Pavel Bartoš

O riešení rovnice $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ a rovnice $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = yx_1x_2 \ldots x_n$ v prirodzených číslach

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 96 (1971), No. 4, 367--370

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117735`

O RIEŠENÍ ROVNICE
$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y[x_1, x_2, \ldots, x_n]$
A ROVNICE
$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = yx_1x_2 \ldots x_n$
V PRIRODZENÝCH ČÍSLACH

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

(Došlo dňa 20. marca 1970)

V tomto článku bude reč o riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y[x_1, x_2, \ldots, x_n], \quad n \geqq 2, \tag{1}$$

v prirodzených číslach $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$, pričom $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ značí najmenší spoločný násobok čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Výsledok úvahy použijeme aj na riešenie rovnice

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = yx_1x_2 \ldots x_n, \quad n \geqq 2, \tag{2}$$

v prirodzených číslach $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$.[1])

V ďalšom riešenia všetkých rovníc sa rozumejú v obore prirodzených čísel.

Veta 1. *Všetky riešenia $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ rovnice (1) dostaneme nasledovne:*

Ak čísla $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ tvoria riešenie tzv. optickej rovnice

$$1/\xi_1 + 1/\xi_2 + \ldots + 1/\xi_n = 1 \tag{3}$$

potom

$$x_i = \frac{[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]}{\xi_i}\, t, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

kde t je ľubovoľné prirodzené číslo a

$$y = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) : [x_1, x_2, \ldots, x_n]. \tag{4'}$$

[1]) O rovnici (2) vo zvláštnom prípade $y = 1$ pojednáva sa v knižke [1], str. 171—4.

Dôkaz. Ak čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ splňujú rovnicu (1), potom $x_i \mid x_1 + x_2 + \ldots$ $\ldots + x_n$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Teda existujú prirodzené čísla $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ také, že

$$(5) \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \xi_i x_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Obrátene, ak $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vyhovujú rovniciam (5), pričom ξ_i sú čísla prirodzené, potom platí $x_i \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $i = 1, 2, \ldots, n$, a teda $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, kde y je prirodzené číslo. Čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ tvoria teda riešenie rovnice (1).

Riešením sústavy rovníc (5) v číslach $x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sa zaoberá článok [2], z ktorého vyplýva, že jej všetky riešenia dostaneme tak, že vezmeme ľubovolné riešenie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ rovnice (3) a potom (4) a (4′) dávajú riešenie sústavy rovníc (5), a tým aj rovnice (1). Tým je veta dokázaná.

Poznámka. Zo (4) a (4′) vyplýva, že ku každému riešeniu $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ rovnice (1) existuje nekonečne mnoho riešení tejto rovnice, a to $tx_1, tx_2, \ldots, tx_n, y$, kde t je ľubovoľné prirodzené číslo. Obrátene, ak rovnica (1) má riešenie $tx_1, tx_2, \ldots, tx_n, y$, má aj riešenie $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$. V ďalšom sa preto obmedzíme na tzv. primitívne riešenia, pre ktoré platí

$$(6) \qquad (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 1\,, \quad x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq \ldots \leqq x_n\,.$$

Zrejme je počet primitívnych riešení rovnice (1) konečný (väčší než nula), zhodný s počtom všetkých riešení $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ optickej rovnice (3), majúcich vlastnosť $\xi_1 \geqq \xi_2 \geqq \ldots \geqq \xi_n$.

Príklad. Hľadajme všetky riešenia rovnice

$$(7) \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y[x_1, x_2, x_3, x_4]$$

v prirodzených číslach x_1, x_2, x_3, x_4, y.

Riešenie. Najprv treba riešiť rovnicu

$$(8) \qquad 1/\xi_1 + 1/\xi_2 + 1/\xi_3 + 1/\xi_4 = 1\,.$$

Voliac $\xi_1 \geqq \xi_2 \geqq \xi_3 \geqq \xi_4$, je $2 \leqq \xi_4 \leqq 4$. Treba teda riešiť

1) pre $\xi_4 = 2$ rovnicu $1/\xi_1 + 1/\xi_2 + 1/\xi_3 = \frac{1}{2}$

a

2) pre $\xi_4 = 3$ rovnicu $1/\xi_1 + 1/\xi_2 + 1/\xi_3 = \frac{2}{3}$.

Pre $\zeta_4 = 4$ máme jediné riešenie $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 4$.

V prípade 1) máme riešenia uvedené v knižke [3] str. 74 a v prípade 2) v článku [4]. V prípade 2) dostaneme niektoré riešenia ktoré nesplňajú podmienku $\xi_1 \geqq \xi_2 \geqq \xi_3 \geqq \xi_4$. Tieto vo výpočte neuvádzame, lebo sa so správnym poradím dostali v prípade 1). Z riešení rovnice (8) dostaneme potom všetky primitívne riešenia rovnice (7). Výpočet obsahuje tabuľka č. 1.

