Časopis pro pěstování matematiky

Tomáš Klein
O jednom zovšeobecnení Menelaovej a Cevovej vety

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 98 (1973), No. 1, 22--25

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117785

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1973

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

O JEDNOM ZOVŠEOBECNENÍ MENELAOVEJ A CEVOVEJ VETY

TOMÁŠ KLEIN, Zvolen

(Došlo dňa 27. decembra 1970)

V práci [2] ukázali autori krátky analytický dôkaz Menelaovej a Cevovej vety pre normálny $(n + 1)$-uholník v n-rozmernom priestore. V tomto článku sa pridržíme označenia z [2] a ukážeme jedno zovšeobecnenie obidvoch viet.

Veta 1. *Nech $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ je normálny $(n + 1)$-uholník v euklidovskom priestore $\mathbf{E}_n$ $(n \geqq 2)$. Zvoľme $n + 1$ čísel k_i $(0 \neq k_i \neq 1)$ a zostrojme na stranách uvažovaného $(n + 1)$-uholníka $n + 1$ bodov B_i tak, aby*

$$(A_iA_{i+1}B_i) = k_i\,.^1) \tag{1}$$

Označme V_1 resp. V_2 objem simplexu $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ resp. $B_1B_2 \ldots B_{n+1}$. Potom platí

$$V_2 = \left| \frac{1 - \prod_{i=1}^{n+1} k_i}{\prod_{i=1}^{n+1} (1 - k_i)} \right| . V_1\,. \tag{2}$$

Dôkaz. Body B_i z (1) môžeme vyjadriť v tvare $B_i = \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij}A_j$, kde $c_{ii} = 1/(1 - k_i)$ a $c_{i,i+1} = -k/(1 - k_i)$. Pre objemy V_1, V_2 platí $V_2 = |\det.\,(c_{ij})|\, V_1$.[2]) Ľahko zistíme, že

[1]) Všetky indexy, prebiehajúce vždy prirodzené čísla, budeme dôsledne brať mod $(n + 1)$, pri čom $A_{n+2} \equiv A_1$ a pod.

[2]) Pozri [6] vzťah (5.41) na str. 174.

$$\det.(c_{ij}) = \begin{vmatrix} 1, & \dfrac{-k_1}{1-k_1}, & 0, & \dots, 0, & 0 \\ 1, & \dfrac{1}{1-k_2}, & \dfrac{-k_2}{1-k_2}, & \dots, 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & 0, & 0, & \dots, 0, & \dfrac{1}{1-k_{n+1}} \end{vmatrix} = \frac{1 - \prod_{i=1}^{n+1} k_i}{\prod_{i=1}^{n+1} (1 - k_i)}$$

a tým je veta 1 dokázaná.

Vetu 1 môžeme chápať ako zovšeobecnenie Menelaovej vety z [2].[3]) Platí totiž: ak $k_1 k_2 \dots k_{n+1} = 1$, potom $V_2 = 0$ a body B_i sú lineárne závislé; obrátene ak sú body B_i lineárne závislé potom je $V_2 = 0$ a je $1 - k_1 k_2 \dots k_{n+1} = 0$.

Poznamenajme, že pre normálny $(n + 1)$-uholník $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$ zo vzťahu (2) plynie:

a) Ak body B_i z (1) sú stredmi jeho strán dostaneme pre n párne resp. nepárne, že objem simplexu $B_1 B_2 \dots B_{n+1}$ je $V_2 = V_1/2^n$ resp. $V_2 = 0$, tj. pre n nepárne ležia stredy strán normálneho $(n + 1)$-uholníka v jednej nadrovine.[4])

b) Ak na strane $A_i A_{i+1}$ miesto bodu B_i zvolíme bod B_i^*, pre ktorý platí $(A_i A_{i+1} B_i^*) = k_{j_i}$, kde $k_{j_1} \dots k_{j_i} \dots k_{j_{n+1}}$ je ľubovoľná permutácia čísel k_i z (1), potom simplex $B_1^* B_2^* \dots B_{n+1}^*$ má rovnaký objem ako simplex $B_1 B_2 \dots B_{n+1}$.

c) Ak k bodu B_i zostrojíme bod B_i' symetrický podľa stredu strany $A_i A_{i+1}$ (s deliacim pomerom $1/k_i$), má simplex $B_1' B_2' \dots B_{n+1}'$ rovnaký objem ako simplex $B_1 B_2 \dots$ $\dots B_{n+1}$.

d) Ak na strane $A_i A_{i+1}$ miesto bodu B_i zvolíme bod B_i'' s deliacim pomerom $1/k_{j_i}$, kde $1/k_{j_1} \dots 1/k_{j_i} \dots 1/k_{j_{n+1}}$ je ľubovoľná permutácia čísel $1/k_i$, potom simplex $B_1'' B_2'' \dots B_{n+1}''$ má rovnaký objem ako simplex $B_1 B_2 \dots B_{n+1}$.

