Václav Pecina
Degenerovaná $n$-rozměrná centrální axonometrie

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 98 (1973), No. 1, 67--73

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117789

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

# DEGENEROVANÁ $n$-ROZMĚRNÁ CENTRÁLNÍ AXONOMETRIE

VÁCLAV PECINA, Liberec

(Došlo dne 2. dubna 1971)

Budeme se zabývat některými vlastnostmi degenerované centrální axonometrie, zejména pak tím, zda pro degenerovanou axonometrii platí existenční věty obdobné známým existenčním větám centrální axonometrie nedegenerované. Některé základní úvahy týkající se uvedené problematiky jsou provedeny L. DRSEM v práci [1].

Označme $\mathsf{E}^k$ $k$-rozměrný rozšířený eukleidovský prostor a $\mathsf{L}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ lineární obal lineárních prostorů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. Konfiguraci navzájem různých bodů $O, A_i, B_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ nazveme *n-ramenná, k-rozměrná polyedrická konfigurace* a označíme $\mathsf{K}_n^k \equiv \{O, A_i, B_i\}$, jestliže každá trojice $O, A_i, B_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ je tvořena kolineárními body, jestliže body $O, A_i$ jsou vlastní a jestliže pro přímky $x_i = OA_i$ platí $\mathsf{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathsf{E}^k$ ($k, n, r$ jsou přirozená čísla, $2 \leqq k \leqq n$).

Konfiguraci $\mathsf{K}_n^n \equiv \{O, A_i, B_i\}$ nazveme *kartézská*, jestliže body $B_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ jsou nevlastní a soustava vektorů $\overrightarrow{OA_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ je ortonormální.

Konfiguraci bodů $O, A_i, B_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ nazveme *degenerovaná n-ramenná, k-rozměrná konfigurace* $(k < n)$ a označíme $\mathsf{D}_n^k \equiv \{O, A_i, B_i\}$, jestliže $O = A_1 = B_1$ a body $O, A_i, B_i$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$ tvoří $(n - 1)$-ramennou, $k$-rozměrnou polyedrickou konfiguraci.

Analogicky jako v případě nedegenerované centrální axonometrie budeme dále zkoumat, zda lze danou degenerovanou konfiguraci ${}^0\mathsf{D}_n^m$ (podrobenou eventuelně nějaké lineární transformaci) uvést do perspektivní polohy s danou polyedrickou konfigurací $\mathsf{K}_n^n$.

**Věta 1.** *Nechť je dána polyedrická konfigurace $\mathsf{K}_n^n \equiv \{O, A_i, B_i\} \subset \mathsf{E}^n$ a degenerovaná konfigurace ${}^0\mathsf{D}_n^{n-1} \equiv \{{}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i\} \subset {}^0\mathsf{E}^{n-1}$ $(n \geqq 3)$. Nechť $S \neq O$ je libovolný bod přímky $x_1 = OA_1$ a ${}^1\mathsf{E}^{n-1} \subset \mathsf{E}^n$ libovolná nadrovina neprocházející bodem $S$. Pak existuje centrální projekce $\mathcal{P}$ s basí $[S, {}^1\mathsf{E}^{n-1}]$ a projektivní transformace $\mathcal{R} : {}^0\mathsf{E}^{n-1} \to {}^1\mathsf{E}^{n-1}$ tak, že $\mathcal{P}\mathsf{K}_n^n = \mathcal{R}{}^0\mathsf{D}_n^{n-1}$.*

Důkaz. Nechť $\Pi : {}^0\mathsf{E}^{n-1} \to \mathsf{E}^{n-1} = \mathsf{L}(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ je projektivní transformace, pro kterou ${}^0A_i \to A_i$, ${}^0B_i \to B_i$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$; pak je $O = \Pi{}^0O$. V každé centrální projekci $\mathscr{P}$ s basí $[S, {}^1\mathsf{E}^{n-1}]$, kde $S \in x_1 = OA_1$ je vlastní bod $(S \neq O)$ a ${}^1\mathsf{E}^{n-1}$ libovolná vlastní nadrovina $(S \notin {}^1\mathsf{E}^{n-1})$, je $\mathscr{P}K_n^n = \mathscr{P}\Pi{}^0\mathsf{D}_n^{n-1}$, tj. $\mathscr{P}K_n^n = \mathscr{R}{}^0\mathsf{D}_n^{n-1}$, kde $\mathscr{R} = \mathscr{P}\Pi : {}^0\mathsf{E}^{n-1} \to {}^1\mathsf{E}^{n-1}$ je projektivní transformace.

