}_{2^{n-2}} \cup B \neq {}_2\bar{G}_{2^{n-1}}$, neboť kdyby tomu tak nebylo a platilo předcházející, musela by být ${}_2\bar{G}_{2^n}$ prvého typu. Z toho vyplývá, že musí platit $\{T - 2B\} = \{A\}$ a $\{T - 2C\} = \{A\}$ a třídy $\{A\}, \{B\}$ a $\{C\}$ splňují podmínky 31 resp. 32 tj. určují konfigurace těchto vět. Nyní v ${}_2\bar{G}_{2^n}$ vynecháme body grupy ${}_2\bar{G}_{2^{n-2}}$ a v třídách, které spolu s ${}_2\bar{G}_{2^n}$ určují postupně ${}_2\bar{G}_{3.2^n}$ a ${}_2\bar{G}_{9.2^n}$ vynecháme třídy se stejnými vlastnostmi jako má uvažovaná grupa ${}_2\bar{G}_{2^{n-2}}$. Zbývající body tvoří konfigurace z vět 35 a 37 a navíc můžeme v každé třídě přidat přímky z konfigurací podle vět 31 a 32. Dostáváme:

Věta 38. *Existují rovinné konfigurace bodů rovinné kubiky rodu* 1 *typu*

$$(9g_{3g-1}, 3g(3g-1)_3)\,, \quad \left(9g_{5g/2}, \left(\frac{15g^2}{2}\right)_3\right) \quad a \quad \left(9g_{(5g+2)/2}, 3g \,.\left(\frac{5g+2}{2}\right)_3\right)$$

přičemž za g můžeme dosadit jednak $3 \,.\, 2^{n-2}$ *a jednak* 2^{n-2}. *Číslo n je přirozené a větší než dvě.*

Uvažujme ${}_2\bar{G}_{2^k} \subset {}_2\bar{G}_{2^n}$. Zřejmě existuje ${}_2\bar{G}_{2^n}/{}_2\bar{G}_{2^k}$ a protože každý prvek této faktorové grupy se skládá z $2^k/2$ dvojic bodů se společným tečnovým bodem, lze tyto prvky rozdělit do disjunktních dvojic takových, že pro každou dvojici prvků $\{X\}$ a $\{Y\}$ existuje prvek $\{Z\}$ přičemž platí $\{Z\} = \{T - 2X\}$ a $\{Z\} = \{T - 2Y\}$. Zřejmě jedině v případě $\{X\} = {}_2\bar{G}_{2^k}$ tyto tři prvky nejsou vesměs různé. V ostatních případech splňují tedy uvažované tři prvky větu 31 resp. 32 (jinak by totiž daná grupa byla prvého typu). Nyní rozdělíme danou ${}_2\bar{G}_{2^n}$ do disjunktních trojic uvažovaných prvků tj. každý prvek bude patřit jediné trojici navzájem vesměs různých prvků. Zřejmě platí: je-li číslo $n - k$ sudé potom jedině ${}_2\bar{G}_{2^k}$ nepatří žádné uvažované trojici. Při $n - k$ lichém nebude žádné trojici náležet ${}_2\bar{G}_{2^k}$ a $\{A\}$, přičemž platí ${}_2\bar{G}_{2^k} \cup \{A\} = {}_2\bar{G}_{2^{k+1}}$. Nyní budeme postupovat jako v předcházející větě, s tím, že v obou případech vynecháváme podgrupu grupy ${}_2\bar{G}_{2^n}$ a tedy vynechané body jak v ${}_2\bar{G}_{3.2^n}$ tak i v ${}_2\bar{G}_{9.2^n}$ tvoří konfiguraci a tedy jsou splněny podmínky věty 35. Dostáváme:

Věta 39. *Existují rovinné konfigurace kubiky rodu* 1 *typu*:

$$(3(2^n - 2^k)_{2^n-2^k-1}, (2^n - 2^k)(2^n - 2^k - 1)_3),$$

$$(9(2^n - 2^k)_{4.2^n-7.2^k-1}, 3(2^n - 2^k)(4 . 2^n - 7 . 2^k - 1)_3)$$

$$(3(2^n - 2^{k+1})_{2^n-3.2^k-1}, (2^n - 2^{k+1})(2^n - 3 . 2^k - 1)_3)$$

$$(9(2^n - 2^{k+1})_{4.2^n-15.2^k-1}, 3(2^n - 2^{k+1})(4 . 2^n - 15 . 2^k - 1)_3)$$

kde n a k jsou přirozená čísla, $k \leqq n - 2$ a u prvních dvou typů je $n - k$ sudé a u zbývajících dvou typů je $n - k$ liché.

Poznámka 13. Čtenář si jistě uvědomil, že ve větě 39 jsme mohli uvést ještě dalších osm typů konfigurací. Dále by platilo, že věta 38 je speciální případ věty 39 a sice pro $k = n - 2$.

Nechť $k = 1$ a n je sudé. Konfigurace z předcházející věty v tomto případě dostáváme tak, že v grupě ${}_2\bar{G}_{2^n}$ vynecháme čtyři body a sice: $J_1, J_{11}, J_{111}, J_{112}$. Platí, že body J_1, J_{111}, J_{112} leží na přímce. Vynechme nyní v ${}_2\bar{G}_{3.2^n}$ jedině body J_{11}, J_{21}, J_{31}. Přímka $J_{i1}J_{j1}$ prochází bodem J_k, kde $i, j, k = 1, 2, 3$ a jsou navzájem vesměs různá. V bodech J_i $(i = 1, 2, 3)$ tím, že vynecháme uvažované body zmenší se počet přímek konfigurace $(3 . 2^n_{2n}, 2^{2n}_3)$ o jednu a v ostatních bodech o dvě. Jestliže vynecháme v dané konfiguraci ještě přímku $J_1J_2J_3$ dostáváme:

Věta 40. *Existují rovinné konfigurace bodů kubiky rodu* 1 *typu*:

$$(3 . (2^n - 1)_{2^n-1}, (2^n - 1)^2_3) \quad \text{a} \quad (9 . (2^n - 1)_{4.2^n-7}, 3(2^n - 1)(4 . 2^n - 7)_3),$$

kde n je sudé přirozené číslo.

Důkaz. Druhou konfiguraci dostaneme tak, že v ${}_2\bar{G}_{9.2^n}$ vynecháme J_{i1}, $i = 1, 2, \ldots, 9$ a tři přímky např. $J_1J_2J_3$, $J_4J_5J_6$ a $J_7J_8J_9$.

Závěrečná poznámka. Všechny úvahy, které jsme v tomto článku provedli se dají zdualisovat. Tedy platí:

Věta 41. *Nechť $(u_v, uv/3_3)$ je konfigurace odvozená v předcházejících větách. Potom existuje také konfigurace $(uv/3_3, u_v)$ tečen rovinné sextiky.*

Literatura

[1] *J. Krys:* Konfigurace bodů rovinné kubiky. Čas. pěst. mat. *94* (1969), 282—289.

Adresa autora: 500 00 Hradec Králové, Leninovo nám. 301 (Pedagogická fakulta).

Zusammenfassung

PUNKTKONFIGURATIONEN EINER EBENEN KUBIK, II

JAROMÍR KRYS, Hradec Králové

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung einer früheren Abhandlung des Verfassers [1]. Es wird die Existenz unendlich vieler weiterer Punktkonfigurationen einer ebenen Kubik bewiesen.