František Machala

O automorfismech definovaných na okruhu endomorfismů homogenního totálně rozložitelného modulu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 96 (1971), No. 4, 353--360

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117733`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

O AUTOMORFISMECH DEFÍNOVANÝCH NA OKRUHU ENDOMORFISMŮ HOMOGENNÍHO TOTÁLNĚ ROZLOŽITELNÉHO MODULU

FRANTIŠEK MACHALA, Olomouc

(Došlo dne 13. února 1970)

Nechť je M unitární levý modul nad libovolným asociativním okruhem R s jednotkovým prvkem. Monogenní podmodul modulu M generovaný prvkem $x \in M$ označíme Rx, $U + V$ součet podmodulů U, V a $U \oplus V$ jejich direktní součet. Množina všech podmodulů modulu M je vzhledem k inklusi, kterou označíme $\leqq$, částečně uspořádaná. Vzhledem k operaci průniku $\cap$ a součtu dvou podmodulů vytváří svaz $\overline{M}$.

Označme Φ okruh endomorfismů modulu M. Jednotkový prvek ι tohoto okruhu je identický automorfismus. Obraz podmodulu $U \leqq M$ v endomorfismu $\varphi \in \Phi$ označíme $U\varphi$ a jádro tohoto endomorfismu $\operatorname{Ker}(\varphi)$. Levý (pravý) hlavní ideál okruhu Φ generovaný prvkem φ označíme $\Phi\varphi(\varphi\Phi)$. Součet dvou levých (pravých) ideálů I_1, I_2 okruhu Φ označíme $I_1 + I_2$ a direktní součet $I_1 \oplus I_2$. Množina všech levých (pravých) ideálů okruhu Φ je vzhledem k inklusi $\leqq$ částečně uspořádaná a vzhledem k operaci průniku a součtu levých (pravých) ideálů vytváří úplný svaz Φ_L, Φ_P, ([4], str. 25). Jestliže je π libovolný automorfismus svazu Φ_L a $I \in \Phi_L$, $I = \sum_{\nu \in J} I_\nu$, $I_\nu \in \Phi_L$, kde J je jistá množina indexů, pak $I^\pi = (\sum_{\nu \in J} I_\nu)^\pi = \sum_{\nu \in J} I_\nu^\pi$. Stejně pro libovolný automorfismus svazu Φ_P. ([4], str. 27.) Jestliže na množinách všech automorfismů svazů Φ_L, Φ_P definujeme obvyklým způsobem skládání automorfismů, obdržíme grupy $P(\Phi_L)$, $P(\Phi_P)$.

Prvek $x \in M$ se nazývá volný, jestliže ze vztahu $rx = o$, $r \in R$ plyne vždy $r = o$. Označme $L(M)$ množinu těch podmodulů modulu M, které jsou generovány konečným počtem prvků. Automorfismus ω svazu $\overline{M}$ se nazývá projektivní zobrazení modulu M, jestliže platí:

P_1: $(L(M))^\omega = L(M)$.
P_2: Pro libovolný $m \in M$ existuje $n \in M$ takový, že $(Rm)^\omega = Rn$.
P_3: Pro libovolný $n \in M$ existuje $m \in M$ takový, že $(Rm)^\omega = Rn$.
P_4: Existuje volný element $u \in M$ takový, že $(Ru)^\omega = Rv$, kde v je opět volný element (lit. [5]).

Automorfismus μ aditivní grupy modulu M, pro který platí $(rx)\mu = r^{\mu'}(x\mu)$, $r \in R$, $x \in M$, kde μ' je automorfismus okruhu R, se nazývá pololineární zobrazení modulu M.