**Věta 2.** *Nechť je dána polyedrická konfigurace* $K_n^n \equiv \{O, A_i, B_i\} \subset \mathsf{E}^n$ *a degenerovaná konfigurace* ${}^0\mathsf{D}_n^{n-1} \equiv \{{}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i\} \subset {}^0\mathsf{E}^{n-1}$ $(n \geqq 3)$. *Pak existuje centrální projekce* $\mathscr{P}$ *s basí* $[S, {}^1\mathsf{E}^{n-1}]$ $(S \in x_1 = OA_1$ *je vlastní bod,* $S \neq O)$ *a afinita* $\mathscr{A} : {}^0\mathsf{E}^{n-1} \to {}^1\mathsf{E}^{n-1}$ *s libovolným kladným modulem tak, že* $\mathscr{P}K_n^n = \mathscr{A}{}^0\mathsf{D}_n^{n-1}$.

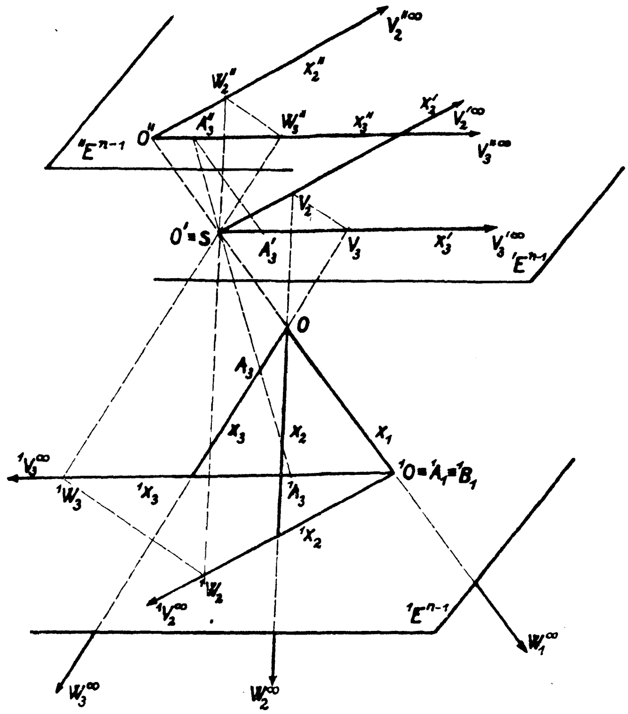
Důkaz. Přiřazením ${}^0O \to O$, ${}^0A_i \to A_i$, ${}^0B_i \to B_i$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$ je stanovena projektivní transformace $\Pi : {}^0\mathsf{E}^{n-1} \to \mathsf{E}^{n-1} = L(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, kde $x_i = OA_i$. Je-li ${}^0V_i^\infty$ nevlastní bod přímky ${}^0x_i = {}^0O{}^0A_i\,(i = 2, 3, \ldots, n)$ a $V_i = \Pi{}^0V_i\,(i = 2, 3, \ldots$ $\ldots, n)$, pak je $L(V_2, V_3, \ldots, V_n) = \mathsf{E}^{n-2}$. Zvolíme-li libovolně vlastní bod $S \in x_1 =$ $= OA_1(S \neq O)$, pak v důsledku $S \notin \mathsf{E}^{n-2}$ je $L(S, \mathsf{E}^{n-2}) = {}'\mathsf{E}^{n-1}$. V centrální projekci $\mathscr{P}$ s basí $[S, {}^1\mathsf{E}^{n-1}]$, kde ${}^1\mathsf{E}^{n-1}$ je libovolná nadrovina rovnoběžná s nadrovinou ${}'\mathsf{E}^{n-1}(S \notin {}^1\mathsf{E}^{n-1})$, je (podle věty 1) $\mathscr{P}K_n^n = \mathscr{R}{}^0\mathsf{D}_n^{n-1}$, kde $\mathscr{R} : {}^0\mathsf{E}^{n-1} \to {}^1\mathsf{E}^{n-1}$ je projektivní transformace. Z rovnoběžnosti ${}'\mathsf{E}^{n-1} \parallel {}^1\mathsf{E}^{n-1}$ nadrovin ${}'\mathsf{E}^{n-1}$, ${}^1\mathsf{E}^{n-1}$ plyne, že podprostor ${}^1\mathsf{E}^{n-2} = \mathscr{P}\mathsf{E}^{n-2}$ je nevlastním podprostorem nadroviny ${}^1\mathsf{E}^{n-1}$ a poněvadž ${}^1\mathsf{E}^{n-2} = \mathscr{R}{}^0\mathsf{E}^{n-2}$, kde ${}^0\mathsf{E}^{n-2} = L({}^0V_2^\infty, {}^0V_3^\infty, \ldots, {}^0V_n^\infty)$ je nevlastní podprostor nadroviny ${}^0\mathsf{E}^{n-1}$, je $\mathscr{R}$ afinita. Bude-li při pevném $S$ průmětna ${}^1\mathsf{E}^{n-1}$ nabývat všech možných poloh rovnoběžných s ${}'\mathsf{E}^{n-1}$ $(S \notin {}^1\mathsf{E}^{n-1})$ budou si centrální projekce konfigurace $K_n^n$ odpovídat v homotetii $\mathscr{H} : \mathsf{E}^n \to \mathsf{E}^n$, a tedy $\mathscr{P}K_n^n = \mathscr{H}\mathscr{R}{}^0\mathsf{D}_n^{n-1}$. Poněvadž koeficient homotetie $\mathscr{H}$ nabývá všech nenulových hodnot, nabývá modul afinity $\mathscr{A} = \mathscr{H}\mathscr{R}$ všech kladných hodnot.

