Časopis pro pěstování matematiky

Bruno Budinský

Zum Petrschen Satz

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 97 (1972), No. 1, 72--74

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117751

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

ZUM PETRSCHEN SATZ[1])

BRUNO BUDINSKÝ, Praha

(Eingegangen am 29. Mai 1970)

K. PETR [3][2]) hat diesen Satz[3]) hergeleitet:

Es sei $A_1A_2 \ldots A_n$ *ein ebenes n-Eck und*

(1) $$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$$

eine beliebige Permutation der Zahlen

$$2\pi/n,\ 2\,.\,2\pi/n,\ 3\,.\,2\pi/n,\ \ldots,\ (n-1)\,.\,2\pi/n\,.$$

Auf jeder Seite A_iA_{i+1} $(i = 1, \ldots, n;\ A_{n+1} = A_1)$ *als Grundlinie konstruiere man das gleichschenkelige Dreieck* $A_iA_{i+1}A'_i$ *mit dem im positiven Sinn gemessenen Winkel* $A^1_i = \alpha_1$. *Auf den Seiten des neuen n-Ecks* $A'_1A'_2 \ldots A'_n$ *konstruiere man*

---

[1]) Unter diesem Stichwort ist das Theorem in [2], Band II, S. 331 angeführt.

[2]) Siehe auch [4]; mitgeteilt aus [3].

[3]) Für ein Dreieck hat den Satz schon J. Langer [1] gefunden: *Schließt man an jede Seite eines beliebigen Dreiecks ABC die gleichschenkeligen Dreiecke ABC′, BCA′, CAB′ mit den Winkeln* $A' = B' = C' = 2\pi/3$ *an (und zwar alle drei außen von ABC oder umgekehrt), so ist das Dreieck A′B′C′ gleichseitig.* Der ursprüngliche Beweis von J. LANGER läßt sich beträchtlich verkürzen. Offensichtlich $2A' = [B + C + k\{C - B\}^*]$ mit $3k = \pm\sqrt{3}$; das Symbol $\{\ldots\}^*$ bedeutet die Drehung (z. B. im positiven Sinn) des in den Klammern stehenden Vektors um den Winkel $\pi/2$. Durch zyklische Vertauschung erhält man die Ausdrücke für B' und C'. Dann kann man schreiben $2(A' - B') = -A + B + k\{-A - B + 2C\}^*$ und $2(A' + B' - 2C') = -A - B + 2C + 3k\{A - B\}^*$. Daraus ergibt sich $(A' - B').\,[(A' - C') + (B' - C')] = 0$ und durch zyklische Vertauschung folgen noch zwei ähnliche Gleichungen. Sie bedeuten, daß im Dreieck $A'B'C'$ jede Höhe mit der Schwerlinie züsammenfällt. Folglich ist $A'B'C'$ gleichseitig.

Auf ähliche Weise kann man dieses Analogon zum Satz von J. Langer beweisen: *Auf den Höhen des Dreiecks ABC, welche fortschreitend durch A, B, C gehen, wählen wir die Punkte A′, B′, C′ derart, daß* $AA' : BC = BB' : CA = CC' : AB = 1 : \sqrt{3}$ *und daß alle Halbgeraden AA′, BB′, CC′ zugleich die zugehörigen (bzw. verlängerten) Seiten des Dreiecks ABC entweder schneiden oder nicht schneiden. Dann ist das Dreieck A′B′C′ gleichseitig.*

Meines Wissens gibt es kein einfaches Seitenstück zum Satz von J. Langer, welches ein Vierflach oder in räumliches Viereck betrifft. Deshalb ist das obengeführte Theorem von K. Petr, das eine elegante Verallgemeinerung des Satzes von J. Langer darstellt, wirklich überraschend.

wieder genau so wie vorher gleichschenkelige Dreiecke, indem man statt α_1 *den Winkel* α_2 *benutzt; so erhält man ein weiteres n-Eck* $A_1^2 A_2^2 \dots A_n^2$. *Auf diese Weise entstehen aus dem ursprünglichen n-Eck* $A_1 A_2 \dots A_n$ *unter Verwendung der Folge* (1) *insgesamt* $n - 1$ *neue n-Ecke.*

Dann ist das vorletzte n-Eck $A_1^{n-2} A_2^{n-2} \dots A_n^{n-2}$ *regelmäßig*[4]) *und das letzte n-Eck* $A_1^{n-1} A_2^{n-1} \dots A_n^{n-1}$ *reduziert sich auf einen Punkt.*

Fußend auf den komplexen Zahlen, was nur scheinbar wesentlich ist, hat K. Petr den Beweis rein algebraisch geführt. Wir beweisen seinen Satz, indem wir ein mehr geometrisches Verfahren anwenden. Zum Schluß fügen wir eine Bemerkung betreffs der Isoperimetrie bei.

Es bezeichne $\boldsymbol{x}$ einen beliebigen Vektor in der Ebene ϱ des betrachteten n-Ecks. Weiter sei F_i die Abbildung, welche jeden Vektor $\boldsymbol{x}$ im positiven Sinn in ϱ um den Winkel α_i aus (1) „umdreht"; endlich sei F_0 die identische Abbildung. Die Summe $F_i + F_j$ und das Produkt $F_i F_j$ definieren wir auf übliche Weise: $(F_i + F_j)\,\boldsymbol{x} = F_i\boldsymbol{x} + F_j\boldsymbol{x}$, $(F_i F_j)\,\boldsymbol{x} = F_i(F_j\boldsymbol{x})$.