Modul M se nazývá přípustný, jestliže jsou splněny následující dva požadavky:

1. Ke každým $x, y, z \in M$ existuje volný $w \in M$ takový, že $(Rx + Ry + Rz) \cap \cap Rw = o$.

2. Mějme libovolný $t \in M$, volné $x, y, u \in M$ a předpokládejme, že $Rx \cap Ry \neq o$, $Ru \cap Rt \neq o$. Pak existuje volný $w \in M$ takový, že $Rw \cap Rt = Rw \cap Ry = Rw \cap \cap Rx = Rw \cap Ru = o$.

V dalším se budou vyskytovat okruhy R s jednotkovým prvkem 1 následující vlastnosti:

$$(\text{V}) \quad \text{Jestliže } ab = 1 \text{ pro } a, b \in R, \text{ pak existuje } c \in R \text{ takový, že } ca = 1 .$$

Podle [5] platí: Mějme okruh R vlastnosti (V). Každé projektivní zobrazení přípustného R-modulu M je indukováno pololineárním zobrazením tohoto modulu.

Modul M, který je direktním součtem svých jednoduchých podmodulů, se nazývá totálně rozložitelný. Součet všech navzájem isomorfních jednoduchých podmodulů modulu M se nazývá homogenní komponenta. Totálně rozložitelný modul, který má právě jednu homogenní komponentu, budeme nazývat homogenní totálně rozložitelný modul. Zvláštním případem tohoto modulu je např. vektorový prostor libovolné dimense nad libovolným tělesem. V dalším budeme vždy pod modulem M rozumět levý unitární homogenní totálně rozložitelný modul nad okruhem R, aniž to budeme zdůrazňovat. Pokud nebude výslovně nic řečeno, budeme předpokládat, že okruh R je obecný okruh s jednotkovým prvkem. Všechny pojmy a označení, které jsme zavedli pro obecný modul, zachováme i v našem speciálním případě.

Ke každému podmodulu U modulu M existuje podmodul V takový, že $M = = U \oplus V$. ([3], teorém 2, str. 96.) Každý levý (pravý) hlavní ideál okruhu Φ endomorfismů modulu M je generován idempotentním prvkem (lit. [6]). Množina všech levých (pravých) hlavních ideálů okruhu Φ je inklusí částečně uspořádaná a vytváří vzhledem k tomuto uspořádání svaz $\Omega_L(\Omega_P)$. Označme $\cap$, $\cup$ příslušné svazové operace. Podle [6] a [1] platí pro libovolné $\Phi\varphi$, $\Phi\varrho$ rovnost $\Phi\varphi \cup \Phi\varrho = \Phi\varphi + \Phi\varrho$ a pro libovolné $\varphi\Phi$, $\varrho\Phi$ rovnost $\varphi\Phi \cup \varrho\Phi = \varphi\Phi + \varrho\Phi$. Svaz $\Omega_L(\Omega_P)$ je proto podsvazem svazu Φ_L, (Φ_P). Grupy automorfismů svazů Ω_L, Ω_P označíme $P(\Omega_L)$, $P(\Omega_P)$. Libovolný automorfismus σ okruhu Φ indukuje automorfismus π_σ svazu Φ_L předpisem $I^\sigma = = I^{\pi_\sigma}$, $I \in \Phi_L$. Protože platí $(\Phi\varphi)^\sigma = \Phi\varphi^\sigma$, je $(\Phi\varphi)^\sigma \in \Omega_L$. Automorfismus σ indukuje také automorfismus π'_σ svazu Ω_L. Totéž platí také pro svazy Φ_P, Ω_P.

Zobrazení f, definované předpisem $(\Phi\varphi)^f = M\varphi$ je isomorfismem svazů Ω_L, $\overline{M}$. Zobrazení g definované předpisem $(\psi\Phi)^g = \operatorname{Ker}(\psi)$, je duální isomorfismus svazů Ω_P, $\overline{M}$. ([6], [1], hlava 5.)