**Věta 3.** *Nechť je dána polyedrická konfigurace* $K_n^n \equiv \{O, A_i, B_i\} \subset \mathsf{E}^n$ $(n \geqq 3)$ *a degenerovaná konfigurace* ${}^0\mathsf{D}_n^{n-1} \equiv \{{}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i\} \subset {}^0\mathsf{E}^{n-1}$. *Nechť* $(OA_iB_i) \neq$ $\neq ({}^0O{}^0A_i{}^0B_i)$, $i = 2, 3, \ldots, n$, *a nechť* $V_i({}^0W_i)$ *je úběžník přímky* $x_i({}^0x_i)$ *v projektivnosti bodových řad* $x_i(O, A_i, B_i, \ldots) \barwedge {}^0x_i({}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i, \ldots)$, $i = 2, 3, \ldots, n$.

*Nutná a postačující podmínka pro existencí centrální projekce* $\mathscr{P}$ *s basí* $[S, {}^1\mathsf{E}^{n-1}]$, *v níž* $\mathscr{P}K_n^n \cong {}^0\mathsf{D}_n^{n-1}$, *je existence vlastního bodu* $S \in x_1 = OA_1$ $(S \neq O)$ *takového, že simplexy* $S^{n-1}(S, V_2, V_3, \ldots, V_n)$, ${}^0S^{n-1}({}^0O, {}^0W_2, {}^0W_3, \ldots, {}^0W_n)$ *jsou podobné.*

Důkaz. (obr. 1 pro $n = 3$; v obr. nejsou vyznačeny všechny body $A_i$, $B_i$ a není vyznačena daná ${}^0\mathsf{E}^{n-1}$). Nejprve ukážeme, že podmínka je postačující. Nechť tedy existuje vlastní bod $S \in x_1$ $(S \neq O)$ tak, že $S^{n-1} \sim {}^0S^{n-1}$. Přiřazením ${}^0O \to S$, ${}^0W_i \to V_i$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$ je stanovena podobnost $\Pi : {}^0\mathsf{E}^{n-1} \to {}'\mathsf{E}^{n-1}$ $({}'\mathsf{E}^{n-1} =$ $= L(S, V_2, V_3, \ldots, V_n))$. Sestrojme konfiguraci ${}'\mathsf{D}_n^{n-1} \equiv \{O', A_i', B_i'\}$ tak, aby ${}'\mathsf{D}_n^{n-1} =$ $= \Pi{}^0\mathsf{D}_n^{n-1}$. Uvažujme nyní translaci $\mathscr{T} : \mathsf{E}^n \to \mathsf{E}^n$, určenou vektorem $\overrightarrow{OS}$, označme ${}''\mathsf{D}_n^{n-1} \equiv \{O'', A_i'', B_i''\}$ degenerovanou konfiguraci $\mathscr{T}{}'\mathsf{D}_n^{n-1}$ a zvolme centrální projekci $\mathscr{P}$ s basí $[S, {}^1\mathsf{E}^{n-1}]$, kde ${}^1\mathsf{E}^{n-1}$ je nadrovina rovnoběžná s nadrovinou ${}'\mathsf{E}^{n-1}$ $({}^1\mathsf{E}^{n-1} \neq {}'\mathsf{E}^{n-1})$.

Ukážeme nejprve, že je $\mathscr{P}K_n^n = \mathscr{P}''D_n^{n-1}$. Označme $\mathscr{P}K_n^n = {}^1D_n^{n-1} \equiv \{{}^1O, {}^1A_i, {}^1B_i\}$. Je $\mathscr{P}O'' = \mathscr{P}O = \mathscr{P}A_1 = \mathscr{P}B_1 = {}^1O$. $\mathscr{P}x_i = {}^1W_i{}^1V_i^\infty$, kde ${}^1W_i = \mathscr{P}W_i^\infty$, ${}^1V_i^\infty = \mathscr{P}V_i$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Je-li $W_i'' = \mathscr{T}V_i$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$, je $W_i''S = \mathscr{T}x_i$, a tedy $W_i''S \parallel x_i$; odtud plyne $\mathscr{P}W_i^\infty = \mathscr{P}W_i'' = {}^1W_i$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$. Je-li dále $V_i''^\infty(V_i'^\infty)$ nevlastní



Obr. 1.