Tabuľka 1

ξ_1	42	18	12	12	10	24	15	20	8	6	4	6	6	4
ξ_2	7	9	12	6	5	8	10	5	8	6	4	6	4	4
ξ_3	3	3	3	4	5	3	3	4	4	6	3	3	4	4
ξ_4	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	4
$M = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4]$	42	18	12	12	10	24	30	20	8	6	12	6	12	4
$x_1 = M/\xi_1$	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	2	1
$x_2 = M/\xi_2$	6	2	1	2	2	3	3	4	1	1	3	1	3	1
$x_3 = M/\xi_3$	14	6	4	3	2	8	10	5	2	1	4	2	3	1
$x_4 = M/\xi_4$	21	9	6	6	5	12	15	10	4	3	4	2	4	1
$y = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{[x_1, x_2, x_3, x_4]}$	1	1	1	2	1	1	1	1	2	1	1	3	1	4

Veta 2. *Pre všetky primitívne riešenia $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ rovnice (1) platí $y \leqq n$ a $y = n$ práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.*

Dôkaz. Hodnota y bude pri určitom $x_j = \operatorname{Max}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ najväčšia práve vtedy, keď bude mať $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ najmenšiu a súčasne pri tej istej podmienke $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ najväčšiu hodnotu. Keďže $x_1, x_2, \ldots, x_n \leqq x_j$ je $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ najmenšie práve vtedy, keď $x_1, x_2, \ldots, x_n \mid x_j$ a $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ najväčšiu hodnotu práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x_j$. Táto podmienka zahrňuje v sebe predošlú, teda extrémny prípad v prípade $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ skutočne nastane a inokedy nie. Keďže vtedy $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = x_j$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = nx_j$, je $y = nx_j / x_j = n$ pri každom x_j. Tým je veta dokázaná.

Poznámka. Otvorenou zostáva otázka, kedy je $y = 1$ a či pre každé y, $1 \leqq y \leqq n$ skutočne existuje n-tica čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ktoré s ním spolu tvoria riešenie rovnice (1).

Na základe predošlých výsledkov možno tiež nájsť všetky riešenia rovnice (2). Je totiž

$$x_1 x_2 \ldots x_n = k[x_1, x_2, \ldots, x_n] \tag{9}$$

kde k je prirodzené číslo, takže rovnica (2) je ekvivalentná s rovnicou

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = ky[x_1, x_2, \ldots, x_n] \tag{10}$$

kde k závisí od $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ktorá je tvaru (1). Zrejme platí veta:

Veta 3. *Množinu všetkých riešení rovnice (2) tvoria práve tie riešenia rovnice (1) v ktorých platí*

$$x_1 x_2 \ldots x_n \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n .$$

Z výsledkov príkladu teda poznávame, že rovnica

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = yx_1x_2x_3x_4 \tag{11}$$

má prave tieto riešenia (riešenia rovnice (1), v ktorých $y = 1$ si treba všimnút len v tom prípade, ak x_1, x_2, x_3, x_4 sú po dvoch nesúdelné čísla)

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, y) = (1, 1, 2, 4, 1), (1, 1, 1, 3, 2), (1, 1, 1, 1, 4).$$

Veta 4. *Všetky riešenia rovnice* (2) *sú pre* $n > 2$ *primitívne* (*t.j. platí* $(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$).

Dôkaz. Predpokladajme, že $tx_1, tx_2, \dots, tx_n, y$ je riešením rovnice (2), takže – po delení číslom t –

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = yt^{n-1}x_1 x_2 \dots x_n .$$

Podľa (9) je potom

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = kyt^{n-1}[x_1 x_2, \dots x_n]$$

a podľa vety 2 platí $kyt^{n-1} \leqq n$, teda aj $t^{n-1} \leqq n$, čo však v prípade $n > 2$ platí práve vtedy, keď $t = 1$. Tým je veta dokázaná.

Literatúra

[1] *Sierpiński, W.:* Teoria liczb II, Warszawa 1956.

[2] *Bartoš, P.:* O istej sústave diofantických rovníc, Časopis pro pěstování matematiky *93* (1968), 484–5.

[3] *Sedláček, J.:* Keine Angst vor Mathematik, VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1965.

[4] *Bartoš, P.:* O prolongabilných riešeniach optickej rovnice. Časopis pro pěstování matematiky *95* (1970), 278–289.

Adresa autora: Bratislava, Sibírska 9.

Zusammenfassung

ÜBER DIE LÖSUNG DER GLEICHUNG $x_1 + x_2 + \dots + x_n = y[x_1, x_2, \dots, x_n]$ UND DER GLEICHUNG $x_1 + x_2 + \dots + x_n = yx_1x_2 \dots x_n$ IN NATÜRLICHEN ZAHLEN

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

Im Artikel wird die Lösung der Gleichungen (1) und (2) im Gebiet der natürlichen Zahlen behandelt. Deren Lösung wird zu der Lösung des optischen Gleichung (3) in demselben Gebiet überführt.