Lemma 1. *Každý monogenní podmodul modulu M je generován konečným počtem jednoduchých modulů.*

Důkaz. Monogenní podmodul Rx je totálně rozložitelný a proto $Rx = \sum_{\nu\in J} Ru_\nu$, kde Ru_ν jsou jednoduché podmoduly. Existují $v_i \in Ru_{j_i}$, $i = 1, \ldots, n$; $j_i \in J$, $v_i \neq o$ takové, že $x = \sum_{i=1}^{n} v_i$. Protože $Rv_i = Ru_{j_i}$ pro všechna i, je $\sum_{i=1}^{n} Rv_i \leqq Rx$. Pro každé $r \in R$ je $rx = \sum_{i=1}^{n} rv_i$, čili $Rx \leqq \sum_{i=1}^{n} Rv_i$ a $Rx = \sum_{i=1}^{n} Rv_i$.

Lemma 2. *Nechť modul M obsahuje volný prvek. Každý automorfismus ω svazu $\overline{M}$ je projektivní zobrazení modulu M.*

Důkaz. Dokážeme, že ω splňuje požadavky $P_1 - P_4$.

P_1: Obrazem jednoduchého podmodulu Ru v automorfismu ω je jednoduchý podmodul $(Ru)^\omega$. Předpokládejme, že podmodul $U \leqq M$ je generován konečným počtem prvků $u_1, \ldots, u_n$, čili $U \in L(M)$. Pak $U = \sum_{i=1}^{n} Ru_i$. Podle lemmy 1 můžeme psát $Ru_i = \sum_{k=1}^{l_i} Rv_k^i$, $i = 1, \ldots, n$, kde Rv_k^i jsou jednoduché moduly. Pak $U^\omega = \sum_{i,k} (Rv_k^i)^\omega$, kde $(Rv_k^i)^\omega$ jsou jednoduché podmoduly. Podmodul U^ω je generován konečným počtem prvků, čili $U^\omega \in L(M)$. Z toho, že ω je automorfismus svazu $\overline{M}$, plyne $(L(M))^\omega = L(M)$.

P_2: Zvolme si libovolný $m \in M$. Pak můžeme psát $Rm = Ru_1 \oplus \ldots \oplus Ru_n$, kde Ru_i jsou jednoduché podmoduly a $(Rm)^\omega = (Ru_1)^\omega \oplus \ldots \oplus (Ru_n)^\omega$, kde $(Ru_i)^\omega$ jsou jednoduché podmoduly. Podle [2], str. 154, věta 12, jsou moduly Rm, $(Rm)^\omega$ isomorfní. Jestliže je α jejich isomorfismus, pak $(Rm)\,\alpha = R(m\alpha) = (Rm)^\omega$.

P_3: Zvolme libovolný $x \in M$. Podle P_2 je modul $(Rx)^{\omega^{-1}}$ monogenní, čili existuje $m \in M$ takový, že $Rm = (Rx)^{\omega^{-1}}$ a $(Rm)^\omega = Rx$.

P_4: Podle předpokladu existuje volný $u \in M$. Podle P_2 je $(Ru)^\omega = Rv$ a Ru, Rv jsou isomorfní. To znamená, že Rv je volný element.

Poznámka. Lemma 2 platí pro přípustný modul M, neboť pak existuje volný $u \in M$.

Lemma 3. *Buď σ automorfismus okruhu Φ endomorfismů modulu M. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

a) *Všechny levé hlavní ideály okruhu Φ jsou σ-přípustné.*

b) *Všechny pravé hlavní ideály okruhu Φ jsou σ-přípustné.*

c) *Pro každý idempotentní prvek $\omega \in \Phi$ je $\omega^\sigma = \omega$.*

Důkaz. a $\to$ b. Podle předpokladu platí $(\Phi\varphi)^\sigma \leqq \Phi\varphi$ pro každý $\varphi \in \Phi$. Jestliže zvolíme automorfismus σ^{-1}, pak dostáváme $\Phi\varphi = ((\Phi\varphi)^\sigma)^{\sigma^{-1}} \leqq (\Phi\varphi)^\sigma$, $(\Phi\varphi)^\sigma \geqq \Phi\varphi$.

