Časopis pro pěstování matematiky

Jozef Oboňa; Nikolaj Podtjagin
O niektorých ďalšich vlastnostiach kriviek triedy P

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 96 (1971), No. 4, 398--405

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117738`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

O NIEKTORÝCH ĎALŠICH VLASTNOSTIACH KRIVIEK TRIEDY P

JOZEF OBOŇA, NIKOLAJ PODTJAGIN, Bratislava

(Došlo dňa 2. apríla 1970)

V tejto práci sa uvádzajú niektoré ďalšie vlastnosti kriviek triedy P, definované v práci [1]. Tieto vlastnosti sa odvodzujú z rovníc dotyčnic k týmto krivkám.

V práci [1] krivky triedy P boli definované rovnicami

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= \mathrm{a} \, . \cos q\omega + b \, . \cos (p + q) \, \omega \\ y &= \mathrm{a} \, . \sin q\omega + b \, . \sin (p + q) \, \omega \end{aligned}$$

kde ω je parameter, meniaci sa v intervale $[0, 2\pi)$, konštanty p, q sú celé nesúdeliteľné čísla, ani jedna z konštant a, b, p, q nie je rovná nule, pritom a, b, q sú čísla kladné.

V spomenutej práci bolo ďalej dokázané, že pre $\mathrm{a}q + \mathrm{b}(p + q) = 0$ rovnice (1) určujú prostú hypocykloidu a pre $\mathrm{a}q - \mathrm{b}(p + q) = 0$ prostú epicykloidu; pre $\mathrm{a} = \mathrm{b}$ a $p + 2q \neq 0$ určujú ružicu; pre $\mathrm{a} = \mathrm{b}$, $p + 2q = 0$ úsečku na osi OX, dĺžky 4a so stredom v počiatku súradnicovej sústavy, ktorú nepokladáme za krivku triedy P a teda pre $\mathrm{a} = \mathrm{b}$ žiadame $p + 2q \neq 0$.

V práci [1] bolo dokázané, že každá krivka triedy P má $|p|$ bodov vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť a + b, ktoré odpovedajú hodnotám parametru

$$(2) \qquad \omega = \frac{2k\pi}{|p|}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, |p| - 1$$

a $|p|$ bodov, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť $|\mathrm{a} - \mathrm{b}|$, ktoré odpovedajú hodnotám parametru

$$(3) \qquad \omega = \frac{(2k + 1)\,\pi}{|p|}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, |p| - 1 \, .$$

Pre $\mathrm{a}q - \mathrm{b}(p + q) = 0$, tj. u prostých epicykloid, body vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na $|\mathrm{a} - \mathrm{b}|$ sú singulárne body (body zvratu).

Pre $\mathrm{a}q + \mathrm{b}(p + q) = 0$, tj. u prostých hypocykloid, body vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť a + b sú tiež singulárne body (body zvratu).

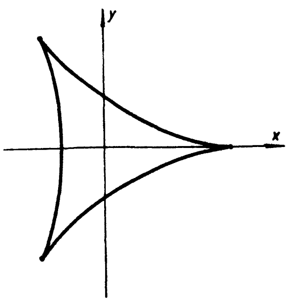
Všetky krivky triedy P sú súmerné vzhľadom na os OX. Ak konštanta $|p|$ je párne číslo, tieto krivky sú súmerné (aj vzhľadom na os OY).