bod přímky $x_i'' = O''A_i''$ $(x_i' = SA_i')$, $i = 2, 3, \ldots, n$, pak v důsledku $O''W_i'' = \mathscr{T}SV_i$ a $''E^{n-1} \parallel {}'E^{n-1}$ je $\mathscr{P}V_i = V_i'^\infty = {}^1V_i^\infty$, kde ${}^1V_i^\infty$ je nevlastní bod přímky ${}^1x_i = {}^1O{}^1A_i$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$; je tedy $\mathscr{P}x_i'' = \mathscr{P}x_i = {}^1x_i$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$. Označme ${}^1A_i^* = \mathscr{P}A_i''$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$. V důsledku $\mathscr{P}O'' = {}^1O$, $\mathscr{P}W_i'' = {}^1W_i$, $\mathscr{P}V_i''^\infty = {}^1V_i^\infty$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$ platí

(1) $$(O''W_i''V_i''^\infty A_i'') = ({}^1O{}^1W_i{}^1V_i^{\infty 1}A_i^*)\,, \quad i = 2, 3, \ldots, n\,.$$

Poněvadž $O'' = \mathscr{T}\Pi^0 O$, $W_i'' = \mathscr{T}\Pi^0 W_i$, $V_i''^\infty = \mathscr{T}\Pi^0 V_i^\infty$ a $A_i'' = \mathscr{T}\Pi^0 A_i$, $i = 2, 3, \ldots, n$, je (v důsledku $S^1W_i \parallel x_i$, $i = 2, 3, \ldots, n$)

(2) $$(O''W_i''V_i''^\infty A_i'') = ({}^0O{}^0W_i{}^0V_i^{\infty 0}A_i)\,, \quad i = 2, 3, \ldots, n\,.$$

Poněvadž body ${}^0W_i(V_i)$ jsou úběžníky v projektivnosti bodových řad ${}^0x_i \barwedge x_i$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$ a centrální projekcí $\mathscr{P}$ se zachová dvojpoměr, platí

(3) $$({}^0O{}^0W_i{}^0V_i^{\infty 0}A_i) = (OW_i^\infty V_iA_i) = ({}^1O{}^1W_i{}^1V_i^{\infty 1}A_i)\,, \quad i = 2, 3, \ldots, n\,.$$

Z (1), (2) a (3) plyne $({}^1O^1W_i{}^1V_i^{\infty 1}A_i) = ({}^1O^1W_i{}^1V_i^{\infty 1}A_i^*)$, a odtud ${}^1A_i = {}^1A_i^*$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Je tedy $\mathscr{P}A_i = \mathscr{P}A_i''$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$. Analogicky ukážeme, že též $\mathscr{P}B_i = \mathscr{P}B_i''$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$. Pak je ovšem $\mathscr{P}K_n^n = \mathscr{P}''D_n^{n-1}$.

Poněvadž konfigurace $''D_n^{n-1}$ a ${}^1D_n^{n-1}$ leží v rovnoběžných nadrovinách, jsou podobné. Bude-li průmětna ${}^1E^{n-1}$ nabývat při pevném $S$ všech možných poloh $(S \notin {}^1E^{n-1})$ rovnoběžných s $'E^{n-1}$, pak centrální projekce ${}^1D_n^{n-1}$ konfigurace $K_n^n$ ze středu $S$ do nadrovin ${}^1E^{n-1}$ budou homotetické (koeficient homotetie bude nabývat všech nenulových hodnot), a poněvadž $''D_n^{n-1} \sim {}^0D_n^{n-1}$, lze vybrat ${}^1E^{n-1}$ tak, že ${}^1D_n^{n-1} \cong {}^0D_n^{n-1}$.

Nyní dokážeme nutnost podmínky. Nechť existuje projekce $\mathscr{P}$ s basí $[S, {}^1E^{n-1}]$ tak, že $\mathscr{P}K_n^n = {}^1D_n^{n-1} \equiv \{{}^1O, {}^1A_i, {}^1B_i\}$, ${}^1D_n^{n-1} \cong {}^0D_n^{n-1}$. Pak nutně $S \in x_1 = OA_1$ $(S \neq O)$. Nadrovina ${}^1E^{n-1}$ je rovnoběžná s nadrovinou $'E^{n-1} = L(S, V_2, V_3, \ldots, V_n)$ a nevlastní body $W_i^\infty$ přímek $x_i = OA_i$ se promítají přímkami $S^1W_i \parallel x_i$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$, přičemž ${}^1W_i = \mathscr{P}W_i$ $(V_i)$ je úběžník přímky ${}^1x_i = \mathscr{P}x_i$ $(x_i)$ v projektivnosti bodových řad ${}^1x_i({}^1O, {}^1A_i, {}^1B_i, \ldots) \barwedge x_i(O, A_i, B_i, \ldots)$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Poněvadž simplexy ${}^1S^{n-1}({}^1O, {}^1W_2, {}^1W^3, \ldots, {}^1W_n)$, $S^{n-1}(S, V_2, V_3, \ldots, V_n)$ jsou řezy trsů přímek $S(x_1, S^1W_2, S^1W_3, \ldots, S^1W_n)$, $O(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rovnoběžnými nadrovinami ${}^1E^{n-1}, 'E^{n-1}$, je (v důsledku $S^1W_i \parallel x_i$) ${}^1S^{n-1} \sim S^{n-1}$. Z ${}^1S^{n-1} \cong {}^0S^{n-1}$ pak plyne $S^{n-1} \sim {}^0S^{n-1}$.

