Časopis pro pěstování matematiky

Jaroslav Krbiľa

Zovšeobecnené Eulerove lineárne diferenciálne rovnice druhého rádu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 96 (1971), No. 4, 361--366

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117734

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

ZOVŠEOBECNENÉ EULEROVE LINEÁRNE DIFERENCIÁLNE ROVNICE DRUHÉHO RÁDU

JAROSLAV KRBIĽA, Žilina

(Došlo dňa 18. marca 1970)

Majme lineárnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu, Jacobiho typu:

(q) $$y'' = q(t)\, y\,,$$

ktorej nosič $q(t) \in C_0(j)$, kde $j = (a, \infty)$, pričom môže byť aj $a = -\infty$.

Funkcia $\alpha(t)$, ktorá má vlastnosti:

$$\alpha(t) \in C_3(j)\,, \quad \alpha'(t) \neq 0 \quad \text{pre všetky} \quad t \in j\,,$$
$$\lim_{t \to a+} \alpha(t) = -\operatorname{sgn} \alpha' \infty\,, \quad \lim_{t \to \infty} \alpha(t) = \operatorname{sgn} \alpha' \infty\,,$$

ako to vyplýva z vlastnosti kruhových fáz, teóriu ktorých vybudoval O. BORŮVKA v knihe [1] str. 31–100, resp. z vlastnosti hyperbolických fáz, viď napr. [4] veta 3, je kruhovou fázou oscilatorickej diferenciálnej rovnice (q) s nosičom:

(q, −1) $$q(t) = -\{\alpha, t\} - \alpha'^2\,,$$

resp. hlavnou hyperbolickou fázou neoscilatorickej diferenciálnej rovnice (q) s nosičom:

(q, 1) $$q(t) = -\{\alpha, t\} + \alpha'^2\,,$$

kde symbol $\{\alpha, t\}$ znamená Schwarzovu deriváciu funkcie α v bode t, definovanú nasledovne:

$$\{\alpha, t\} = (\alpha''/2\alpha')' - (\alpha''/2\alpha')^2\,.$$

Uvedené skutočnosti umožňujú konštruovanie lineárnych diferenciálnych rovníc (q) oscilatorických s bázou riešení:

(1) $$y_1(t) = |\alpha'(t)|^{-1/2} \sin \alpha(t)\,, \quad y_2(t) = |\alpha'(t)|^{-1/2} \cos \alpha(t)\,,$$

resp. neoscilatorických s bázou riešení:

$$(2) \qquad y_1(t) = |\alpha'(t)|^{-1/2} \exp[\alpha(t)] , \quad y_2(t) = |\alpha'(t)|^{-1/2} \exp[-\alpha(t)] .$$

V tomto článku budeme konštruovať diferenciálne rovnice (q), keď fázy $\alpha(t)$ budú iterovanými logaritmickými funkciami. Kvôli zjednodušeniu zápisu označíme:

$$\begin{aligned} l_0(t) &= t , & l_{n+1}(t) &= \log[l_n(t)] , \\ M_0(t) &= 1 , & M_{n+1}(t) &= M_n(t)\, l_n(t) , \\ K_{-1}(t) &= -1 , & K_n(t) &= [K_{n-1}(t) + 1]\, l_n^2(t) , \\ L_{-1}(t) &= -1 , & L_n(t) &= [L_{n-1}(t) + 1]\, l_n(t) , \quad \text{pre} \quad n \geqq 0 , \quad \text{celé} . \end{aligned}$$

Ďalej označme symbolom $e^{-2} = -\infty$, $e^{-1} = 0$, $e^n = \exp[e^{n-1}]$, $n \geqq 0$.