Z toho plyne, že $(\Phi\varphi)^\sigma = \Phi\varphi$ pro každý $\varphi \in \Phi$, čili také $\Phi\varphi^\sigma = \Phi\varphi$. Z definice zobrazení f dostáváme

$$(1) \qquad (\Phi\varphi)^f = (\Phi\varphi^\sigma)^f = M\varphi = M\varphi^\sigma .$$

Zvolme si libovolný pravý hlavní ideál $\psi\Phi$. Existuje idempotentní prvek $\omega \in \Phi$ takový, že $\psi\Phi = \omega\Phi$. Pak také $\iota - \omega, \omega^\sigma, (\iota - \omega)^\sigma = \iota - \omega^\sigma$ jsou idempotentní endomorfismy a platí $M(\iota - \omega) = \text{Ker}(\omega)$, $M(\iota - \omega^\sigma) = \text{Ker}(\omega^\sigma) = M(\iota - \omega)^\sigma$. ([2], věta 1, str. 119.) Podle (1) je $M(\iota - \omega) = M(\iota - \omega)^\sigma$ a proto $\text{Ker}(\omega) = \text{Ker}(\omega^\sigma)$. Pak $(\text{Ker}(\omega))^{g^{-1}} = (\text{Ker}(\omega^\sigma))^{g^{-1}} = \omega\Phi = \omega^\sigma\Phi = (\omega\Phi)^\sigma$ a každý pravý hlavní ideál okruhu Φ je σ-přípustný.

b → a. Protože je σ automorfismus okruhu Φ, platí $(\varphi\Phi)^\sigma = \varphi\Phi$ pro každý prvek $\varphi \in \Phi$. Pak

$$(2) \qquad (\varphi\Phi)^g = (\varphi^\sigma\Phi)^g = \text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\varphi^\sigma) .$$

Zvolme si libovolný levý hlavní ideál a předpokládejme, že je generovaný idempotentním prvkem ω. Platí $\text{Ker}(\iota - \omega) = M\omega$ a $\text{Ker}(\iota - \omega)^\sigma = M\omega^\sigma$. Podle (2) je $M\omega = M\omega^\sigma$ a proto $(M\omega)^{f^{-1}} = (M\omega^\sigma)^{f^{-1}} = \Phi\omega = (\Phi\omega)^\sigma = \Phi\omega^\sigma$. Každý levý hlavní ideál je σ-přípustný.

a → c. Každý idempotentní endomorfismus ω je jednoznačně určen dvojicí podmodulů $P = M\omega$, $Q = \text{Ker}(\omega)$, $P \oplus Q = M$. Protože platí a → b, dostáváme podle (1), (2): $P = M\omega = M\omega^\sigma$, $Q = \text{Ker}(\omega) = \text{Ker}(\omega^\sigma)$ a z toho $\omega^\sigma = \omega$.

c → a. Jestliže $\omega^\sigma = \omega$ pro každý idempotentní $\omega \in \Phi$, pak také $\Phi\omega = \Phi\omega^\sigma = (\Phi\omega)^\sigma$. Každý levý hlavní ideál je σ-přípustný, protože je generován idempotentním prvkem.

Lemma 4. *Nechť modul M není jednoduchý. Jestliže automorfismus σ okruhu Φ splňuje ekvivalentní požadavky a), b), c) z lemmy 3, pak je identický.*

Důkaz. Nechť má automorfismus σ požadované vlastnosti. Zvolme si libovolný $\alpha \in \Phi$.