**Věta 4.** *Nechť je dána kartézská konfigurace $K_n^n \equiv \{O, A_i, B_i^\infty\} \subset E^n$ a degenerovaná konfigurace ${}^0D_n^{n-1} \equiv \{{}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i\} \subset {}^0E^{n-1}$ $(n \geqq 3)$, a nechť ${}^0B_i$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$ jsou vlastní body. Označme $\lambda_i = 1 - ({}^0O^0A_i{}^0B_i)$, $i = 2, 3, \ldots, n$.*

*Nutná a postačující podmínka pro existenci takového bodu $S \in x_1 = OA_1$ $(S \neq O)$ a takové nadroviny ${}^1E^{n-1} \subset E^n$, že v centrální projekci $\mathscr{P}$ s basí $[S, {}^1E^{n-1}]$ platí $\mathscr{P}K_n^n \cong {}^0D_n^{n-1}$ je: existují reálná čísla $\mu > 0$, $k > 0$ taková, že ${}^0O^0B_i = k\sqrt{(\mu^2 + (1/\lambda_i^2))}$, ${}^0B_i{}^0B_j = k\sqrt{((1/\lambda_i^2) + (1/\lambda_j^2))}$, $i \neq j$; $i, j = 2, 3, \ldots, n$.*

Důkaz. Nejprve ukážeme nutnost podmínky. Nechť v centrální projekci $\mathscr{P}$ s basí $[S, {}^1E^{n-1}]$ je $\mathscr{P}K_n^n \cong {}^0D_n^{n-1}$. Pak v důsledku věty 3 je $S$ vlastní bod takový, že $S \in x_1 = OA_1$ $(S \neq O)$ a simplexy $S^{n-1}(S, V_2, V_3, \ldots, V_n)$, ${}^0S^{n-1}({}^0O, {}^0B_2, {}^0B_3, \ldots, {}^0B_n)$ jsou podobné, přičemž $V_i$ $({}^0B_i)$ je úběžník přímky $x_i$ $({}^0x_i)$ v projektivnosti bodových řad $x_i(O, A_i, B_i^\infty, V_i, \ldots) \barwedge {}^0x_i({}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i, {}^0V_i^\infty, \ldots)$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Z rovnosti dvojpoměrů $(OA_iB_i^\infty V_i) = ({}^0O^0A_i{}^0B_i{}^0V_i^\infty)$ pak plyne

$$\frac{1}{(OA_iV_i)} = ({}^0O^0A_i{}^0B_i) = 1 - \lambda_i\,,$$

a odtud

$$1 - \lambda_i = \frac{\overrightarrow{A_iV_i}}{\overrightarrow{OV_i}} = \frac{\overrightarrow{OV_i} - \overrightarrow{OA_i}}{\overrightarrow{OV_i}} = 1 - \frac{\overrightarrow{OA_i}}{\overrightarrow{OV_i}}\,,$$

$i = 2, 3, \ldots, n$. Z předchozí rovnosti pak plyne $\lambda_i = \overrightarrow{OA_i}/\overrightarrow{OV_i}$ a odtud v důsledku $|\overrightarrow{OA_i}| = 1$ je $|\overrightarrow{OV_i}| = 1/|\lambda_i|$ pro $i = 2, 3, \ldots, n$. Poněvadž $K_n^n$ je kartézská konfigurace, musí být $V_iV_j = \sqrt{((1/\lambda_i^2) + (1/\lambda_j^2))}$ a z podobnosti simplexů $S^{n-1} \sim {}^0S^{n-1}$ plyne existence čísla $k > 0$ takového, že ${}^0B_i{}^0B_j = k\sqrt{((1/\lambda_i^2) + (1/\lambda_j^2))}$, $i \neq j$; $i, j = 2, 3, \ldots, n$. Označíme-li $|\overrightarrow{OS}| = \mu > 0$, je $SV_i = \sqrt{(\mu^2 + (1/\lambda_i^2))}$, $i = 2, 3, \ldots, n$, a v důsledku $S^{n-1} \sim {}^0S^{n-1}$ je tedy ${}^0O{}^0B_i = k\sqrt{(\mu^2 + (1/\lambda_i^2))}$, $i = 2, 3, \ldots, n$.