Veta 1. *Diferenciálna rovnica*

$$(\mathrm{E}) \qquad y'' = [(4k^2 - 1 - K_{n-1}(t))/4M_n^2(t)]\, y ,$$

kde k je ľubovoľné reálne číslo, $n \geqq 0$, celé číslo, s nosičom spojitým na intervale (e^{n-2}, ∞) má v prípade $k \neq 0$ bázu riešení:

$$(3) \qquad y_1(t) = M_n^{1/2}(t) \exp[k l_n(t)] , \quad y_2(t) = M_n^{1/2}(t) \exp[-k l_n(t)] ,$$

v prípade $k = 0$ bázu riešení:

$$(4) \qquad y_1(t) = [M_n(t)\, l_n^{1+\varepsilon}(t)]^{1/2} , \quad y_2(t) = [M_n(t)\, l_n^{1-\varepsilon}(t)]^{1/2} ,$$

kde $\varepsilon = \pm 1$.

Dôkaz. *a*) Pre $k \neq 0$ dostaneme zo vzťahu (q, 1) a z hlavnej hyperbolickej fázy $\alpha(t) = k l_n(t)$ pre $n \geqq 0$, celé, nosič:

$$(5) \qquad q(t) = (2M_n''M_n - M_n'^2 + 4k^2)/4M_n^2 ,$$

o ktorom ukážeme, že je totožný s nosičom diferenciálnej rovnice (E). Stačí dokázať, že pre všetky $n \geqq 0$, celé čísla, platí rovnosť:

$$(6) \qquad 2M_n''M_n - M_n'^2 = -1 - K_{n-1} .$$

Pre $n = 0, 1$ je to evidentné a za predpokladu že platí vzťah (6) dostávame na základe vzorcov $l_n' = M_n^{-1}$, $l_n'' = -M_n'/M_n^2$ pre prirodzené číslo $n + 1$ rovnosti:

$$(7) \qquad 2M_{n+1}''M_{n+1} - M_{n+1}'^2 = (-1 - K_{n-1})\, l_n^2 - 1 = -K_n - 1 ,$$

čím je platnosť vzťahu (6) dokázaná pre ľubovoľné celé číslo $n \geqq 0$. Bázu riešení (3) diferenciálnej rovnice (E) dostaneme z fázy $\alpha(t) = k l_n(t)$ zo vzťahov (2).

b) Ak vezmeme hlavnú hyperbolickú fázu $\alpha(t) = (\varepsilon/2)\, l_{n+1}(t)$, kde $\varepsilon = \pm 1$, dostávame podľa časti *a*) nosič:

$$q(t) = (2M''_{n+1}M_{n+1} - M'^2_{n+1} + 1)/4M^2_{n+1}\,,$$

odkiaľ, keď zoberieme do úvahy úpravu v (7), dostaneme nosič diferenciálnej rovnice (E) v prípade keď $k = 0$. Bázu jej riešení (4) dostaneme zo vzorcov (2) z fázy $\alpha(t) = (\varepsilon/2)\, l_{n+1}(t)$. Tým je dôkaz vety ukončený.

Diferenciálna rovnica (E) je v prípade $n = 0$ diferenciálnou rovnicou s konštantným koeficientom $y'' = k^2 y$, v prípade $n = 1$ Eulerovou diferenciálnou rovnicou $y'' = [(4k^2 - 1)/4t^2]\, y$.

Na základe uvedeného je prirodzené nazvať diferenciálnu rovnicu (E) *zovšeobecnenou neoscilatorickou Eulerovou diferenciálnou rovnicou n-tého druhu, $n \geqq 0$ celé číslo.*

Ak je $0 < |k| < 1/2$, *resp.* $|k| > 1/2$, *nazývame neoscilatorickú Eulerovu diferenciálnu rovnicu* (E) *rovnicou prvého, resp. druhého rodu.*

Ak je $|k| = 1/2$, *resp.* $k = 0$, $n \geqq 0$, *n celé číslo, tak nazývame neoscilatorickú Eulerovú diferenciálnu rovnicu* (E) *n-tou hornou, resp. n-tou dolnou hraničnou diferenciálnou rovnicou.*

Z platnosti vzťahu $K_n M_n^2 = M^2_{n+1}(K_{n-1} + 1)$ pre $n \geqq 0$, n celé, dostávame tvrdenie: n-tá dolná hraničná diferenciálna rovnica je na intervale (e^{n-1}, ∞) totožná s $n + 1$-vou hornou hraničnou diferenciálnou rovnicou.