V normálnom $(n + 1)$-uholníku $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$ bodmi

$$A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, B_i, A_{i+2}, \dots, A_{n+1}$$

prechádza práve jedna nadrovina, označme ju v_i. Položme

$$K_1 = 1 - k_1 + k_1 k_2 - \dots + (-1)^n k_1 \dots k_n \,; \quad cycl. \tag{3}$$

Jednoduchou úvahou (pozri [2]) sa dá dokázať, že nadroviny $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$ s vý-

---

[3]) O Menelaovej vete pozri tiež [1], [3], [4], [7]; podrobná citácia ďalších prác je v [2].

[4]) Pozri vetu 1 v [5].

nimkou nadroviny v_i majú spoločný bod Q_i práve vtedy, ak $K_i \neq 0$; pri $K_i = 0$ má týchto n nadrovín spoločný smer. Podobne ako v [2] zistíme, že pri $K_i \neq 0$ je

$$(4) \qquad Q_1 = \frac{1}{K_1}\left[A_1 - k_1A_2 + \ldots + (-1)^n k_1 \ldots k_nA_{n+1}\right]; \quad cycl.$$

Veta 2. *Nech $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ je normálny $(n+1)$-uholník v $\mathbf{E}_n$. Zvoľme opäť $n+1$ čísel k_i tak, aby každé z $n+1$ čísel K_i v (3) bolo nenulové. Označme V_1 resp. V_3 objem simplexu $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ resp. $Q_1Q_2 \ldots Q_{n+1}$. Potom platí*

$$V_3 = \left|\frac{\left[1 + (-1)^n \prod_{i=1}^{n+1} k_i\right]^n}{\prod_{i=1}^{n+1} K_i}\right| . V_1 .$$

Dôkaz. Vyjdeme opäť z rovníc $Q_i = \sum_{j=1}^{n+1} d_{ij}A_j$, $V_3 = |\text{det.}(d_{ij})| V_1$. Vzhľadom k (4) môžeme písať

$$\text{det.}(d_{ij}) = \frac{1}{K_1K_2 \ldots K_{n+1}} \begin{vmatrix} 1, & -k_1, & \ldots, & (-1)^n k_1k_2 \ldots k_n \\ (-1)^n k_2 \ldots k_{n+1}, & 1, & \ldots, & (-1)^{n-1} k_2 \ldots k_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -k_{n+1}, & k_{n+1}k_1, & \ldots, & 1 \end{vmatrix} .$$

Matematickou indukciou sa dá dokázať, že

$$\text{det.}(d_{ij}) = \frac{\left[1 + (-1)^n k_1k_2 \ldots k_{n+1}\right]^n}{K_1K_2 \ldots K_{n+1}} .$$

Vetu 2 môžeme ponímať ako zovšeobecnenie Cevovej vety z [2]. Pretože, ak predpokladáme, že $k_1k_2 \ldots k_{n+1} = (-1)^{n+1}$, potom podľa (4) ľahko zistíme, že všetky body Q_i splývajú. A naopak, ak všetky nadroviny v_i majú spoločný bod, tj. ak $Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_{n+1}$ potom $V_3 = 0$ a teda aj $1 + (-1)^n k_1k_2 \ldots k_{n+1} = 0$. Je teda Cevova veta špeciálnym prípadom vety 2.

Za podnet k tejto práci ďakujem autorovi prace [1].

Literatúra

[1] *Budinský B.:* Sätze von Menelaos und Ceva für Vielecke im sphärischen n-dimensionalen Raum, Čas. pěst. mat. *97* (1972), 78—85.

[2] *Budinský B., Nádeník Z.:* Mehrdimensionales Analogon zu den Sätzen von Menelaos und Ceva, Čas. pěst. mat. *97* (1972), 75—77.

[3] *Nádeník Z.:* Rozšíření věty Menelaovy a Cevovy na n-dimensionální útvary, Čas. pěst. mat. *81* (1956), 1—25.
[4] *Nádeník Z.:* Několik vlastností vrcholových nadrovin normálního mnohoúhelníka, Čas. pěst. mat. *81* (1956), 287—291.
[5] *Nádeník Z.:* O ortocentru normálního mnohoúhelníka, Čas. pěst. mat. *81* (1956), 292—298.
[6] *Розенфельд Б. А.:* Многомерные пространства. Наука Москва, 1966.
[7] *Sasayama H.:* General coordinate of the geometries VI, Yournal of spatial mathematics of the Sasayama researeli room. Japan, *3* (1960), 125—134.

Adresa autora: 960 53 Zvolen, Štúrova 4 (Vysoká škola lesnícka a drevárska).

Zusammenfassung

ÜBER EINE VERALLGEMEINERUNG DER SÄTZE VON MENELAOS UND CEVA

TOMÁŠ KLEIN, Zvolen

In der vorliegenden Arbeit ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Menelaos im n-dimensionalen Euklidischen Raum $\mathbf{E}_n$ (wenn alle Punkte B_i, für die (1) gilt, nicht in einer Hyperebene liegen) und eine Verallgemeinerung des Satzes von Ceva in $\mathbf{E}_n$ (wenn alle Hyperebenen v_i nicht durch einen Punkt gehen und keine gemeinsame Richtung haben) gezeigt.