Nyní dokážeme, že podmínka je postačující. Nechť existují reálná čísla $\mu > 0$, $k > 0$ tak, že

$$(1) \qquad {}^0O{}^0B_i = k\sqrt{(\mu^2 + (1/\lambda_i^2))}$$

$$(2) \qquad {}^0B_i{}^0B_j = k\sqrt{((1/\lambda_i^2) + (1/\lambda_j^2))}\,, \quad i \neq j\,; \quad i, j = 2, 3, \ldots, n\,.$$

Zvolme bod $S \in x_1 = OA_1$ tak, aby $|\overrightarrow{OS}| = \mu$ a sestrojme úběžníky $V_i$ přímek $x_i$ v projektivnostech bodových řad $x_i(O, A_i, B_i^\infty, \ldots) \barwedge {}^0x_i({}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i, \ldots)$, $i = 2, 3, \ldots, n$ (zřejmě je přitom ${}^0B_i$ úběžníkem přímky ${}^0x_i$ v téže projektivnosti). Poněvadž $K_n^n$ je podle předpokladu kartézská konfigurace, nalezneme (analogicky jako v prvé části důkazu) $V_iV_j = \sqrt{((1/\lambda_i^2) + (1/\lambda_j^2))}$, $SV_i = \sqrt{(\mu^2 + (1/\lambda_i^2))}$, $i \neq j$; $i, j = 2, 3, \ldots, n$. Pak v důsledku (1) a (2) platí ${}^0O{}^0B_i = k\,SV_i$, ${}^0B_i{}^0B_j = k\,V_iV_j$ ($k > 0$, $i \neq j$; $i, j = 2, 3, \ldots, n$) a simplexy $S^{n-1}(S, V_2, V_3, \ldots, V_n)$, ${}^0S^{n-1}({}^0O, {}^0B_2, {}^0B_3, \ldots, {}^0B_n)$ sou podobné. Pak v důsledku věty 3 existuje centrální projekce $\mathscr{P}$ (s basí $[S, {}^1\mathsf{E}^{n-1}]$) tak, že $\mathscr{P}K_n^n \cong {}^0\mathsf{D}_n^{n-1}$.

**Věta 5.** *Nechť je dána polyedrická konfigurace* $K_n^n \equiv \{O, A_i, B_i\} \subset \mathsf{E}^n$ *a degenerovaná konfigurace* ${}^0\mathsf{D}_n^m \equiv \{{}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i\} \subset {}^0\mathsf{E}^m$ $(2 \leqq m < n)$. *Pak existuje centrální projekce* $\mathscr{P}$ *v* $\mathsf{E}^n$ *s basí* $[\mathsf{E}^{n-m-1}, {}^1\mathsf{E}^m]$ *a afinita* $\mathscr{A} : {}^0\mathsf{E}^m \to {}^1\mathsf{E}^m$ *s libovolným kladným modulem tak, že* $\mathscr{P}K_n^n = \mathscr{A}{}^0\mathsf{D}_n^m$.

Důkaz. a) Nechť $n > m + 1$. Vzhledem k rozměru konfigurace ${}^0\mathsf{D}_n^m$ musí existovat takové číslo $i$ z posloupnosti $2, 3, \ldots, n - m + 1$, že $L({}^0x_i, {}^0x_{i+1}, \ldots, {}^0x_{m+i-1}) = {}^0\mathsf{E}^m$, kde ${}^0x_i = {}^0O{}^0A_i$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $i = 2$, a tedy ${}^0\mathsf{E}^m = L({}^0x_2, {}^0x_3, \ldots, {}^0x_{m+1})$. Uvažujme konfiguraci $K_{m+1}^{m+1} \equiv \{O, A_i, B_i\}$, která je částí[1]) konfigurace $K_n^n$ a konfiguraci ${}^0\mathsf{D}_{m+1}^m \equiv \{{}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i\}$, která je částí konfigurace ${}^0\mathsf{D}_n^m$. Podle věty 2 existuje v prostoru $\mathsf{E}^{m+1} = L(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})$ $(x_i = OA_i)$ centrální projekce $\bar{\mathscr{P}}$ s basí $[S, {}^1\mathsf{E}^m]$ $(S \in x_1 = OA_1,\ S \neq O)$ a afinita $\mathscr{A} : {}^0\mathsf{E}^m \to {}^1\mathsf{E}^m$ s libovolným kladným modulem tak, že $\bar{\mathscr{P}}K_{m+1}^{m+1} = \mathscr{A}{}^0\mathsf{D}_{m+1}^m = {}^1\mathsf{D}_{m+1}^m \equiv \{{}^1O, {}^1A_i, {}^1B_i\}$.

