František Machala

Über Automorphismen des Endomorphismenringes eines Vektorraumes

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 98 (1973), No. 1, 78--86

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117791`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

ÜBER AUTOMORPHISMEN DES ENDOMORPHISMENRINGES EINES VEKTORRAUMES

FRANTIŠEK MACHALA, Olomouc

(Eingelangt am 12. Mai 1971)

Es sei A ein Vektorraum über einem beliebigen Körper F, $\dim A > 2$. Der Ring aller Endomorphismen des Raumes A sei mit T bezeichnet. Als den Rang $r(\varrho)$ des Endomorphismus $\varrho \in T$ benennen wir die Dimension des Bildes $A\varrho$ des Raumes A beim Endomorphismus ϱ. Alle Endomorphismen, deren Rang kleiner als $\varkappa_\nu$ ist, wo $\varkappa_\nu$ eine gewisse unendliche Kardinalzahl ist, bilden einen Ring T_ν. Dieser Ring ist ein beiderseitiges Ideal im Ring T (vgl. [1]).

Satz 1. *Es seien Endomorphismen ξ, ϱ des Vektorraumes A gegeben und sei $\xi\varrho \in T_\nu$. Dann existieren $\xi', \varrho' \in T_\nu$, so dass $\xi\varrho = \xi'\varrho = \xi\varrho'$ ist.*

Beweis. Bezeichnen wir $P = A\xi \cap \operatorname{Ker}(\varrho)$, wo $\operatorname{Ker}(\varrho)$ der Kern des Endomorphismus ϱ ist. Wählen wir einen Unterraum $Q \leqq A$, der in $A\xi$ komplementär zu P ist, kurz $P \oplus Q = A\xi$. Dann ist $Q \cap \operatorname{Ker}(\varrho) = o$ und $\dim Q = \dim Q\varrho$. Ferner ist $A\xi\varrho = Q\varrho$, d. h. $\dim Q < \varkappa_\nu$.

Erwägen wir soeinen Unterraum $W \leqq A$, für welchen $W \oplus \operatorname{Ker}(\xi) = A$ ist. Dann ist $W\xi = A\xi$ und man kann Unterräume $U, V \leqq W$ derartig wählen, dass $U\xi = P$, $V\xi = Q$ ist. Es gilt $A = U \oplus V \oplus \operatorname{Ker}(\xi)$ und jedes Element $a \in A$ kann in der Form $a = u + v + k$ geschrieben werden, wobei $u \in U$, $v \in V$, $k \in \operatorname{Ker}(\xi)$ ist. Wenn man den Endomorphismus α mittels der Vorschrift $a\alpha = -u\xi$ angibt, dann ist $A\alpha = P$ und daher folgt $A\alpha \leqq \operatorname{Ker}(\varrho)$ und $\alpha\varrho = o$. Legen wir $\xi' = \xi + \alpha$. Dann ist $A\xi' = Q$, $r(\xi') < \varkappa_\nu$ und $\xi' \in T_\nu$. Dabei ist $\xi'\varrho = (\xi + \alpha)\varrho = \xi\varrho$.

Wählen wir den Unterraum S derartig, dass $A = \operatorname{Ker}(\varrho) \oplus Q \oplus S$ ist. Dann kann jedes Element $a \in A$ in der Form $a = k + q + s$ geschrieben werden, wobei $k \in \operatorname{Ker}(\varrho)$, $q \in Q$, $s \in S$ ist. Wenn man den Endomorphismus β durch die Vorschrift $a\beta = -s\varrho$ angibt, dann ist $A\xi \leqq \operatorname{Ker}(\beta)$ und $\xi\beta = o$. Legen wir $\varrho' = \varrho + \beta$. Dann ist $a\varrho' = q\varrho$ und $A\varrho' = Q\varrho$, d. h. $\varrho' \in T_\nu$. Dabei gilt $\xi\varrho' = \xi(\varrho + \beta) = \xi\varrho$.

Satz 2. *Es seien $T\varrho$, ωT die durch die Elemente $\varrho, \omega \in T$ generierte Hauptideale des Ringes T. Dann ist $T_\nu\varrho = T\varrho \cap T_\nu$, $\omega T_\nu = \omega T \cap T_\nu$.*

Beweis. Nachdem T_ν ein beiderseitiges Ideal in T ist, gilt $T_\nu\varrho \leqq T_\nu$, $\omega T_\nu \leqq T_\nu$ und $T_\nu\varrho \leqq T\varrho \cap T_\nu$, $\omega T_\nu \leqq \omega T \cap T_\nu$. Wählen wir beliebig $\xi\varrho \in T_\nu$. Dem Satz 1 zufolge existiert $\xi' \in T_\nu$ derartig, dass $\xi\varrho = \xi'\varrho$ ist, daher also ist $\xi\varrho \in T_\nu\varrho$ und $T\varrho \cap \cap T_\nu \leqq T_\nu\varrho$. Soeben zeigt man, dass auch $\omega T \cap T_\nu \leqq \omega T_\nu$ ist.

Bemerkung. Wenn $\varrho, \omega \in T_\nu$ ist, dann ist $T\varrho = T_\nu\varrho$, $\omega T = \omega T_\nu$.

Wenn man auf der Menge der Linksideale (Rechtsideale) des Ringes T üblicherweise die Summe $I_1 + I_2$ zweier Ideale und deren Durchschnitt $I_1 \cap I_2$ definiert, dann bildet diese Menge zusammen mit den Operationen $\cap$, $+$ einen Verband, der mit $\Phi_L(\Phi_P)$ bezeichnet wird. Nachdem T ein regulärer Ring ist, bilden die linke (rechte) Hauptideale des Ringes T einen Teilverband $\Omega_L(\Omega_P)$ des Verbandes $\Phi_L(\Phi_P)$. Ähnlicherweise kann man mit Hilfe der Operationen $\cap$, $+$ den Verband $\Psi_L(\Psi_P)$ definieren, welcher durch alle Linksideale (Rechtsideale) des Ringes T_ν erzeugt wird. Erwägen wir die Menge aller linken (rechten) Annulatoren im Ring T_ν, welche mittels der Inklusion teilgeordnet ist. Auf dieser teilgeordneten Menge kann üblicherweise die Vereinigung $\cup$ und der Durchschnitt $\cap$ zweier Elemente definiert werden und man bekommt dann den Verband $\Pi_L(\Pi_P)$. Für beliebige $H_1, H_2 \in \Pi_L(J_1, J_2 \in \Pi_P)$ gilt offenbar $H_1 + H_2 \leqq H_1 \cup H_2(J_1 + J_2 \leqq J_1 \cup J_2)$.

