Úlohy a problémy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 97 (1972), No. 2, 207--209

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117755

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

ÚLOHY A PROBLÉMY

K úloze č. 4, kterou položil I. Babuška v Čas. pro pěst. mat. *79* (1954); úloha byla znovu přetištěna v Čas. pro pěst. mat. *89* (1964), str. 103.

Formulace úlohy: *Buď C jednoduchá rovinná křivka konečné délky a D její vnitřek (komplement). Budiž $t_0 \in C$. Utvořme funkci $\vartheta(z, t)$, kde z probíhá množinu D a t množinu $(C - t_0)$ tak, aby $\vartheta(z, t)$ bylo úhlem mezi kladným směrem osy x a vektorem $\vec{zt}$ a aby funkce ϑ byla spojitá. Budiž $F(z) = \int_C |\mathrm{d}_t \vartheta(z, t)|$. (Funkce F je zřejmě spojitá na D a nezávisí na volbě funkce ϑ.) Dokažte (přesně a pokud možno jednoduše) nějakou nutnou a postačující podmínku, aby funkce F byla omezená.* (Viz J. Radon, Sitzungsberichte d. Akad. d. Wiss., Wien, Math. Naturw. Kl. 128, Abt. 2a, IIa, 1123; 1919.)

Řešení úlohy je dáno následující větou:

Označme pro $\zeta \in C$ a $\alpha \in (0, 2\pi)$ symbolem $\mu(\zeta, \alpha)$ počet průsečíků křivky C s polopřímkou $\{\zeta + re^{i\alpha}; r > 0\}$ a položme $v(\zeta) = \int_0^{2\pi} \mu(\zeta, \alpha)\, \mathrm{d}\alpha$. Je-li výše definovaná funkce F omezená na některé z komplementárních oblastí křivky C, pak

$$\sup_{\zeta \in C} v(\zeta) < \infty \,. \tag{1}$$

Naopak, platí-li (1), pak F je omezená na komplementu křivky C.

Důkaz tohoto tvrzení plyne z vět 1.11 a 2.7 článku [1]; viz též [3] a Corollary a Remark 4 na str. 7 ve sdělení [2].

[1] *J. Král:* On the logarithmic potential of the double distribution, Czech. Math. Journal *14* (*89*) 1964, 306–321.

[2] *J. Král:* On cyclic and radial variations of a plane path, Comment. Math. Univ. Carolinae *4* (1963), No 1, 3–9.

[3] *J. Král:* On the logarithmic potential, Comment. Math. Univ. Carolinae *3* (1962), No 1, 3–10.

Poznámka. Zvolme pevně komplementární oblast D jednoduché uzavřené křivky C a každé spojité funkci f na C přiřaďme funkci Wf na D předpisem

$$Wf(z) = \mathrm{Im} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta = \int_C f(t)\, \mathrm{d}_t \vartheta(z, t)\,.$$

Z věty 2.10 v [1] (viz též věty 3 a 4 v [3]) plyne, že (1) je nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby pro každou spojitou f na C byla funkce Wf omezená (resp. stejnoměrně spojitá) na D.

Buď nyní $\gamma \in (0, 1)$ a označme pro každou neprázdnou množinu M v rovině symbolem $C_\gamma(M)$ třídu všech funkcí f, které na M splňují Hölderovu podmínku s exponentem γ, tj. existuje konstanta m_f tak, že

$$(u, v \in M) \Rightarrow (|f(u) - f(v)| \leqq m_f |u - v|^\gamma).$$

Lze dokázat, že za předpokladu (1) platí implikace

$$f \in C_\gamma(C) \Rightarrow Wf \in C_\gamma(D). \tag{2}$$

Nyní přirozeně vzniká následující

Úloha. Nalezněte jednoduchou a geometricky názornou nutnou a postačující podmínku na křivku C, která by zaručovala platnost implikace (2).

Josef Král, Praha

Řešení úlohy č. 5 (autor Jan Mařík) z roč. *82* (1957), str. 365

Úloha: *Buď G otevřená množina v m-rozměrném Euklidově prostoru E_m, $\emptyset \neq G \neq E_m$; buď f spojitá funkce na hranici H množiny G. Je-li funkce F spojitá na $G \cup H$, harmonická na G a rovna f na H, nazveme funkci F řešením Dirichletovy úlohy příslušné k funkci f a množině G. Rozhodněte, zda platí tato věta: Nechť ke každé omezené spojité funkci na množině H existuje omezené řešení příslušné Dirichletovy úlohy. Potom ke každé nezáporné omezené spojité funkci na množině H existuje nezáporné řešení příslušné Dirichletovy úlohy.*

Při řešení této úlohy budeme užívat výsledků práce

[M] *J. Mařík*: Dirichletova úloha, Čas. pro pěst. mat. *82* (1957), 257–282.

Je-li $m = 2$, tvrzení uvedené věty platí. Plyne to např. ze cvičení 11 v [M].

Nechť je $m > 2$. Ukážeme, že uvedená věta neplatí. Stejně jako v [M] označme $\mathfrak{G}$ systém všech regulárních množin v E_m.

Označme $G_1 = \{x \in E_m; |x| > 1\}$ (vnějšek koule) a buď H_1 hranice množiny G_1. Zřejmě je $G_1 \in \mathfrak{G}$. Jestliže f_1 je spojitá funkce na H_1, sestrojme podle odst. 16 v [M] omezené řešení Dirichletovy úlohy příslušné k funkci f_1 a množině G_1. Hodnotu tohoto řešení v bodě $x \in G_1 \cup H_1$ označme $D(G_1, f_1, x)$.

Zvolme nyní $c \in G_1$ a označme $G = G_1 - \{c\}$, $H = H_1 \cup \{c\}$. Potom je zřejmě H hranicí množiny G. Pro $x \in E_m - \{0\}$ položme

$$h(x) = |x|^{2-m} - 1.$$

Předpokládejme, že f je spojitá funkce na H a buď f_1 restrikce funkce f na množinu H_1. Pro $x \in H \cup G$ položme

$$F(x) = D(G_1, f_1, x) + (f(c) - D(G_1, f_1, c))\, h(x)/h(c)\,.$$

Potom je, jak snadno zjistíme, funkce F omezeným řešením Dirichletovy úlohy příslušné k funkci f a množině G.

Vidíme, že ke každé omezené spojité funkci na množině H existuje omezené řešení příslušné Dirichletovy úlohy.

Kdyby ke každé nezáporné omezené spojité funkci existovalo nezáporné řešení příslušné Dirichletovy úlohy, platilo by $G \in \mathfrak{G}$ podle věty 11 v [M]. Podle věty 15 v [M] však není $G \in \mathfrak{G}$.

Dokázali jsme, že věta vyslovená v úloze neplatí.

Poznamenejme, že snadno lze přímo sestrojit nezápornou omezenou spojitou funkci na H, pro niž neexistuje nezáporné řešení příslušné Dirichletovy úlohy. Nechť k je nezáporná spojitá funkce na H, která není identicky rovna nule a nechť je $k(c) = 0$. Kdyby existovalo nezáporné řešení K Dirichletovy úlohy příslušné k funkci k a množině G, byla by funkce K harmonická v G_1 podle známé věty o odstranitelné singularitě harmonických funkcí. Protože potom je K nezáporná harmonická funkce v G_1 a $K(c) = 0$, je funkce K identicky rovna nule v G_1 a tedy funkce k je identicky rovna nule na H, což je spor s předpokladem.

Ivan Netuka, Praha