Sestrojme nejprve v ${}^1\mathsf{E}^m$ konfiguraci $\mathscr{A}{}^0\mathsf{D}_n^m = {}^1\mathsf{D}_n^m \equiv \{{}^1O, {}^1A_i, {}^1B_i\}$ (obsahuje zřejmě ${}^1\mathsf{D}_{m+1}^m$ jako svoji část), zvolme ${}^1\mathsf{E}^m$ za průmětnu centrální projekce $\mathscr{P}$ v $\mathsf{E}^n$ a hledejme střed projekce $\mathscr{P}$ tak, aby $\mathscr{P}K_n^n = {}^1\mathsf{D}_n^m$. Dvojice přímek ${}^1A_{m+\alpha}A_{m+\alpha}$, ${}^1B_{m+\alpha}B_{m+\alpha}$, $\alpha = 2, 3, \ldots, n - m$, jsou tvořeny mimoběžnými přímkami, ležícími

[1]) Konfigurace $K_v^r \equiv \{O, A_i, B_i\}$ je částí konfigurace $K_q^s \equiv \{O, A_i, B_i\}$ $(v < q,\ r \leqq s)$, jestliže obě konfigurace mají společné body $O, A_i, B_i$, $i = 1, 2, \ldots, v$; analogicky pro degenerované konfigurace.

vždy v témž trojrozměrném prostoru s bodem $S$ a lze tedy sestrojit jejich příčky $q_\alpha$ ($\alpha = 2, 3, \ldots, n - m$), procházející bodem $S$. Pro $n - m - 1$ přímek $q_2, q_3, \ldots$ $\ldots, q_{n-m}$ platí (jak se snadno přesvědčíme) $\mathsf{L}(q_2, q_3, \ldots, q_{n-m}) = \mathsf{E}^{n-m-1}$ (kdyby totiž $q_{n-m} \subset \mathsf{L}(q_2, q_3, \ldots, q_{n-m-1})$, pak v důsledku $\mathsf{L}(q_2, q_3, \ldots, q_{n-m-1}) \subset \mathsf{L}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \mathsf{E}^{n-1}$ by též ${}^1A_nA_n \subset \mathsf{E}^{n-1}$ a tedy i $A_n \subset \mathsf{E}^{n-1}$, což je ve sporu s předpokladem o rozměru konfigurace $\mathsf{K}_n^n$; analogicky ani žádná jiná přímka $q_\alpha$ nemůže ležet v prostoru vytvořeném zbývajícími). Vezmeme-li nyní centrální projekci $\mathscr{P}$ v $\mathsf{E}^n$ s basí $[\mathsf{E}^{n-m-1}, {}^1\mathsf{E}^m]$, je nejprve v důsledku $S \subset \mathsf{E}^{n-m-1}$ $\mathscr{P}\mathsf{K}_{m+1}^{m+1} = \overline{\mathscr{P}}\mathsf{K}_{m+1}^{m+1} = {}^1\mathsf{D}_{m+1}^m$. Označíme-li $A_{m+\alpha}^c = {}^1A_{m+\alpha}A_{m+\alpha} \cap q_\alpha$, $B_{m+\alpha}^c = {}^1B_{m+\alpha}B_{m+\alpha} \cap q_\alpha$ ($\alpha = 2, 3, \ldots, n - m$), je $\mathscr{P}A_{m+\alpha} = A_{m+\alpha}^cA_{m+\alpha} \cap {}^1\mathsf{E}^m = {}^1A_{m+\alpha}$, $\mathscr{P}B_{m+\alpha} = B_{m+\alpha}^cB_{m+\alpha} \cap {}^1\mathsf{E}^m = {}^1B_{m+\alpha}$, $\alpha = 2, 3, \ldots, n - m$. Je tedy $\mathscr{P}\mathsf{K}_n^n = {}^1\mathsf{D}_n^m = \mathscr{A}{}^0\mathsf{D}_n^m$.

b) Je-li $n = m + 1$, plyne tvrzení bezprostředně z věty 2.

**Věta 6.** *Nechť je dána kartézská konfigurace* $\mathsf{K}_n^n \equiv \{O, A_i, B_i^\infty\} \subset \mathsf{E}^n$ *a degenerovaná konfigurace* ${}^0\mathsf{D}_n^m \equiv \{{}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i\} \subset {}^0\mathsf{E}^m$ $(2 \leqq m < n)$. *Nechť* ${}^0B_i$ $(i = 2, 3, \ldots, m + 1)$ *jsou vlastní body a nechť* $\mathsf{L}({}^0O{}^0B_2, {}^0O{}^0B_3, \ldots, {}^0O{}^0B_{m+1}) = {}^0\mathsf{E}^m$. *Označme* $\lambda_i = 1 - ({}^0O{}^0A_i{}^0B_i)$, $i = 2, 3, \ldots m + 1$.