Wählen wir einen beliebigen Unterraum $S \leqq A$ und bezeichnen $\mathrm{L}(S)$ die Menge aller $\varrho \in T_\nu$, für welche $A\varrho \leqq S$ und $\mathrm{R}(S)$ die Menge aller $\varrho \in T_\nu$ für welche $S\varrho = o$ ist. Nach dem Theorem 2,8 in [4] ist die Abbildung $S \to \mathrm{L}(S)$ ein Isomorphismus der Verbandes $\bar{A}$, welcher durch Unterräume in A gebildet ist und des Verbandes Π_L und die Abbildung $S \to \mathrm{R}(S)$ ist ein dualer Isomorphismus des Verbandes $\bar{A}$ auf den Verband Π_P.

Satz 3. *$T_\nu\varrho$ ist ein linker Annulator im Ring T_ν für jedes Element $\varrho \in T$. Es sei H ein beliebiger linker Annulator im Ring T_ν. Dann existiert ein Hauptideal $T\varrho$ des Ringes T, so dass $H = T_\nu\varrho$ ist. Der Annulator $H = T_\nu\varrho$ im Ring T_ν ist genau dann ein Hauptideal des Ringes T_ν, wenn $\varrho \in T_\nu$ ist.*

Beweis. Es sei $T\varrho$ ein beliebiges linkes Hauptideal des Ringes T. Dann ist $\alpha \in T\varrho$ genau dann, wenn $A\alpha \leqq A\varrho$ ist. $T\varrho$ ist ein linker Annulator der Menge ωT, wo $A\varrho = \mathrm{Ker}(\omega)$ ist. Wir zeigen, dass $T_\nu\varrho$ ein linker Annulator der Menge ωT_ν im Ring T_ν ist. Offenbar ist $(T_\nu\varrho)(\omega T_\nu) = o$. Wählen wir $\gamma \in T_\nu$, $\gamma(\omega T_\nu) = o$ beliebig. Setzen wir voraus, dass $a \in A$, $a\gamma\omega \neq o$ existiert. Nachdem T_ν dicht im Ring T ist, existiert $\alpha \in T_\nu$, so dass $(a\gamma\omega)\,\alpha = a\gamma\omega \neq o$ ist und dieses liefert einen Widerspruch. Darum ist $\gamma\omega = o$, $A\gamma \leqq \mathrm{Ker}(\omega)$ und $\gamma \in T\varrho$. Nach dem Satz 2 gilt $\gamma \in T_\nu\varrho$.

Es sei H ein beliebiger Annulator des Ringes T_ν. Dann gibt es genau einen Unterraum $S \leqq A$, für welchen $H = \mathrm{L}(S)$ ist. Wenn wir ein $\varrho \in T$ erwägen, für welches $A\varrho = S$ ist, dann ist $H = T_\nu\varrho$.

Es sei $T_\nu\varrho$, $\varrho \in T$ ein Hauptideal in T_ν, d. h. $T_\nu\varrho = T_\nu\gamma$, $\gamma \in T_\nu$. Dann ist $A\gamma = S$, $\dim S < \varkappa_\nu$. Setzen wir voraus, dass $A\varrho > S$ ist und wählen $s \in A\varrho$, $s \notin S$. Dann existiert $a \in A$, $a\varrho = s$. Da der Ring T_ν dicht in T ist, existiert $\xi \in T_\nu$ derart, dass $a\xi = a$ ist. Dann ist $a\xi\varrho = s$. Es existiert aber $\alpha \in T_\nu$, so dass $\xi\varrho = \alpha\gamma$ und $a\alpha\gamma = s$ ist; dieses liefert einen Widerspruch. Es ist also $A\varrho \leqq S$ und demzufolge ist $\mathrm{r}(\varrho) < \varkappa_\nu$, d. h. $\varrho \in T_\nu$.

Bemerkung. Vom Beweis des Satzes kommt hervor, dass man für einen beliebigen linken Annulator H des Ringes T_ν die Gleichheit $H = \mathrm{L}(S) = T_\nu\varrho$, wo $A\varrho = S$ ist, bekommt.

Satz 4. *ϱT_ν ist ein rechter Annulator im Ring T_ν für jedes $\varrho \in T$. Es sei J ein beliebiger rechter Annulator im Ring T_ν. Dann existiert ein Hauptideal ϱT des Ringes T, so dass $J = \varrho T_\nu$ ist. Der Annulator $J = \varrho T_\nu$ im Ring T_ν ist genau dann ein Hauptideal, wenn $\varrho \in T_\nu$ ist.*

Beweis. Es sei ϱT ein beliebiges rechtes Hauptideal des Ringes T. Dann ist $\alpha \in \varrho T$ genau dann, wenn $\mathrm{Ker}(\varrho) \leqq \mathrm{Ker}(\alpha)$. Das Ideal ϱT ist ein rechter Annulator der Menge $T\omega$, wo $A\omega = \mathrm{Ker}(\varrho)$. Wir zeigen, dass ϱT_ν ein rechter Annulator der Menge $T_\nu\omega$ ist. Offensichtlich ist $(T_\nu\omega)(\varrho T_\nu) = o$. Wählen wir beliebig $\gamma \in T_\nu$, für welches $T_\nu\omega\gamma = o$ ist. Dann ist $\omega\gamma = o$, $A\omega \leqq \mathrm{Ker}(\gamma)$ und $\gamma \in \varrho T$. Zufolge des Satzes 2 ist dann $\gamma \in \varrho T_\nu$.