Pre smernicu dotýčnice krivky triedy P v jej ľubovoľnom bode (x, y) máme

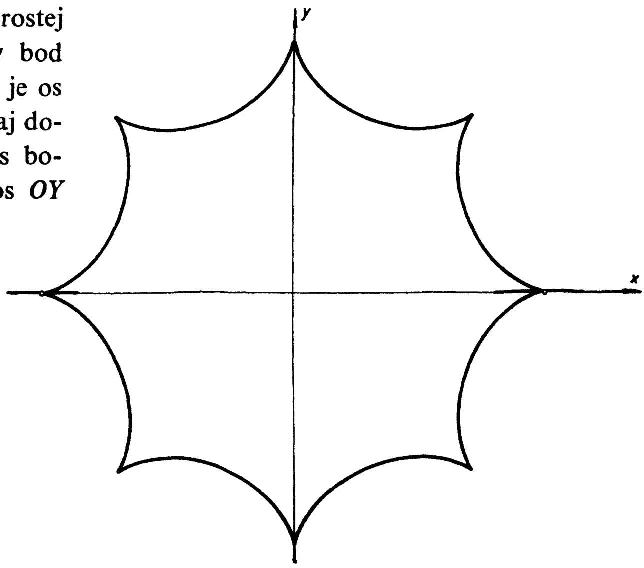
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{a}q \,.\, \cos q\omega + \mathrm{b}(p + q) \cos (p + q)\, \omega}{\mathrm{a}q \,.\, \sin q\omega + \mathrm{b}(p + q) \sin (p + q)\, \omega}\,. \tag{4}$$

Smernica dotýčnice v bode $\omega = 0$ môže byť konečná len pre $\mathrm{a}q + \mathrm{b}(p + q) = 0$. Z toho vyplýva, že dotýčnica ku krivke triedy P v počiatočnom bode $\omega = 0$, okrem prostých hypocykloid je vždy kolmá na os OX.

Počiatočný bod $\omega = 0$ prostej hypocykloidy je singulárny bod zvratu, v ktorom dotýčnica je os OX. Ak $|p|$ je párne číslo, aj dotýčnica v bode súmernom s bodom $\omega = 0$ vzhľadom na os OY je tiež os OX.



Obr. 1.



Obr. 2.

Príklad 1. Na obr. 1 je znázornená prostá hypocykloida, daná rovnicami (1) pre $p = -3$, $q = 2$, $\mathrm{a} = 1{,}6$; $\mathrm{b} = 3{,}3$. Pretože $|p|$ je nepárne číslo, os OX je dotýčnicou len v bode $\omega = 0$.

Príklad 2. Krivka na obr. 2 je tiež prostá hypocykloida pre $p = -8$, $q = 1$, $\mathrm{a} = 8{,}75$, $\mathrm{b} = 1{,}25$. Pretože $|p|$ je párné číslo, os OX dotýčnicou nielen v bode $\omega = 0$, ale aj v bode s nim súmernom podľa OY.

Body, vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť $\mathrm{a} + \mathrm{b}$ sú dané hodnotami (2) parametra ω, pre ktoré máme $\cos p\omega = 1$. Vzťah (4) pre tieto body bude

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{[\mathrm{a}q + \mathrm{b}(p + q)] \cos q\omega}{[\mathrm{a}q + \mathrm{b}(p + q)] \sin q\omega}\,.$$

Nemá zmysel pre prosté hypocykloidy. Pre všetky ostatné krivky triedy P v spomínaných bodoch máme

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos q\omega}{\sin q\omega}.$$

Pre dotýčnice v týchto bodoch dostávame

$$X \cos q \frac{2k\pi}{|p|} + Y \sin q \frac{2k\pi}{|p|} = x \cos q\omega + y \sin q\omega$$

kde X, Y sú premenné súradnice bodov dotýčnice a x, y sú pevné body na krivke triedy P (podobne aj v ďalších úvahách). Po dosadení hodnôt (2) parametra ω, pre dotýčnice v bodoch, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na a + b, pre všetky krivky triedy P, okrem prostých hypocykloid, máme

$$X \cos q \frac{2k\pi}{|p|} + Y \sin q \frac{2k\pi}{|p|} = \mathrm{a} + \mathrm{b}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, |p| - 1\,. \tag{5}$$

Pri $|p|$ nepárnom ani jedna z dotyčníc, okrem dotýčnice v počiatočnom bode $\omega = 0$, nemôže byť kolmá ani na jednu zo súradnicových osí.