Ľahko sa vidí, že o priebehu nosičov diferenciálnych rovníc (E) platia nasledujúce tvrdenia:

Každý nosič neoscilatorickej Eulerovej diferenciálnej rovnice (E) $n + 1$-ho druhu, druhého rodu, je pre všetky $t \in (e^{n-1}, \infty)$ (od istého $t \in (e^{n-1}, \infty)$ počnúc) väčší (menší) ako nosič n-tej dolnej (hornej) hraničnej diferenciálnej rovnice.

Každý nosič neoscilatorickej Eulerovej diferenciálnej rovnice n-tého druhu, prvého rodu, je pre všetky $t \in (e^{n-2}, \infty)$ menší (väčší) ako nosič n-tej hornej (dolnej) hraničnej diferenciálnej rovnice.

Z vlastnosti hlavných hyperbolických fáz vyplýva ([5], veta 6) že báza riešení diferenciálnej rovnice (E) daná vzťahom (3) je hlavnou bázou. Pripomíname, že je to taká báza, ktorej jedno riešenie je hlavným, t.j. že pre všetky t väčšie ako nejaké číslo platí $y(t) \neq 0$ a integrál $\int^\infty y^{-2}(t)\, dt$ diverguje.

Ak je $k > 0$ (<0), je hlavným riešením v (3) riešenie $y_2(t)$ $(y_1(t))$. V prípade keď $k = 0$ a $\varepsilon = 1\,(-1)$, je hlavným riešením v (4) $y_2(t)\,(y_1(t))$.

V ďalšom sa obmedzíme na prípad pozitívnej hlavnej bázy (y_1, y_2) diferenciálnej rovnice (E), v ktorej je hlavným riešením riešenie y_2, t.j. fáza $\alpha(t)$ má deriváciu $\alpha'(t) > 0$. Derivovaním z (2) v tomto prípade dostávame:

$$(8) \qquad y_1' = \exp[\alpha]\, \alpha'^{1/2}[1 + (1/2\alpha')'] \,, \quad y_2' = -\exp[-\alpha]\, \alpha'^{1/2}[1 - (1/2\alpha')'] \,,$$

odkiaľ vidieť, že funkcia $h(t) = (1/2\alpha')'$ má pri vyšetrovaní monotonnosti bázy (y_1, y_2) dôležitú roľu. V prípade diferenciálnej rovnice (E), ak $k \neq 0$, resp. $k = 0$, tak platí: $h(t) = (L_{n-1}(t) + 1)/2k$, resp. $h(t) = L_n(t) + 1$, odkiaľ dostávame tvrdenia:

a) V prípade diferenciálnej rovnice (E) nultého a prvého druhu, okrem prvej dolnej hraničnej diferenciálnej rovnice, je funkcia $h(t)$ konštantnou a to:

1. ak je diferenciálna rovnica (E) nultého druhu a $k > 0$, tak je $h = 0$,
2. ak je diferenciálna rovnica (E) prvého druhu, druhého rodu, tak platí: $0 < h < 1$,
3. ak je diferenciálna rovnica (E) prvá horná hraničná diferenciálna rovnica, tak $h = 1$,
4. ak je diferenciálna rovnica (E) prvého druhu, prvého rodu, tak je $h > 1$.

b) Keď je diferenciálna rovnica (E) n-tého druhu, $n \geqq 2$, prvého, resp. druhého rodu, alebo n-tá dolná hraničná diferenciálna rovnica, $n \geqq 1$, má funkcia $h(t)$ limitu: $\lim_{t \to \infty} h(t) = \infty$.