Es sei J ein beliebiger rechter Annulator des Ringes T_ν. Es existiert genau ein Unterraum $S \leqq A$, so dass $J = \mathrm{R}(S)$ ist. Wenn wir $\varrho \in T$ so wählen, dass $\mathrm{Ker}(\varrho) = S$ ist, dann ist $J = \varrho T_\nu$.

Es sei ϱT_ν, $\varrho \in T$ ein Hauptideal des Ringes T_ν. Dann existiert $\gamma \in T_\nu$, so dass $\varrho T_\nu = \gamma T_\nu$ ist. Wenn wir $S = \mathrm{Ker}(\gamma)$ bezeichnen, dann ist für jedes $\omega \in \gamma T_\nu$ $\mathrm{Ker}(\gamma) \leqq \mathrm{Ker}(\omega)$. Nach der Voraussetzung ist $\dim A/S = \dim A\gamma < \varkappa_\nu$. Es sei $\mathrm{Ker}(\varrho) < S$. Wählen wir $s \in S$, $s \notin \mathrm{Ker}(\varrho)$. Nachdem T_ν dicht in T ist, existiert $\xi \in T_\nu$, so dass $s\varrho\xi = s\varrho$ ist. Da $\varrho\xi \in \gamma T_\nu$ ist, gibt es ein $\alpha \in T_\nu$, so dass $\varrho\xi = \gamma\alpha$ gilt. Dann ist $s\varrho\xi = s\gamma\alpha \neq o$ und dieses ist ein Widerspruch. Es gilt also $S \leqq \mathrm{Ker}(\varrho)$ und $\dim A\varrho \leqq \dim A\gamma$, d. h. $\varrho \in T_\nu$.

Bemerkung. Vom Beweis ergibt sich, dass für einen beliebigen rechten Annulator J im Ring T_ν die Gleichheit $J = \mathrm{R}(S) = \varrho T_\nu$ gilt, wobei $\mathrm{Ker}(\varrho) = S$ ist.

Satz 5. *Die Abbildungen $T\varrho \to T_\nu\varrho$, $\omega T \to \omega T_\nu$ sind Isomorphismen der Verbände Ω_L, Π_L und Ω_P, Π_P.*

Beweis. Die Abbildung $T\varrho \to S$, wo $S = A\varrho$ ist, ist nach [1] ein Isomorphismus der Verbände Ω_L, $\bar{A}$ und die Abbildung $S \to \mathrm{L}(S)$ ist ein Isomorphismus der Verbände $\bar{A}, \Pi_L$. Nach dem Satz 3 ist $\mathrm{L}(S) = T_\nu\varrho$ und daher ist die Abbildung $T\varrho \to T_\nu\varrho$ ein Isomorphismus der Verbände Ω_L, Π_L.

Ähnlicherweise ist nach [1] die Abbildung $\omega T \to S$, wo $S = \mathrm{Ker}(\omega)$ ein dualer Isomorphismus der Verbände Ω_P, $\bar{A}$ und $S \to \mathrm{R}(S)$ ist ein dualer Isomorphismus der

Verbände $\bar{A}, \Pi_P$. Nach dem Satz 4 ist $R(S) = \omega T_v$ und demzufolge ist die Abbildung $\omega T \to \omega T_v$ ein Isomorphismus der Verbände Ω_P, Π_P.

Bemerkung. Bezeichnen wir der Reihe nach $P(\Phi_L)$, $P(\Phi_P)$, $P(\Omega_L)$, $P(\Omega_P)$, $P(\Pi_L)$, $P(\Pi_P)$, $A(T)$ die Gruppen der Automorphismen der Verbände Φ_L, Φ_P, Ω_L, Ω_P, Π_L, Π_P und die Gruppe der Automorphismen des Ringes T. Nach [3] und dem Satz 5 sind alle angeführten Gruppen isomorph.

Satz 6. *Der Verband $\Pi_L(\Pi_P)$ ist ein Teilverband des Verbandes $\Psi_L(\Psi_P)$.*

Beweis. Wir wählen zwei linke Annulatoren $H_1, H_2 \in \Pi_L$ und beweisen, dass $H_1 + H_2 \in \Pi_L$, $H_1 \cap H_2 \in \Pi_L$ ist. Nach dem Satz 3 existieren $\varrho, \omega \in T$ derart, dass $H_1 = T_v\varrho$, $H_2 = T_v\omega$ ist. Nachdem T ein regulärer Ring ist, existieren $\gamma, \delta \in T$ derartig, dass $T\varrho + T\omega = T\gamma$, $T_\varrho \cap T\omega = T\delta$ ist. Wir zeigen zuerst, dass $T_v\varrho + T_v\omega = T_v\gamma$ gilt. Wählen wir beliebig $\eta = \xi_1\varrho + \xi_2\omega \in T_v\varrho + T_v\omega$. Dann ist $\eta \in T_v$ und zugleich $\eta \in T\varrho + T\omega$, d. h. $\eta \in T\gamma$. Nach dem Satz 2 ist $\eta \in T_v\gamma$ und $T_v\varrho + T_v\omega \leqq T_v\gamma$. Wählen wir umgekehrt $\alpha = \xi\gamma \in T_v\gamma$ beliebig. Nach dem Satz 1 kann vorausgesetzt werden, dass $\xi \in T_v$ ist. Es existieren $\varrho' \in T\varrho$, $\omega' \in T\omega$, so dass $\varrho' + \omega' = \gamma$ ist. Dann ist $\alpha = \xi\varrho' + \xi\omega'$. Offenbar ist $\xi\varrho' \in T_v \cap T\varrho$, $\xi\omega' \in T_v \cap T\omega$ und daher ist $\alpha \in T_v\varrho + T_v\omega$. Es gilt also $T_v\gamma \leqq T_v\varrho + T_v\omega$ und $T_v\gamma = T_v\varrho + T_v\omega$. Nach dem Satz 3 ist $T_v\gamma = H$ ein linker Annulator des Ringes T_v und es gilt $H_1 + H_2 = H$. Ähnlich zeigt man, dass $H_1 \cap H_2 = T_v\delta = H'$ ist. Gleicherweise zeigt man, dass auch Π_P ein Teilverband des Verbandes Ψ_P ist.