Pretože čísla q a $|p|$ nemajú spoločných deliteľov, pri $|p|$ párnom ($|p| = 2k_1$), dotýčnice v spomenutých bodoch sú kolmé na os OX len v tom prípade, keď číslo $t = k/k_1$ je celé. A pretože $k \leqq |p| - 1$, musíme mať

$$t \leqq \frac{2k_1 - 1}{k_1} = 2 - \frac{1}{k_1} < 2$$

a teda t môže mať len dve hodnoty 0 a 1. Z toho plynie, že pri $|p|$ párnom každá krivka triedy P, okrem prostej hypocykloidy, má dva a len dva body, vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na a + b, v ktorých dotýčnice sú kolmé na os OX. Tieto dotýčnice sú dané rovnicami (5). Pretože potom je q nepárne číslo, sú teda dané rovnicami

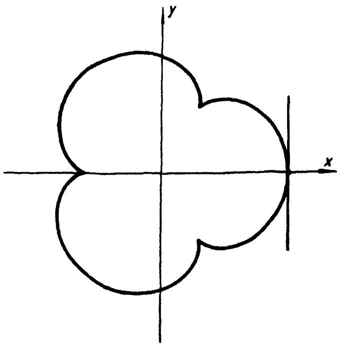
$$X = \pm(\mathrm{a} + \mathrm{b}) \tag{6}$$

Príklad 3. Pre $p = 3$, $q = 1$, a = 4, b = 1 rovnice (1) určujú prostú epicykloidu, znázornenú na obr. 3, vytvorenú rotáciou kruhu o polomere $r = 1$ po obvode pevného kruhu $R = 3$. Pretože p je nepárne číslo, krivka má len jeden bod, vzdialený od počiatku súradnicovej sústavy na a + b = 5 (počiatočný bod $\omega = 0$), v ktorom dotýčnica je kolmá na os OX.

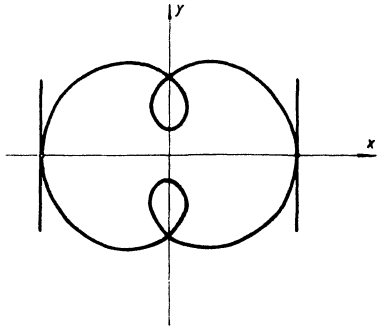
Príklad 4. Krivka na obr. 4 pre $p = -2$, $q = 3$, a = 2, b = 3 podľa (1) je predĺžená hypocykloida. Pretože $|p|$ je párne číslo, krivka má dva body ($x = \pm 5$), vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na a + b = 5, v ktorých dotýčnice ($X = \pm 5$) sú kolmé na os OX.

Ak aj $\frac{1}{2}|p|$ je párne číslo ($|p| = 4k_1$), dotyčnica v bode, vzdialenom od počiatku súradnicovej sústavy na a + b, je kolmá na os OY vtedy a len vtedy, keď $t = k/k_1$ je celé nepárne číslo. Pretože $k \leqq |p| - 1$, musíme mať

$$t \leqq \frac{4k_1 - 1}{k_1} = 4 - \frac{1}{k_1} < 4$$



Obr. 3.



Obr. 4.

odkiaľ teda t môže mať len hodnoty 1 a 3. Z toho plynie, že pre $\frac{1}{2}|p|$ párne, každá krivka triedy P, okrem prostých hypocykloíd má aj dva body, vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na a + b, v ktorých dotyčnice sú kolmé na os OY. Sú dané rovnicami (5) pre $k = k_1$ a $k = 3k_1$, tj. rovnicami

$$(7) \qquad Y = \pm(\mathrm{a} + \mathrm{b})$$

Príklad 5. Pre $p = -4$, $q = 1$, a = b, b = 4 rovnice (1) určujú krivku uvedenú na obr. 5. $\frac{1}{2}|p|$ je číslo párne. Krivka má dva body, vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = \mathrm{a} + \mathrm{b} = 10$, v ktorých dotyčnice sú kolmé na os OX, a dva body rovnako vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy, v ktorých dotyčnice sú kolmé na os OY. Podľa vzorca (7) sú dané rovnicami $Y = \pm 10$.