Z uvedených vlastností funkcie $h(t)$ a vzorcov (8) vzhľadom na monotónnosť hlavnej bázy (y_1, y_2) dostávame tri prípady: 1° *a*) 1, a) 2; 2° *a*) 3; 3° *a*) 4, *b*) podľa ktorých máme klasifikáciu zovšeobecnených neoscilatorických rovníc (E) pri $t \to \infty$:

Veta 2. *Ak je diferenciálna rovnica* (E) *buď* 1° *diferenciálnou rovnicou nultého druhu, okrem nultej dolnej hraničnej diferenciálnej rovnice, resp. diferenciálnou rovnicou prvého druhu, druhého rodu, alebo* 2° *prvou hornou hraničnou rovnicou, alebo* 3° *diferenciálnou rovnicou n-tého druhu, n prirodzené, okrem prvej hornej hraničnej diferenciálnej rovnice, potom má pozitívnu hlavnú bázu* (y_1, y_2) *pričom* y_2 *je hlavným riešením a v jednotlivých prípadoch pri* $t \to \infty$ *platí:*

1° $\quad y_1 \uparrow \infty\,, \quad y_2 \downarrow 0\,,$

2° $\quad y_1 \uparrow \infty\,, \quad y_2 = c > 0\,, \quad c$ *je konštanta*,

3° $\quad y_1 \uparrow \infty\,, \quad y_2 \uparrow \infty\,.$

Poznamenávame, že zápis $y_1 \uparrow \infty$ znamená, že funkcia $y_1(t)$ je rastúca a že $\lim_{t \to \infty} y_1(t) = \infty$. Analogicky význam majú aj ostatné zápisy v tvrdení vety 2, ktoré sa zhoduje s výsledkami klasifikácie v práci [7], ktorá je však prevedená iným spôsobom.

Podobne, ako sme dokázali vetu 1 sa použitím vzťahov (q, -1), (1) a fázy $\alpha(t) = kl_n(t)$, kde $k \neq 0$ dokáže:

Veta 3. *Diferenciálna rovnica*:

$$(\mathrm{E_0}) \qquad y'' = [-(4k^2 + 1 + K_{n-1}(t))/4M_n^2(t)]\, y\,,$$

kde $k \neq 0$ je ľubovoľné reálne číslo, $n \geqq 0$, celé číslo, s nosičom spojitým na intervale (e^{n-2}, ∞), má bázu riešení:

$$y_1(t) = M_n^{1/2}(t) \sin [kl_n(t)] , \quad y_2(t) = M_n^{1/2}(t) \cos [kl_n(t)] .$$

Diferenciálna rovnica (E_0) je v prípade $n = 0$ diferenciálnou rovnicou s konštantným nosičom: $y'' = -k^2 y$ a v prípade $n = 1$ Eulerovou diferenciálnou rovnicou: $y'' = [-(4k^2 + 1)/4t^2]\, y$.

Diferenciálnu rovnicu (E_0) nazývame zovšeobecnenou oscilatorickou Eulerovou diferenciálnou rovnicou n-tého druhu.

Zovšeobecnené Eulerove neoscilatorické aj oscilatorické diferenciálne rovnice nazývame zovšeobecnenými Eulerovými diferenciálnymi rovnicami n-tého druhu.

Vidíme, že nosiče zovšeobecnených Eulerových diferenciálnych rovníc n-tého druhu sú vzhľadom na parameter k spojité a ak k konverguje k nule, tak ich limitou je nosič n-tej dolnej hraničnej diferenciálnej rovnice.