Bemerkung. Nach dem Satz 5 folgt von der Beziehung $T\varrho + T\omega = T\gamma$ die Beziehung $T_v\varrho \cup T_v\omega = T_v\gamma$, vom Beweis des Satzes 6 ergibt sich $T_v\varrho + T_v\omega = T_v\gamma$ und daher ist $T_v\varrho \cup T_v\omega = T_v\varrho + T_v\omega$. Ähnliches gilt auch für die rechten Annulatoren.

Satz 7. *Es sei H ein Linksideal des Ringes T_v. Dann ist AH ein Unterraum des Raumes A.*

Beweis. Jede zwei Elemente von AH können in der Form $a'i'$, $a''i''$ geschrieben werden, wobei $a', a'' \in A$, $i', i'' \in H$ ist. Bezeichnen wir mit H' das durch die Elemente i', i'' generierte Linksideal. Nach dem Theorem 4,4 in [4] ist H' ein linker Annulator. Nach dem Lemma 2,7 in [4] ist AH' ein Unterraum des Raumes A. Nachdem $H' \leqq H$ ist, gilt $a'i' \pm a''i'' \in AH$. Nachdem ferner noch $AH = FAH$ gilt, ist AH ein Unterraum des Raumes A.

Satz 8. *Das Linksideal H des Ringes T_v ist genau dann ein linker Annulator, wenn ein Linksideal H' so existiert, dass $H \oplus H' = T_v$ ist.*

Beweis. 1. Setzen wir voraus, dass $H \leqq T_v$ ein linker Annulator ist. Dann ist $H = L(S) = T_v\varrho$, wo $A\varrho = S$ ist. Wählen wir den Unterraum $U \leqq A$, $S \oplus U = A$ und $\omega \in T$, so dass $A\omega = U$ ist. Dann ist $T\varrho \oplus T\omega = T$ und nach den Sätzen 5,6 ist $T_v\varrho \oplus T_v\omega = T_v$.

2. Es seien Linksideale $H, H' \leqq T_v$ derartig gegeben, dass $H \oplus H' = T_v$ ist. Nach dem Satz 7 sind $S = AH$, $S' = AH'$ Unterräume des Raumes A. Es existiere $s \neq o \in S \cap S'$. Dann existieren $\varrho \in H$, $\varrho' \in H'$; $a, a' \in A$, so dass $a\varrho = a'\varrho' = s$ ist. Das bedeutet, dass $A\varrho \cap A\varrho' \neq o$ und $\mathrm{L}(A\varrho \cap A\varrho') = T_v\varrho \cap T_v\varrho' \neq o$ ist und auch $H \cap H' \neq o$; dieses ist ein Widerspruch und darum ist $S \cap S' = o$. Wählen wir $\omega, \omega' \in T$, so dass $A\omega = S$, $A\omega' = S'$ ist. Dann ist $\mathrm{L}(S) = T_v\omega$, $\mathrm{L}(S') = T_v\omega'$ und

$$\mathrm{L}(S \cap S') = T_v\omega \cap T_v\omega' = o\,. \tag{1}$$

Es sei $\alpha \in H$. Von der Definition des Raumes S folgt, dass $A\alpha \leqq A\omega$ ist. Daher ist $T_v\alpha \leqq T_v\omega$ und darum ist $H \leqq T_v\omega$. Soeben zeigt man, dass auch $H' \leqq T_v\omega'$ ist. Nachdem $H \oplus H' = T_v$ ist, gilt auch $T_v\omega + T_v\omega' = T_v$. Von der Beziehung (1) bekommen wir dann $T_v\omega \oplus T_v\omega' = T_v$ und demzufolge ist $H = T_v\omega$, $H' = T_v\omega'$. Die Ideale H, H' sind nach dem Satz 3 linke Annulatoren des Ringes T_v.

Satz 9. *Das Rechtsideal J des Ringes T_v ist genau dann ein rechter Annulator, wenn ein Rechtsideal J' so existiert, dass $J \oplus J' = T_v$ gilt.*

Beweis. 1. Setzen wir voraus, dass J ein rechter Annulator des Ringes T_v ist. Dann ist $J = \mathrm{R}(S) = \varrho T_v$, wo $\mathrm{Ker}(\varrho) = S$ ist. Wählen wir einen Unterraum $U \leqq A$, $S \oplus U = A$ und $\omega \in T$, so dass $\mathrm{Ker}(\omega) = U$ ist. Dann ist $\varrho T_v \oplus \omega T_v = T_v$.