Body, vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b}| > 0$ sú dané vzťahom (3). U nich máme $\cos p\omega = 1$. Vzorce (4) pre tieto body potom nadobudnú tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{[\mathrm{a}q - \mathrm{b}(p + q)] \cos q\omega}{[\mathrm{a}q - \mathrm{b}(p + q)] \sin q\omega}.$$

Nemajú zmysel pre prosté epicykloidy. Pre všetky ostatné krivky triedy P v spomenutých bodoch máme

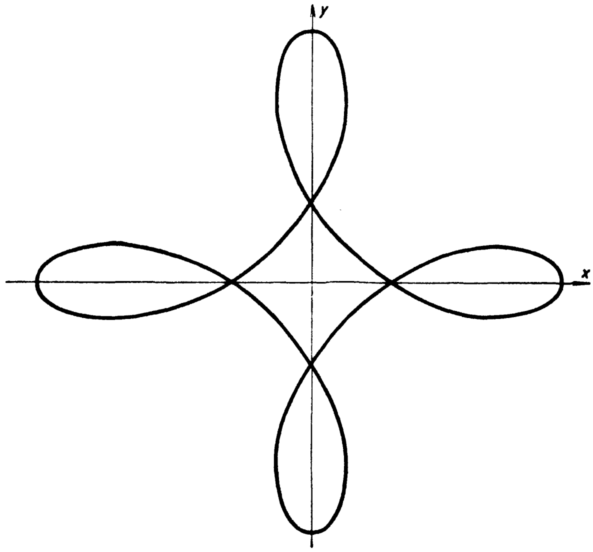
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\cos q\omega}{\sin q\omega}.$$

Pre dotyčnice v nich potom platí rovnica

$$X \cos q\omega + Y \sin q\omega = x \cos q\omega + y \sin q\omega .$$

Po dosadení hodnôt (3) parametra ω pre dotýčnice v bodoch, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b}| > O$, u všetkých kriviek triedy P, okrem prostých epicykloid, dostaneme potom rovnice

$$(8) \quad X \cos q \frac{(2k+1)\pi}{|p|} + Y \sin q \frac{(2k+1)\pi}{|p|} = \mathrm{a} - \mathrm{b}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, |p| - 1\,.$$



Obr. 5.

Ak $|p|$ je číslo nepárne ($|p| = 2k_1 + 1$), tieto dotýčnice nemôžu byť kolmé na os OY, Sú kolmé na os OX, keď číslo $t = (2k + 1)/(2k_1 + 1)$ je celé. Pretože $k \leqq |p| - 1$. musíme mať

$$t \leqq \frac{4k_1 + 1}{2k_1 + 1} = 2 - \frac{1}{2k_1 + 1} < 2\,.$$

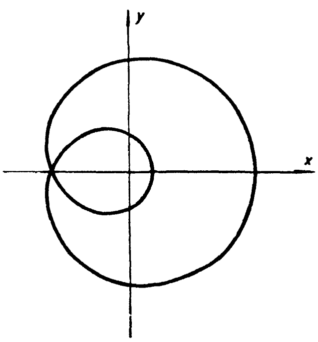
Môže sa teda t rovnať len jednotke. Z toho plynie, že pre $|p|$ nepárne každá krivka triedy P, s výnimkou prostej epicykloidy, má len v jednom bode, vzdialenom od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b}| > O$, dotýčnicu kolmú na os OX, danú rovnicami (8) pre $k = k_1$. Pri q párnom dotýčnica bude

$$(9) \qquad X = \mathrm{a} - \mathrm{b}$$

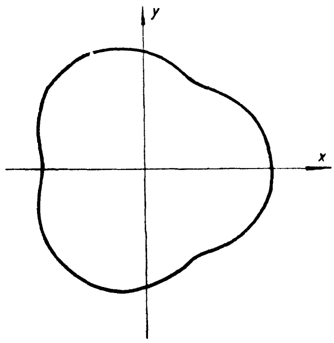
a pri nepárnom

$$(10) \qquad X = \mathrm{b} - \mathrm{a}$$

Príklad 6. Na obr. 6 je znázornená krivka, daná rovnicami (1) pre $p = -1$, $q = 2$, a $= 3$, b $= 2$; $|p|$ je číslo nepárne, q je číslo párne. Krivka má len jeden bod, vzdialený od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b}| = 1$. Dotyčnica je v ňom kolmá na os OX a je daná rovnicou $X = 1$.