Použitím porovnávacej vety, podobne ako Kneser v práci [3], ktorý použil prvú dolnú hraničnú diferenciálnu rovnicu, dostávame zovšeobecnenie Kneserovej vety keď za porovnávaciu rovnicu zoberieme n-tú dolnú hraničnú diferenciálnu rovnicu, n prirodzené číslo:

Veta 4. *Ak počínajúc niektorým $t \in j$ stále platí pre nosič diferenciálnej rovnice (q) nerovnosť:*

$$-(1 + K_{n-1}(t))/4M_n^2(t) \leqq q(t) ,$$

kde n je prirodzené číslo, tak je diferenciálna rovnica (q) neoscilatorická, ak platí nerovnosť:

$$q(t) \leqq -(\delta + 1 + K_{n-1}(t))/4M_n^2(t) ,$$

kde n je prirodzené číslo a $\delta > 0$ je ľubovoľné reálne číslo, tak je diferenciálna rovnica (q) oscilatorická.

Poznamenávame, že podobná problematika ako v tomto článku, ale z iného hľadiska je študovaná v práci [2], [6] a [8].

Literatúra

[1] *O. Borůvka:* Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967.

[2] *E. Hille:* Non oscillation theorems. Trans. Amer. Math. Soc. *64* (1948), 234–252.

[3] *A. Kneser:* Untersuchungen über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen. Math. Annalen *42* (1893) 409–435.

[4] *J. Krbiľa:* Algebraická štruktúra množiny hlavných hyperbolických fáz diferenciálnych rovníc $y'' = q(t)\, y$ v intervale $(-\infty, \infty)$. Matem. časopis SAV *20* (1970) No 3, 195–204.

[5] *J. Krbiľa:* Existencia a neohraničenosť prvej hyperbolickej fázy neoscilatorickej diferenciálnej rovnice $y'' = q(t)\,y$. Sborník prací VŠD a VÚD, NADAS, Praha *25* (1969), 5—13.
[6] *M. Laitoch:* Sur une théorie des critères comparatifs sur l'oscillation des intégrales de l'équation differentielle $u'' = P(x)\,u$. Spisy Přír. fak. MU Brno *365* (1955), 1—12.
[7] *А. Й. Левин:* Поведение решенний уравнения $x^{\cdot\cdot} + p(t)\,x^{\cdot} + q(t)\,x = 0$ в неколебательном случае. Матем. сборник Т. *75* (117) No 1 (1968), 39—63.
[8] *M. Ráb:* Poznámka k otázce o oscilačných vlastnostech řešení diferenciální rovnice $y'' + A(x)\,y = 0$. Čas. Pěst. Mat. *82* (1957), 342—348.

Adresa autora: Žilina Marxa-Engelsa 25, (Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie fakulty SET VŠD),

Zusammenfassung

VERALLGEMEINERTE LINEARE EULERSCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG

JAROSLAV KRBIĽA, Žilina

Im Artikel werden mit Hilfe der Haupthyperbolischen Phasen bzw. der Kreisphasen, welche iterierte logarithmische Funktionen sind, die verallgemeinerte Eulersche Differentialgleichungen

$$(\mathrm{E}) \qquad y'' = \left[(4k^2 - 1 - K_{n-1}(t))/4M_n^2(t)\right] y\,,$$

bzw.

$$(\mathrm{E}_0) \qquad y'' = -\left[(4k^2 + 1 + K_{n-1}(t))/4M_n^2(t)\right] y$$

und deren Lösungsbassisen konstruiert, wobei $n \geqq 0$ eine ganze Zahl ist (Satz 1 bzw. Satz 3).

Spezialfälle der angeführten Gleichungen sind Differentialgleichungen mit konstanten Trägern: $y'' = \pm k^2 y$ und auch die Eulerschen Differentialgleichungen: $y'' = -\left[(1 \mp 4k^2)/4k^2\right] y$. Es wird das Verhalten der Gleichungen (E) mit Rücksicht auf den Parameter k untersucht und es wird deren Klassifikation für den Fall $t \to \infty$ durchgeführt (Satz 2). Wenn in der Differentialgleichung (E) und auch (E_0), wo n eine natürliche Zahl ist, $k \to 0$ sein wird, dann bekommt man eine Differentialgleichung, welche einer Verallgemeinerung des bekannten Kneserschen Satzes (der Fall $n = 1$) zum Grunde liegt (Satz 4).