2. Es sei $J \leqq T$ ein beliebiges Rechtsideal und bezeichnen wir $\mathrm{K}(J)$ die Menge aller $x \in A$, für welche $xJ = o$ ist. $\mathrm{K}(J)$ ist ein Unterraum des Raumes A. Setzen wir zuerst voraus, dass $\mathrm{K}(J) = o$ ist und es existiere $\xi T \neq o$, so dass $\xi T \cap J = o$ gilt. Offensichtlich ist $J \neq o$. Wenn für die Rechtsideale $I_1, I_2 \leqq T$ die Beziehung $I_1 \oplus I_2 = T$ gilt, dann sind I_1, I_2 Hauptideale, da T der Ring mit einem Einselement ist. Es existiert also ein Hauptideal ϱT, $J \leqq \varrho T$, so dass $\xi T \oplus \varrho T = T$ ist. Dann ist $\mathrm{K}(J) \geqq \mathrm{Ker}(\varrho)$, also $\mathrm{K}(J) \neq o$, was einen Widerspruch liefert und darum ist $\xi T = o$. Wenn $J \oplus J' = T_v$, $\mathrm{K}(J) = o$ ist, dann ist $\omega T_v = \omega T$, $\omega T \cap J = o$ für ein beliebiges $\omega \in J'$ und daher ist $\omega T_v = o$. Es gilt darum $J = T_v$ und $J = \mathrm{R}(o)$. Es sei nun $J \oplus J' = T_v$, $\mathrm{K}(J) \neq o$, $\mathrm{K}(J') \neq o$. Es existiert soein $\alpha \in J$, dass $\mathrm{Ker}(\alpha) \leqq \mathrm{K}(J) + \mathrm{K}(J')$ ist. Im umgekehrten Fall würde $\mathrm{K}(J) + \mathrm{K}(J') < \mathrm{Ker}(\alpha)$ für alle $\alpha \in J$ gelten, aber dieses widerspricht der Definition des Raumes $\mathrm{K}(J)$. Gleicherweise kann gezeigt werden, dass ein $\alpha' \in J'$ so existiert, dass $\mathrm{Ker}(\alpha') \leqq \mathrm{K}(J) + \mathrm{K}(J')$ gilt. Wählen wir $\varrho \in T_v$ beliebig, so dass $(\mathrm{K}(J) + \mathrm{K}(J'))\,\varrho = o$ ist. Dann ist $\mathrm{Ker}(\alpha) \leqq \mathrm{Ker}(\varrho)$, $\mathrm{Ker}(\alpha') \leqq \mathrm{Ker}(\varrho)$ und $\varrho \in \alpha T_v$, $\varrho \in \alpha' T_v$, oder auch $\varrho \in \alpha T_v \cap \alpha' T_v$. Der Voraussetzung nach ist $J \cap J' = o$ und darum ist $\varrho = o$. Daher folgt, dass $\mathrm{K}(J) + \mathrm{K}(J') = A$ ist. Bezeichnen wir $\mathrm{R}[\mathrm{K}(J)] = \omega T_v$, $\mathrm{R}[\mathrm{K}(J')] = \omega' T_v$. Dann $\omega T_v \cap \omega' T_v = o$. Offenbar ist $J \leqq \omega T_v$, $J' \leqq \omega' T_v$ und demzufolge auch $\omega T_v \oplus \omega' T_v = T_v$ und $\omega T_v = J$, $\omega' T_v = J'$.

Satz 10. *Es sei ein Automorphismus σ des Ringes T_v gegeben und $\varphi, \psi \in T_v$. Dann ist $A\varphi \leqq \mathrm{Ker}(\psi)$ genau dann, wenn $A\varphi^\sigma \leqq \mathrm{Ker}(\psi^\sigma)$ ist.*

Beweis. Die folgenden Behauptungen sind äquivalent: $A\varphi \leqq \operatorname{Ker}(\psi)$, $A\varphi\psi = o$, $\varphi\psi = o$, $(\varphi\psi)^\sigma = o$, $\varphi^\sigma\psi^\sigma = o$, $A\varphi^\sigma\psi^\sigma = o$, $A\varphi^\sigma \leqq \operatorname{Ker}(\psi^\sigma)$.

Satz 11. *Es sei σ ein Automorphismus des Ringes T_v. Die folgenden Behauptungen sind äquivalent:*

a) *Alle linken Hauptideale des Ringes T_v sind σ-zulässig.*
b) *Alle rechten Hauptideale des Ringes T_v sind σ-zulässig.*
c) *Für jedes idempotentes Element $\varkappa \in T_v$ gilt $\varkappa^\sigma = \varkappa$.*

Beweis. a) $\rightarrow$ b). Für ein beliebiges $\varrho \in T_v$ gilt nach der Voraussetzung $(T_v\varrho)^\sigma = T_v\varrho^\sigma \leqq T_v\varrho$. Von der Tatsache, dass σ ein Automorphismus ist, folgt $T_v\varrho^\sigma = T_v\varrho$. Nach der dem Satz 3 folgenden Bemerkung ist $A\varrho^\sigma = A\varrho$. Wählen wir $\omega \in T_v$ $a \in \operatorname{Ker}(\omega)$ beliebig. Es existiert $\varphi \in T_v$ so, dass $A\varphi = Fa$ ist. Nachdem $A\varphi \leqq \operatorname{Ker}(\omega)$ ist, ist auch $A\varphi^\sigma \leqq \operatorname{Ker}(\omega^\sigma)$. Es ist aber $A\varphi^\sigma = A\varphi = Fa$ und $a \in \operatorname{Ker}(\omega^\sigma)$, d. h. es ist auch $\operatorname{Ker}(\omega) \leqq \operatorname{Ker}(\omega^\sigma)$. Wählen wir umgekehrt $a \in \operatorname{Ker}(\omega^\sigma)$ beliebig. Wenn wir $\varphi \in T_v$ so wählen, dass $A\varphi = Fa$ ist, dann ist auch $A\varphi^\sigma = Fa \leqq \operatorname{Ker}(\omega^\sigma)$ und $A\varphi \leqq \operatorname{Ker}(\omega)$, d. h. es ist $a \in \operatorname{Ker}(\omega)$. Darum ist $\operatorname{Ker}(\omega^\sigma) \leqq \operatorname{Ker}(\omega)$ und $\operatorname{Ker}(\omega^\sigma) = \operatorname{Ker}(\omega)$. Nach der dem Satz 4 nachfolgenden Bemerkung gilt $\omega T_v = \omega^\sigma T_v = (\omega T_v)^\sigma$ und jedes rechte Hauptideal des Ringes T_v ist σ – zulässig.