Obr. 6.



Obr. 7.

Príklad 7. Krivka, daná rovnicami (1) pre $p = 3$, $q = 1$, a $= 4{,}5$; b $= 0{,}5$ je uvedená na obr. 7. Obidve čísla p a q sú čísla nepárne. Len v jednom bode, vzdialenom od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b}| = 4$, dotyčnica je kolmá na os OX. Podľa vzorca (10) je daná rovnicou $X = -4$.

Ak $|p|$ je číslo párne, potom z rovníc (8) vyplýva, že dotyčnica ani v jednom bode, vzdialenom od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b}|$ nemôže byť kolmá na os OX. Na os OY je kolmá len v tom prípade, keď $|p|$ je číslo párne, ale $\frac{1}{2}|p|$ je číslo nepárne ($|p| = 2(2k_1 + 1)$). To bude v tom prípade, keď $t = (2k + 1)/(2k_1 + 1)$ je celé nepárne číslo. Pretože $k \leqq |p| - 1$, musíme mať

$$t \leqq 4 - \frac{1}{2k_1 + 1} < 4\,.$$

Nevyhovuje teda len $t = 1$ a $t = 3$. Z toho plynie, že pri $|p|$ párnom a súčasne $\frac{1}{2}|p|$ nepárnom, každá krivka triedy P, s výnimkou prostej epicykloidy, má len dva body vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b}|$, v ktorých dotyčnice sú kolmé na os OY. Sú dané rovnicami

$$Y = \pm(\mathrm{a} - \mathrm{b})\,. \tag{11}$$

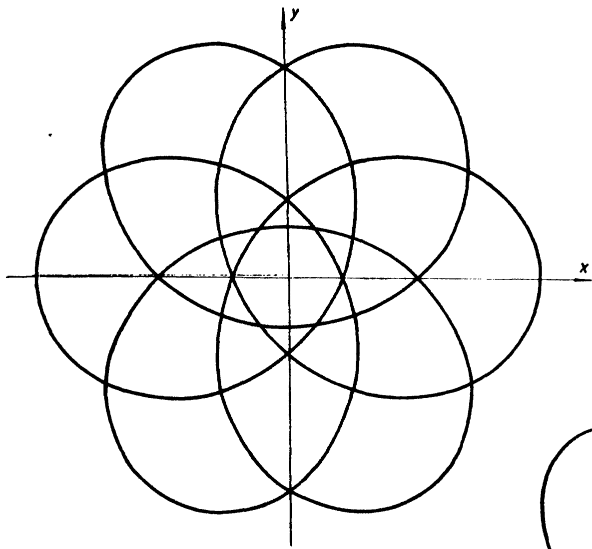
Príklad. 8. Na obr. 8 je znázornená krivka, daná rovnicami (1) pre $p = -6$, $q = 1$, a $= 4$, b $= 6$. Číslo $\frac{1}{2}|p|$ je nepárne. Krivka má dva body, vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b}| = 2$, v ktorých sú dotyčnice kolmé na os OY. Sú dané rovnicami (11), teda $Y = \pm 2$.

Pre a $-$ b $= 0$, každá krivka triedy P, tj. každá ružica prechádza počiatkom súradnicovej sústavy, ktorý je jej $|p|$-násobným bodom. Dotyčnice v ňom sú dané rovnicami

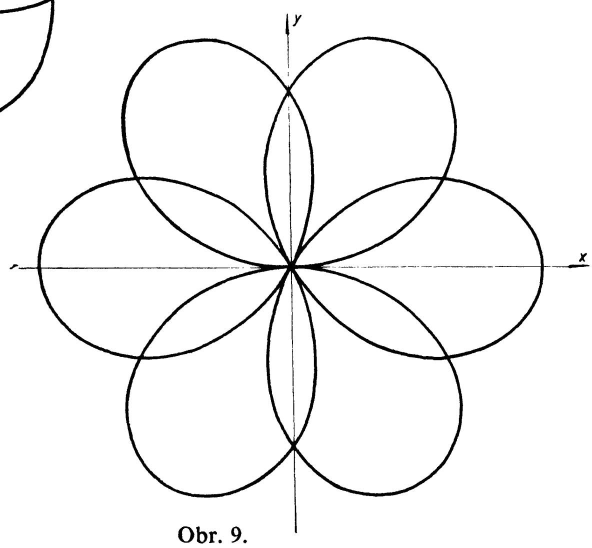
$$X \cos q \frac{(2k+1)\pi}{|p|} + Y \sin q \frac{(2k+1)\pi}{|p|} = 0\,, \quad k = 0, 1, \ldots, |p| - 1\,.$$