1. Nechť je $x \in M$ libovolný prvek takový, že podmodul Rx je jednoduchý. Pak je buď $R(x\alpha) \cap Rx = o$ nebo $R(x\alpha) = Rx$.

a) Předpokládejme, že $R(x\alpha) \cap Rx = o$. Zvolme libovolný $u \in R(x - x\alpha) \cap R(x\alpha)$. Pak existují $r, r_1 \in R$ takové, že $u = r(x - x\alpha) = r_1 x\alpha$, čili $rx = r_1 x\alpha + rx\alpha$. Podle předpokladu $R(x\alpha) \cap Rx = o$ je $rx = o$. Pak také $rx\alpha = o$ a $u = o$. Platí tedy $R(x - x\alpha) \cap R(x\alpha) = o$. Existuje podmodul $Q \leqq M$ takový, že $M = R(x\alpha) \oplus R(x - x\alpha) \oplus Q$. Zvolme idempotentní endomorfismus $\omega : M\omega = R(x\alpha)$, $\text{Ker}(\omega) = R(x - x\alpha) \oplus Q$. Pak $x - x\alpha \in \text{Ker}(\omega)$ a $s\omega = s$ pro každý $s \in R(x\alpha)$. Dostáváme tedy $(x - x\alpha)\omega = x\omega - x\alpha = o$, čili $x \in \text{Ker}(\omega - \alpha)$. Podle (2) v důkazu lemmy 3 je $\text{Ker}(\omega - \alpha) = \text{Ker}((\omega - \alpha)^\sigma)$ a podle c) v lemmě 3 $\text{Ker}((\omega - \alpha)^\sigma) = \text{Ker}(\omega - \alpha^\sigma)$. To znamená, že platí $x(\omega - \alpha) = x(\omega - \alpha^\sigma) = o$ a z toho $x\alpha = x\alpha^\sigma$.

b) Předpokládejme, že $Rx = R(x\alpha)$. Protože M není jednoduchý, existuje jednoduchý podmodul $Ry' \leqq M$ takový, že $Ry' \cap Rx = o$. Protože je M homogenní totálně rozložitelný modul, jsou Rx, Ry' isomorfní. Nechť je γ' isomorfismus modulů Rx, Ry' a nechť $x\gamma' = y$. Pak $Ry = Ry'$. Podle [3], věta 1, str. 185 je možno isomorfismus γ' prodloužit do automorfismu γ modulu M. Pak $x\gamma = y$. Stejně jako v případě a) ukážeme, že $R(x - y) \cap Ry = o$ a že je možno zvolit idempotentní endomorfismus ω takový, že $M\omega = Ry$, $x - y \in \operatorname{Ker}(\omega)$, čili $x\omega = y\omega = y$. Zvolme libovolný $u \in Rx \cap Rx(\alpha + \omega)$. Pak existují $r, r_1 \in R$ takové, že $u = rx = r_1x\alpha + r_1x\omega$, čili $rx - r_1x\alpha = r_1y$. Protože $r_1x\alpha \in Rx$, platí podle předpokladu $Rx \cap Ry = o$, že $r_1y = r_1x\gamma = o$. Protože je γ automorfismus modulu M, je $r_1x = o$ a také $r_1x\alpha = o$, čili $u = o$. Platí tedy $Rx \cap Rx(\alpha + \omega) = o$. Pro endomorfismus $\alpha + \omega$ můžeme použít výsledku části a) a dostáváme $x\alpha + x\omega = x\alpha^\sigma + x\omega^\sigma$. Protože je ω idempotentní prvek, je $x\omega^\sigma = x\omega$ a $x\alpha = x\alpha^\sigma$.

2. Zvolme libovolný $x \in M$. Protože je M direktní součet jednoduchých podmodulů, existuje konečný počet prvků $x_1, \ldots, x_n$ takových, že Rx_i jsou jednoduché podmoduly pro všechna $i = 1, \ldots, n$ a $x = x_1 + \ldots + x_n$. Podle části 1 platí $x\alpha^\sigma = (x_1 + \ldots + x_n)\,\alpha^\sigma = x_1\alpha^\sigma + \ldots + x_n\alpha^\sigma = x_1\alpha + \ldots + x_n\alpha = x\alpha$.