b) $\rightarrow$ a). Der Voraussetzung zufolge ist $(\varrho T_v)^\sigma = \varrho^\sigma T_v \leqq \varrho T_v$ und daher ist $\varrho^\sigma T_v = \varrho T_v$ für jedes $\varrho \in T_v$, d. h. $\operatorname{Ker}(\varrho) = \operatorname{Ker}(\varrho^\sigma)$. Wählen wir beliebig $\omega \in T_v$. Setzen wir voraus, dass $a \in A\omega^\sigma$, $a \notin A\omega$ ist und wählen wir einen Unterraum Q, so dass $Fa \oplus A\omega \oplus Q = A$ ist. Betrachten wir ferner den Endomorphismus $\varphi \neq o$, für welchen $\operatorname{Ker}(\varphi) = A\omega + Q$ ist. Offensichtlich ist $\varphi \in T_v$. Nachdem $A\omega \leqq \operatorname{Ker}(\varphi)$ ist, ist auch $A\omega^\sigma \leqq \operatorname{Ker}(\varphi)$ und dieses ist ein Widerspruch. Es gilt also $A\omega^\sigma \leqq A\omega$. Setzen wir umgekehrt voraus, dass $a \in A\omega$, $a \notin A\omega^\sigma$ ist, betrachten wir den Unterraum Q, für welchen $Fa \oplus A\omega^\sigma \oplus Q = A$ ist und den Endomorphismus $\varphi \neq o$, für welchen $\operatorname{Ker}(\varphi) = A(\omega^\sigma) + Q$ gilt. Dann ist $\varphi \in T_v$ und $A\omega^\sigma \leqq \operatorname{Ker}(\varphi^\sigma)$ oder auch $A\omega \leqq \operatorname{Ker}(\varphi)$, und so ergibt sich ein Widerspruch. Also gilt $A\omega \leqq A\omega^\sigma$. Von den angeführten Beziehungen folgt $A\omega = A\omega^\sigma$ und $T_v\omega = T_v\omega^\sigma = (T_v\omega)^\sigma$. Jedes linke Hauptideal ist also σ – zulässig.

a) $\rightarrow$ c). Es sei $\varkappa \in T_v$ ein beliebiger idempotenter Endomorphismus. Da a) gilt, gilt zugleich auch b) und es ist $A\varkappa = A\varkappa^\sigma$, $\operatorname{Ker}(\varkappa) = \operatorname{Ker}(\varkappa^\sigma)$. Daher folgt schon $\varkappa = \varkappa^\sigma$.

c) $\rightarrow$ a). Setzen wir voraus, dass $\varkappa = \varkappa^\sigma$ für einen beliebigen idempotenten Endomorphismus gilt. Nach [4] ist jedes linke Hauptideal des Ringes T_v durch einen idempotenten Endomorphismus generiert. Sei also beliebig $T_v\varkappa$ gegeben, wo $\varkappa$ ein idempotenter Endomorphismus ist. Dann ist $(T_v\varkappa)^\sigma = T_v\varkappa^\sigma = T_v\varkappa$ und a) gilt.

Satz 12. *Wenn der Automorphismus σ des Ringes T_v die äquivalenten Bedingungen vom Satz* 11 *erfüllt, dann ist dieser identisch.*

Beweis. Der Beweis kann soeben wie der Beweis des Lemmas 2, S. 231 in [1] durchgeführt werden.

Satz 13. *Jeder Automorphismus σ' des Ringes T induziert einen Automorphismus σ des Ringes T_ν.*

Beweis. Nachdem T_ν ein beiderseitiges Ideal des Ringes T ist, ist auch $T_\nu^{\sigma'}$ ein beiderseitiges Ideal diesen Ringes. Von der Struktur der beiderseitigen Ideale des Ringes T folgt, dass im Falle $T_\nu \neq T_\nu^{\sigma'}$ entweder $T_\nu < T_\nu^{\sigma'}$, $T_\nu^{\sigma'} = T_{\nu'}$ oder $T_\nu^{\sigma'} < T_\nu$, $T_\nu^{\sigma'} = T_{\nu''}$ gilt. Die Kardinalzahlen $\varkappa_\nu, \varkappa_{\nu'}, \varkappa_{\nu''}$ sind dann voneinander verschieden und die Mengen $T_\nu, T_{\nu'}, T_{\nu''}$ sind nicht äquivalent. Da σ' ein Automorphismus des Ringes T ist, gilt $T_\nu = T_\nu^{\sigma'}$ und σ' induziert einen Automorphismus des Ringes T_ν.

Satz 14. *Jeder Automorphismus des Ringes T_ν induziert einen Automorphismus des Verbandes $\Pi_L(\Pi_P)$ und umgekehrt jeder Automorphismus des Verbandes $\Pi_L(\Pi_P)$ ist durch einen Automorphismus des Ringes T_ν induziert.*

Beweis. Es sei σ ein Automorphismus des Ringes T_ν. Wenn $H \in \Pi_L$ ein linker Annulator der Menge M im Ring T_ν ist, dann ist H^σ ein linker Annulator der Menge M^σ und es ist $H^\sigma \in \Pi_L$. Daher ist $\Pi_L^\sigma \leqq \Pi_L$. Ferner ist $H^{\sigma^{-1}}$ ein Annulator der Menge $M^{\sigma^{-1}}$ und es gilt $H = (H^{\sigma^{-1}})^\sigma$. Darum ist $\Pi_L^\sigma = \Pi_L$. Der Automorphismus σ induziert einen Automorphismus $\bar{\sigma}$ des Verbandes Ψ_L. Nach dem Satz 6 ist der Verband Π_L ein Unterverband des Verbandes Ψ_L und nachdem $\Pi_L^{\bar{\sigma}} = \Pi_L$ ist, induziert σ auch einen Automorphismus des Verbandes Π_L. Das gleiche kann für den Verband Π_P gezeigt werden.