Podmienky kolmosti ich dotýčnic v tomto bode sú tie isté ako v prípade $|a - b| > 0$.

Príklad 9. Krivka, znázornená na obr. 9 je daná rovnicami (1) pre tie isté hodnoty p a q ako v príkl. 8, len $a = b = 5$. Táto krivka má dva body, vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = a + b = 10$, v ktorých dotýčnice sú kolmé na os OX. Počiatok súradnicovej sústavy je šesťnásobným bodom, v ktorom dve dotýčnice sú kolmé na os OY. Sú splynuté s osou OX.



Obr. 8.



Obr. 9.

Literatúra

[1] *Podtjagin N.*, O jednej triede racionálnych kriviek, Časopis pro pěstování matematiky, *90* (1965), 181–190.

Adresa autorov: Jozef Oboňa, Gottwaldovo nám. 2, Bratislava (SVŠT).

Résumé

SUR QUELQUES PROPRIETES NOUVELLES DES COURBES DE LA CLASSE P

NIKOLAJ PODTJAGIN, JOZEF OBOŇA, Bratislava

Dans cet article, on étudie des propriétés nouvelles des courbes de la classe P. La définition de ces courbes se trouve dans l'article [1], donnée par les équations

$$x = \mathrm{a} \cos q\omega + \mathrm{b} \cos (p + q)\, \omega\,,$$

$$y = \mathrm{a} \sin\, q\omega + \mathrm{b} \sin\, (p + q)\, \omega$$

où ω figure comme paramètre qui varie dans l'intervalle $[0,2\pi)$ a et b sont des constantes positives arbitraires, p et q étant de plus positif.

On trouve les équations des tangentes aux points situés à la distance a + b de l'origine

$$X \cos q \frac{2k\pi}{|p|} + Y \sin q \frac{2k\pi}{|p|} = a + b\,, \quad k = 0, 1, \ldots, |p| - 1\,.$$

Ces équations ont lieu pour toute courbe de la classe P, sauf pour les hypocycloïdes simples. De cela il résulte que, dans le cas où $|p|$ est impair, les tangentes définies par elles, sauf la tangente au point $\omega = 0$, ne pouvent pas être perpendiculaires aux axes de coordonées. Si $|p|$ est pair, toute courbe de la classe P, à l'exception des hypocycloïdes simples, a deux points situés à la distance a + b, de l'origine et ou les tangentes sont perpendiculaires à l'axe OX. Mais si $\frac{1}{2}|p|$ est pair aussi, la courbe en plus deux points situés distance a + b, à la de l'origine ou les tangentes sont perpendiculaires à l'axe OY.

On trouve les équations des tangentes aux points situés à la distance |a − b| de l'origine

$$X \cos q \frac{(2k + 1)\, \pi}{|p|} + Y \sin q \frac{(2k + 1)\, \pi}{|p|} = \mathrm{a} - \mathrm{b}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, |p| - 1\,.$$

Ces équations ont lieu pour toutes les courbes de la classe P, sauf pour les épicyckloïdes simples. Il en résulte que pour $|p|$ impair les tangentes aux points situés à la distance |a − b| de l'origine ne peuvent pas être perpendiculaires à l'axe OY. La courbe possède un de ces points, ou la tangente est perpendiculaire à l'axe OX. Dans le cas, ou $|p|$ est pair, les tangentes à ces points ne peuvent pas être perpendiculaires à l'axe OX. Mais si $|p|$ est pair, $\frac{1}{2}|p|$ impair, la courbe possède deux points situés à la distance |a − b|, de l'origine ou les tangentes sont perpendiculaires à l'axe OY.