*Postačující podmínkou pro existenci centrální projekce* $\mathscr{P}$ *v* $\mathsf{E}^n$ *s basí* $[\mathsf{E}^{n-m-1}, {}^1\mathsf{E}^m]$, *v níž* $\mathscr{P}\mathsf{K}_n^n \cong {}^0\mathsf{D}_n^m$, *je existence reálných čísel* $\mu > 0$, $k > 0$ *takových, že v konfiguraci* ${}^0\mathsf{D}_n^m$ *platí* ${}^0O{}^0B_i = k\sqrt{(\mu^2 + (1/\lambda_i^2))}$, ${}^0B_i{}^0B_j = k\sqrt{((1/\lambda_i^2) + (1/\lambda_j^2))}$, $i \neq j$; $i, j = 2, 3, \ldots, m + 1$.

Důkaz. a) Nechť $n > m + 1$. Uvažujme konfiguraci $\mathsf{K}_{m+1}^{m+1} \equiv \{O, A_i, B_i\}$, která je částí konfigurace $\mathsf{K}_n^n$ a konfiguraci ${}^0\mathsf{D}_{m+1}^m \equiv \{{}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i\}$, která je částí konfigurace ${}^0\mathsf{D}_n^m$. Poněvadž podle předpokladu existují čísla $k > 0$, $\mu > 0$ tak, že ${}^0O{}^0B_i = k\sqrt{(\mu^2 + (1/\lambda_i^2))}$, ${}^0B_i{}^0B_j = k\sqrt{((1/\lambda_i^2) + (1/\lambda_j^2))}$, $i \neq j$; $i, j = 2, 3, \ldots$ $\ldots, m + 1$, lze na konfigurace $\mathsf{K}_{m+1}^{m+1}$ a ${}^0\mathsf{D}_{m+1}^m$ užít větu 4 a v prostoru $\mathsf{E}^{m+1} = \mathsf{L}(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})$ $(x_i = OA_i)$ existuje tedy centrální projekce $\overline{\mathscr{P}}$ s basí $[S, {}^1\mathsf{E}^m]$ $(S \in x_1, S \neq O)$ tak, že ${}^0\mathsf{D}_{m+1}^m \cong \overline{\mathscr{P}}\mathsf{K}_{m+1}^{m+1} = {}^1\mathsf{D}_{m+1}^m \equiv \{{}^1O, {}^1A_i, {}^1B_i\}$. Sestrojme v ${}^1\mathsf{E}^m$ konfiguraci ${}^1\mathsf{D}_n^m \equiv \{{}^1O, {}^1A_i, {}^1B_i\}$ shodnou s ${}^0\mathsf{D}_n^m$ tak, aby obsahovala ${}^1\mathsf{D}_{m+1}^m$ jako svoji část. Analogicky jako v důkazu předchozí věty pak nalezneme, že v centrální projekci $\mathscr{P}$ s basí $[\mathsf{E}^{n-m-1}, {}^1\mathsf{E}^m]$, kde $\mathsf{E}^{n-m-1} = \mathsf{L}(q_2, q_3, \ldots, q_{n-m})$ je prostor vytvořený příčkami $q_\alpha$ mimoběžek ${}^1A_{m+\alpha}A_{m+\alpha}$, ${}^1B_{m+\alpha}B_{m+\alpha}$ ($\alpha = 2, 3, \ldots, n - m$) vedenými bodem $S$, je $\mathscr{P}\mathsf{K}_n^n = {}^1\mathsf{D}_n^m \cong {}^0\mathsf{D}_n^m$.

b) Je-li $n = m + 1$, plyne tvrzení bezprostředně z věty 4.

### *Literatura*


[1] *L. Drs:* Centrální axonometrie v $n$-rozměrném prostoru. Časopis pro pěstování matematiky, *85* (1960), 274—290.

[2] *V. Havel:* O základních větách vícerozměrné centrální axonometrie I, II, III. Matem. fys. časopis SAV, *VII*, 2 — 1957 a *VIII*, 2 — 1958.

[3] *V. Pecina:* K základní větě *n*-rozměrné centrální axonometrie. Časopis pro pěstování matematiky *96* (1971), 81—85.

*Adresa autora:* 461 17 Liberec, Studentská 5 (VŠST).

## Zusammenfassung

## DEGENERIERTE *n*-DIMENSIONALE ZENTRALAXONOMETRIE

VÁCLAV PECINA, Liberec

Im Artikel werden einige Existenztheoreme der degenerierten Zentralaxonometrie gefunden. Gegeben sind notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz der Zentralprojektion $\mathscr{P}$ aus einem Punkt in eine Hyperebene (im $n$-dimensionalen, erweiterten euklidischen Raum $\mathsf{E}^n$ $(n \geqq 3)$), bei der die Projektion der $n$-schenkeligen, $n$-dimensionalen polyedrischen Konfiguration $K_n^n$ mit der gegebenen degenerierten Konfiguration ${}^0D_n^{n-1}$ kongruent ist. Die hinreichenden Bedingungen sind dann für den Fall der Zentralprojektion von dem $(n - m - 1)$-dimensionalem Zentrum im $m$-dimensionalen Unterraum $\mathsf{E}^m$ $(2 \leqq m < n)$ verallgemeinert.