Es sei $\bar{\sigma}$ ein beliebiger Automorphismus des Verbandes Π_L. Dem Satz 3 zufolge kann man $T_\nu\varrho \to (T_\nu\varrho)^{\bar{\sigma}}$ für $T_\nu\varrho \in \Pi_L$ schreiben. Betrachten wir nach dem Satz 5 den Isomorphismus $\varkappa$ der Verbände Π_L, Ω_L, welchen ist durch die Vorschrift $(T_\nu\varrho)^\varkappa = T\varrho$ bestimmt. Die Abbildung $\bar{\sigma}'$: $(T\varrho)^{\bar{\sigma}'} = (T_\nu\varrho)^{\bar{\sigma}\varkappa}$ ist dann ein Automorphismus des Verbandes Ω_L. Der Vektorraum ist ein homogener total zerlegbarer Modul, der Körper F ist ein Ring mit der Eigenschaft (V) von [3] und ein Vektorraum mit der Dimension grösser als drei ist ein zulässiger Modul. Für den Verband Ω_L, welcher dem Raum A gehört, gilt also der Satz 1 von [3]. Nachdem sich der Beweis diesen Satzes nur auf den sog. Fundamentalsatz der projektiven Geometrie stützt, gilt dieser auch für Vektorräume der Dimension grösser als zwei. Es existiert also ein einziger Automorphismus σ' des Ringes T, welcher den Automorphismus $\bar{\sigma}'$ des Verbandes Ω_L induziert, oder mit anderen Worten es gilt $(T\varrho)^{\bar{\sigma}'} = (T\varrho)^{\sigma'}$ für jedes $\varrho \in T$. Nach dem Satz 13 induziert σ' einen Automorphismus σ des Ringes T_ν mittels der Vorschrift $\varrho^\sigma = \varrho^{\sigma'}$ für jedes $\varrho \in T_\nu$. Für beliebiges $\omega \in T$ gilt $(T_\nu\omega)^\sigma = T_\nu\omega^{\sigma'}$: Wählen wir beliebig $(\xi\omega)^\sigma \in (T_\nu\omega)^\sigma$. Dann ist $(\xi\omega)^\sigma = (\xi\omega)^{\sigma'} = \xi^{\sigma'}\omega^{\sigma'}$ und $(\xi\omega)^\sigma \in T_\nu\omega^{\sigma'}$. Wählen wir umgekehrt $\xi\omega^{\sigma'} \in T_\nu\omega^{\sigma'}$. Dann existiert $\gamma \in T_\nu$, so dass $\gamma^{\sigma'} = \xi$ ist und wir bekommen $\xi\omega^{\sigma'} = \gamma^{\sigma'}\omega^{\sigma'} = (\gamma\omega)^{\sigma'} = (\gamma\omega)^\sigma$ und also auch $(\xi\omega)^\sigma \in (T_\nu\omega)^\sigma$. Daher ist $(T_\nu\omega)^\sigma = T_\nu\omega^{\sigma'}$. Für ein beliebiges $H \in \Pi_L$ ergibt sich: $H^{\sigma\varkappa} = (T_\nu\omega)^{\sigma\varkappa} =$

$= (T_v\omega^{\sigma'})^{\varkappa} = T\omega^{\sigma'} = (T\omega)^{\sigma'} = (T\omega)^{\bar{\sigma}'} = (T_v\omega)^{\bar{\sigma}\varkappa} = H^{\bar{\sigma}\varkappa}$. Da $\varkappa$ ein Isomorphismus ist, ist $H^{\bar{\sigma}} = H^{\sigma}$ für jedes $H \in \Pi_L$ und der Automorphismus $\bar{\sigma}$ des Verbandes Π_L ist durch den Automorphismus σ des Ringes T_v induziert. Gleicherweise kann gezeigt werden, dass jeder Automorphismus des Verbandes Π_P durch einen Automorphismus des Ringes T_v induziert wird.

Folgerung 1. Die Gruppe $P(\Pi_L)$ der Automorphismen des Verbandes Π_L ist mit der Gruppe $A(T_v)$ der Automorphismen des Ringes T_v isomorph: Nach dem Satz 14 induziert jeder Automorphismus $\sigma \in A(T_v)$ einen Automorphismus $\bar{\sigma} \in P(\Pi_L)$ und die Abbildung $\sigma \to \bar{\sigma}$ ist ein Homomorphismus der Gruppe $A(T_v)$ auf die Gruppe $P(\Pi_L)$. Es sei $\sigma \to \bar{\iota}$, wo $\bar{\iota}$ der identische Automorphismus des Verbandes Π_L ist. Dann gilt $H^{\bar{\iota}} = H = H^{\sigma}$ für jedes linke Hauptideal des Ringes T_v und dieses Ideal ist σ-zulässig. Nach dem Satz 12 ist σ der identische Automorphismus des Ringes T_v und die erwägte Abbildung ist ein Isomorphismus der Gurppen $P(\Pi_L)$, $A(T_v)$. Soeben kann gezeigt werden, dass die Gruppe $P(\Pi_P)$ der Automorphismen des Verbandes Π_P mit der Gruppe $A(T_v)$ isomorph ist.

Folgerung 2. Die Gruppen $A(T)$, $A(T_v)$ sind isomorph und jeder Automorphismus des Ringes T_v kann in genau einen Automorphismus des Ringes T erweitert werden: Nach der dem Satz 5 folgenden Bemerkung sind die Gruppen $A(T)$, $P(\Pi_L)$ isomorph, nach der Folgerung 1 sind dann die Gruppen $A(T)$, $A(T_v)$ isomorph. Wenn wir die Bezeichnung vom Satz 14 behalten, dann sind die Abbildungen $\sigma \to \bar{\sigma}$, $\bar{\sigma} \to \bar{\sigma}'$, $\bar{\sigma}' \to \sigma'$ Isomorphismen der zugehörigen Gruppen und die Abbildung $\sigma \to \sigma'$ ist ein Isomorphismus der Gruppen $A(T_v)$, $A(T)$. Setzen wir voraus, dass $\sigma' \in A(T)$ den Automorphismus $\eta \in A(T_v)$ induziert, d. h. dass $\varrho^{\sigma'} = \varrho^{\eta}$ für $\varrho \in T_v$ gilt. Wählen wir beliebig $\omega \in T_v$. Dann ist $(T\omega)^{\bar{\sigma}'} = (T_v\omega)^{\bar{\sigma}\varkappa} = (T_v\omega)^{\sigma\varkappa} = (T_v\omega^{\sigma})^{\varkappa} = (T\omega^{\sigma}) = T_v\omega^{\sigma} =$ $= (T\omega)^{\sigma'} = T\omega^{\sigma'} = T\omega^{\eta} = T_v\omega^{\eta}$. Daher ist $(T_v\omega)^{\sigma} = (T_v\omega)^{\eta}$ und $(T_v\omega)^{\sigma\eta^{-1}} = T_v\omega$. Nach dem Satz 12 ist $\sigma\eta^{-1}$ ein identischer Automorphismus und daher ist $\sigma = \eta$. Der Automorphismus $\sigma' \in A(T)$ ist eine Erweiterung des Automorphismus $\sigma \in A(T_v)$. Nachdem die Abbildung $\sigma \to \sigma'$ ein Isomorphismus der Gruppen $A(T_v)$, $A(T)$ ist, ist σ' die einzige Erweiterung des Automorphismus σ.