Wegen $F_1\overrightarrow{A_1^1 A_1} = \overrightarrow{A_1^1 A_2}$ ergibt sich leicht $(F_1 - F_0)\,\overrightarrow{A_1^1 A_1} = \overrightarrow{A_1 A_2}$. Also auch $(F_1 - F_0)\,\overrightarrow{A_2^1 A_2} = \overrightarrow{A_2 A_3}$. Da freilich $\overrightarrow{A_1^1 A_2^1} = \overrightarrow{A_1^1 A_2} - \overrightarrow{A_2^1 A_2}$, ist $(F_1 - F_0)\,\overrightarrow{A_1^1 A_2^1} = F_1\overrightarrow{A_1 A_2} - \overrightarrow{A_2 A_3}$. Die Induktion liefert für $i = 1, \dots, n-1$:

$$(2) \qquad (F_i - F_0)(F_{i-1} - F_0)\dots(F_1 - F_0)\,\overrightarrow{A_1^i A_2^i} = \\ = G_{i1}\overrightarrow{A_1 A_2} + G_{i2}\overrightarrow{A_2 A_3} + \dots + G_{i2}\overrightarrow{A_i A_{i+1}} + (-1)^i\,\overrightarrow{A_{i+1} A_{i+2}}\,,$$

wo G_{ik} die mit $(-1)^{k-1}$ multiplizierte $(i - k + 1)$-te elementarsymmetrische Funktion von $F_1, \dots, F_i$ ist; $k = 1, \dots, i$.

Die Endpunkte der in einem Punkt T gefundenen Vektoren $F_0\boldsymbol{x}, F_1\boldsymbol{x}, \dots, F_{n-1}\boldsymbol{x}$ bilden – infolge der Wahl der Zahlen (1) – ein regelmäßiges n-Eck mit dem Schwerpunkt T. Dementsprechend ist $O = F_0 + F_1 + \dots + F_{n-1}$ die Abbildung, in der $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}$. Ähnlich ergibt sich, daß $F_0^j + F_1^j + \dots + F_{n-1}^j = O$ für $j = 1, \dots, n-1$. Infolgedessen

$$G_{n-1,n-1} = (-1)^n\,[(F_0 + F_1 + \dots + F_{n-1})] - F_0 = (-1)^{n+1}\,F_0\,;$$

$$G_{n-1,n-2} = (-1)^{n-1}\,[\tfrac{1}{2}F_1(F_0 + F_1 + \dots + F_{n-1}) + \\ + \tfrac{1}{2}F_{n-1}(F_0 + F_1 + \dots + F_{n-1}) - \tfrac{1}{2}(F_0^2 + F_1^2 + \dots + F_{n-1}^2) - \\ - \tfrac{1}{2}F_0(F_0 + F_1 + \dots + F_{n-1}) + F_0^2] = (-1)^{n+1}\,F_0\,;$$

im ganzen, wie auf Grund der Induktion leicht zu beweisen ist, $G_{n-1,n-1} = G_{n-1,n-2} = \dots = G_{n-1,1} = (-1)^{n+1}\,G_0$.

Folglich ergibt sich aus (2) für $i = n - 1$, daß $(F_{n-1} - F_0)\,(F_{n-2} - F_0)\dots$

---

[4]) Aber nicht notwendig konvex. Es kann sich auch auf einen Punkt reduzieren. Das kann übrigens für beliebiges der n – 3 voraustehenden n-Ecke der Fall sein.

$\dots (F_1 - F_0) \overrightarrow{A_1^{n-1} A_2^{n-1}} = \mathbf{0}$. Also $\overrightarrow{A_1^{n-1} A_2^{n-1}} = \mathbf{0}$. Deshalb reduziert sich das letzte n-Eck $A_2^{n-1} A_2^{n-1} \dots A_n^{n-1}$ auf einen Punkt – und zwar offensichtlich auf den Schwerpunkt T des ursprünglichen n-Ecks $A_1 A_2 \dots A_n$. Da die Dreiecke $A_1^{n-2} T A_2^{n-2}$, $A_2^{n-2} T A_3^{n-2}, \dots, A_n^{n-2} T A_1^{n-2}$ gleichschenkelig sind und da noch ihre Winkel bei T gleich sind, so ist das n-Eck $A_1^{n-2} A_2^{n-2} \dots A_n^{n-2}$ regelmäßig.

Es sei L der Umfang und F der Flächeninhalt eines ebenen konvexen Bereiches. Die nichtnegative Zahl $L^2/4\pi - F$ ist das wohlbekannte *isoperimetrische Defizit*. Um die unwesentlichen Ähnlichkeitstransformationen auszuschalten, führen wir die Zahl $D = L^2/F$ ein. Angenommen, das ursprüngliche, das erste, zweite, ..., $(n - 2)$-te n-Eck aus dem Satz von K. Petr seien konvex. Es sollen $D_0, D_1, D_2, \dots, D_{n-2}$ die Zahlen D für diese n-Ecke bezeichnen. Z. Nádeník hat die Vermutung ausgesprochen, daß $D_0 \geqq D_1 \geqq D_2 \geqq \dots \geqq D_{n-2}$. Ist das der Fall, so ergibt sich daraus die isoperimetrische Ungleichung für konvexe Polygone.

Literatur

[1] *J. Langer:* O jisté úloze v trojúhelníku. Čas. pro pěst. mat. a fys., roč. *XXXIV*, 1905, 65–72.

[2] *J. Naas - H. L. Schmid:* Mathematisches Wörterbuch, Berlin–Leipzig 1967.

[3] *K. Petr:* O jedné větě pro mnohoúhelníky. Čas. pro pěst. mat. a fys., roč. *XXXIV*, 1905, 166–172.

[4] *K. Petr:* Ein Satz über Vielecke. Arch. Math. Phys. III. Ser. 13 (1908), 29–31.

Anschrift des Verfassers: Praha 2, Trojanova 13 (České vysoké učení technické).