Časopis pro pěstování matematiky

David Preiss

Poznámka k jednomu problému K. Kartáka

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 98 (1973), No. 1, 101--102

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117782`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

ÚLOHY A PROBLÉMY

# POZNÁMKA K JEDNOMU PROBLÉMU K. KARTÁKA

K. KARTÁK položil v [1] následující problém:

*Buď f konečná funkce na* $\langle 0, 1\rangle$ *a nechť* $N = \{t, f(t) > 0\}$ *má Lebesgueovu míru nula. Rozhodněte, zda ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje taková newtonovsky integrovatelná funkce g na* $\langle 0, 1\rangle$, *že* $g \geqq f$ *a* $\int_0^1 g < \varepsilon$.

Následující příklad ukazuje, že se může stát dokonce i v případě, když $N$ je spočetná množina, že taková funkce $g$ neexistuje.

Příklad. Je-li $x = (2k + 1) . 2^{-n}$, $(n = 1, 2, \ldots; k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1} - 1)$, položme $f(x) = n$; není-li $x$ uvedeného tvaru, položme $f(x) = 0$. Ukažme, že vůbec neexistuje newtonovsky integrovatelná funkce $g$ na $\langle 0, 1\rangle$, tak, aby $g \geqq f$. Kdyby totiž taková funkce existovala, byla by nutně funkcí první třídy na $\langle 0, 1\rangle$, a tedy pro každé přirozené $n$ by $\{x \in \langle 0, 1\rangle; g(x) \geqq n\}$ byla typu $G_\delta$ (viz [2]). Z nerovnosti $g \geqq f$ snadno zjistíme, že tato množina by byla též hustá v $\langle 0, 1\rangle$, a tedy $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \langle 0, 1\rangle; g(x) \geqq n\}$ by byla neprázdná množina (viz [2]). Snadno ovšem zjistíme, že pro $x \in G$ je $g(x) = +\infty$, což je spor.

Vzniká otázka, jaká je nutná a postačující podmínka na funkci $f$, aby problém měl již řešení. Abychom odpověděli na tuto otázku, musíme nejdříve mít možnost, jak sestrojit funkce (pokud možno s „hodně" body nespojitosti), které mají Newtonův integrál. Uspokojivé řešení tohoto problému podal Z. ZAHORSKI v práci [3], kde dokázal, kromě jiného, následující tvrzení. (Na citovanou práci Z. Zahorského lze též odkázat čtenáře, který by měl zájem o podrobnější informace o funkcích majících primitivní funkci).

**Lemma.** *Nechť* $H \subset E_1$ *je* $G_\delta$ *množina a nechť* $G \subset E_1$ *je taková otevřená množina, že* $G \supset H$. *Pak existuje taková funkce g definovaná na* $E_1$, *že platí*

(a) $g(x) = 0$ *pro* $x \notin G$,
(b) $g(x) = 1$ *pro* $x \in H$,
(c) $0 < g(x) < 1$ *pro* $x \in G \setminus H$,
(d) $g(x)$ *má Lebesgueův i Newtonův integrál na libovolném omezeném intervalu.*

Pomocí tohoto tvrzení nyní snadno dokážeme následující větu.

**Věta.** *Nechť $f$ je libovolná funkce definovaná na $\langle 0, 1\rangle$, nechť $f = 0$ s.v. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) *Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje newtonovsky integrovatelná funkce $g$ na $\langle 0, 1\rangle$, $g \geqq f$ tak, že $\int_0^1 g < \varepsilon$.*

(ii) *Existuje konečná funkce $\varphi$ první třídy na $\langle 0, 1\rangle$ taková, že $\varphi \geqq f$.*

Důkaz. Implikace (i) $\Rightarrow$ (ii) je zřejmá, neboť funkce mající Newtonův integrál je první třídy. Dokažme, že (ii) $\Rightarrow$ (i). Nechť $\varphi$ je konečná funkce první třídy taková, že $\varphi \geqq f$. Položme $H_n = f^{-1}((n - 1, n\rangle)$ pro $n$ přirozená a nechť $F_m^k$ ($m$, $k$ přirozená) jsou takové uzavřené množiny, že $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_m^k = \varphi^{-1}((-\infty, m))$. Buď $\Phi_n = \bigcup_{\substack{m<n\\k<n}} F_m^k$. Pak $\Phi_n$ je uzavřená množina, $\Phi_n \cap H_n = \emptyset$ a množina $H_n$ má míru nula. Z toho lze snadno dokázat, že existuje otevřená množina $G_n$ tak, že $\Phi_n \cap G_n = \emptyset$, $G_n \supset H_n$ a $\mu(G_n \cap (x, x_0)) \leqq (\varepsilon/n \cdot 2^n)(x - x_0)^2$ pro všechna $x_0 \in \Phi_n$ ($\mu$ značí Lebesgueovu míru a pokládáme $(x, x_0) = (x_0, x)$ pro $x > x_0$).

Podle lemmatu nyní zvolme funkce $g_n$ tak, že

(a) $g_n(x) = 0$ pro $x \notin G_n$,
(b) $g_n(x) = 1$ pro $x \in H_n$,
(c) $0 < g_n(x) \leqq 1$ pro $x \in G_n \setminus H_n$,
(d) $g_n$ má Lebesgueův i Newtonův integrál na libovolném omezeném intervalu.

Položme $g = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot g_n$. Buď $G_n(x) = n \int_0^x g_n(t)\,dt$ a buď $G = \sum_{n=1}^{\infty} G_n$. Z vlastností Lebesgueova integrálu ihned plyne, že $G$ je neurčitým Lebesgueovým integrálem funkce $g$. Je-li $x_0 \in \langle 0, 1\rangle$, existuje takové přirozené $n_0$, že $x_0 \in \Phi_n$ pro všechna $n \geqq n_0$. Pak

$$\left| \int_{x_0}^{x} \sum_{n=n_0}^{\infty} n g_n(t)\,dt \right| = \left| \sum_{n=n_0}^{\infty} n \int_{x_0}^{x} g_n(t)\,dt \right| \leqq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n}(x - x_0)^2 \leqq \varepsilon(x - x_0)^2 ,$$

a tedy $\left(\sum_{n=n_0}^{\infty} G_n\right)'(x_0) = 0 = \sum_{n=n_0}^{\infty} n g_n(x_0)$. Jelikož $G_n' = n g_n$, plyne z toho, že $G' = g$. Jelikož $g$ je všude konečná, je tvrzení dokázáno.

*Literatura*


[1] *K. Karták:* Úlohy a problémy, Čas. pěst. mat. *91* (1966), str. 104.
[2] *E. Čech:* Bodové množiny, Praha 1966.
[3] *Z. Zahorski:* Sur la première dérivée, Trans. Amer. Math. Soc., *69* (1950) 1—54.


*David Preiss,* Praha