Folgerung 3. Der Automorphismus σ' des Ringes T, in welchem $\varkappa^{\sigma} = \varkappa$ für ein beliebiges idempotentes Element endlichen Ranges gilt, ist identisch (eine Verallgemeinerung des Lemmas 2, S. 231 in [1]): Der Automorphismus σ' induziert einen Automorphismus σ des Ringes T_0 aller Endomorphismen endlichen Ranges, wobei $\varkappa^{\sigma'} = \varkappa^{\sigma} = \varkappa$ für ein beliebiges idempotentes Element $\varkappa \in T_0$ gilt. Nach dem Satz 12 ist σ ein identischer Automorphismus des Ringes T_0. Der Folgerung 2 zufolge ist dann σ' ein identischer Automorphismus des Ringes T.

Satz 15. *Jeder Automorphismus des Verbandes $\Psi_L(\Psi_P)$ induziert einen Automorphismus des Verbandes $\Pi_L(\Pi_P)$.*

Beweis. Es sei $\tilde{\sigma}$ ein Automorphismus des Verbandes Ψ_L. Wählen wir beliebig $H \in \Pi_L$. Nach dem Satz 8 existiert $H' \in \Pi_L$, so dass $H \oplus H' = T_v$ ist und nach dem Satz 6 ist $H^{\tilde{\sigma}} \oplus H'^{\tilde{\sigma}} = T_v$. Nach dem Satz 8 ist dann $H^{\tilde{\sigma}} \in \Pi_L$, d. h. $\Pi_L^{\tilde{\sigma}} \subseteq \Pi_L$. Nachdem $(H^{\tilde{\sigma}^{-1}})^{\tilde{\sigma}} = H$ gilt, ist $\Pi_L^{\tilde{\sigma}} = \Pi_L$ und der Automorphismus $\tilde{\sigma}$ induziert einen Automorphismus des Verbandes Π_L. Mit Hilfe des Satzes 9 kann ähnliches auch für die Verbände Ψ_P, Π_P gezeigt werden.

Satz 16. *Jeder Automorphismus des Verbandes $\Psi_L(\Psi_P)$ ist durch einen Automorphismus des Ringes T_v induziert. Die Gruppen $P(\Psi_L)$, $P(\Psi_P)$ der Automorphismen der Verbände Ψ_L, Ψ_P sind mit der Gruppe $A(T_v)$ isomorph.*

Beweis. Es sei ein Automorphismus $\tilde{\sigma}$ des Verbandes Ψ_L gegeben. Dieser induziert nach dem Satz 15 einen Automorphismus $\bar{\sigma}$ des Verbandes Π_L, welcher ist ferner nach dem Satz 14 durch einen Automorphismus σ des Ringes T_v induziert. Es gilt $H^{\tilde{\sigma}} = H^{\bar{\sigma}} = H^{\sigma}$ für jedes $H \in \Pi_L$. Wähle man beliebig $J \in \Psi_L$. Dann kann man $J = \sum_{\mu \in J} T_v \varrho_\mu$ schreiben, wobei $\varrho_\mu \in T_v$, $T_v \varrho_\mu \in \Pi_L$ ist. Nachdem Ψ_L ein vollständiger Verband ist, gilt nach [2]: $J^{\tilde{\sigma}} = (\sum_{\mu \in J} T_v \varrho_\mu)^{\tilde{\sigma}} = \sum_{\mu \in J} (T_v \varrho)^{\sigma} = J^{\sigma}$. Der Automorphismus $\tilde{\sigma}$ ist durch den Automorphismus σ des Ringes T_v induziert. Wenn $\sigma \in A(T_v)$ ist, dann induziert σ einen Automorphismus $\tilde{\sigma}$ des Verbandes Ψ_L und die Abbildung $\sigma \to \tilde{\sigma}$ ist nach dem Satz 12 ein Isomorphismus der Gruppen $P(\Psi_L)$, $A(T_v)$. Der Folgerung 1 nach sind die Gruppen $P(\Pi_L)$, $A(T_v)$ isomorph und darum sind dann auch die Gruppen $P(\Pi_L)$, $P(\Psi_L)$ isomorph. Soeben auch für den Verband Ψ_P.

Literatur

[1] *Р. Бэр*: Линейная алгебра и проективная геометрия. Москва 1955.
[2] *H. Hermes:* Einführung in die Verbandstheorie. 2. Auflage. Springer-Verlag, 1967.
[3] *F. Machala:* O automorfismech definovaných na okruhu endomorfismů homogenního totálně rozložitelného modulu. Časopis pro pěstování matematiky, *96* (1971), 353—359.
[4] *K. G. Wolfson:* An ideal-theoretic characterisation of the ring of all linear transformations. Amer. Journ. Math., *75* (1953), 358—386.

Anschrift des Verfassers: 771 46 Olomouc, Leninova 26.