Pro libovolný $x \in M$ platí tedy $x\alpha^\sigma = x\alpha$, čili $\alpha^\sigma = \alpha$. Automorfismus σ okruhu Φ je identický.

Poznámka. Jestliže je M jednoduchý, pak je Φ těleso a lemma 4 neplatí. Přípustný modul M není jednoduchý a proto splňuje podmínky lemmy 4.

Věta 1. *Buď dán přípustný homogenní totálně rozložitelný modul M nad okruhem R vlastnosti (V). Každý automorfismus svazu Ω_L je indukován automorfismem okruhu Φ. Grupa $P(\Omega_L)$ je isomorfní s grupou $A(\Phi)$ automorfismů okruhu Φ.*

Důkaz. Protože je pololineární zobrazení μ automorfismus aditivní grupy modulu M, platí pro libovolný $\varphi \in \Phi$ vztah $M\varphi\mu = M\mu^{-1}\varphi\mu$. Snadno zjistíme, že $\mu^{-1}\varphi\mu \in \Phi$. Podle definice isomorfismu f svazů Ω_L, $\overline{M}$ dostáváme

$$(\Phi\varphi)^f\,\mu = M\varphi\mu = M\mu^{-1}\varphi\mu = (\Phi\mu^{-1}\varphi\mu)^f\,. \tag{1}$$

Uvažujme zobrazení $\sigma_\mu : \varphi^{\sigma_\mu} = \mu^{-1}\varphi\mu$, $\varphi \in \Phi$. Jestliže zvolíme libovolný $\gamma \in \Phi$, pak $\mu\gamma\mu^{-1} \in \Phi$ a $(\mu\gamma\mu^{-1})^{\sigma_\mu} = \gamma$. Zobrazení σ_μ je zobrazením na Φ. Platí $(\varphi + \varrho)^{\sigma_\mu} = \mu^{-1}(\varphi + \varrho)\,\mu = \mu^{-1}\varphi\mu + \mu^{-1}\varrho\mu = \varphi^{\sigma_\mu} + \varrho^{\sigma_\mu}$, $(\varphi\varrho)^{\sigma_\mu} = \mu^{-1}\varphi\varrho\mu = \mu^{-1}\varphi\mu\mu^{-1}\varrho\mu = \varphi^{\sigma_\mu}\varrho^{\sigma_\mu}$. Zobrazení σ_μ je tedy automorfismus okruhu Φ. Automorfismus σ_μ okruhu Φ indukuje automorfismus π' svazu Ω_L předpisem

$$(\Phi\varphi)^{\sigma_\mu} = \Phi\varphi^{\sigma_\mu} = \Phi\mu^{-1}\varphi\mu = (\Phi\varphi)^{\pi'}\,. \tag{2}$$

Jestliže je π libovolný automorfismus svazu Ω_L, pak je zřejmě $f^{-1}\pi f$ automorfismem svazu $\overline{M}$. Podle lemmy 2 je $f^{-1}\pi f$ projektivní zobrazení modulu M. Platí tedy podle [5] $U^{f^{-1}\pi f} = U_\mu$ pro každý podmodul U modulu M, kde μ je pololineární zobrazení modulu M. Protože pro libovolný $\Phi\varphi$ je $(\Phi\varphi)^f \leqq M$, dostáváme $(\Phi\varphi)^\pi = (\Phi\varphi)^{ff^{-1}\pi ff^{-1}} = ((\Phi\varphi)^f \mu)^{f^{-1}}$. Podle (1), (2) pak dostáváme $(\Phi\varphi)^\pi = (\Phi\mu^{-1}\varphi\mu)^{ff^{-1}} = (\Phi\varphi)^{\sigma_\mu}$. Automorfismus π svazu Ω_L je indukován automorfismem σ_μ okruhu Φ.

Jestliže označíme π_σ automorfismus svazu Ω_L indukovaný automorfismem σ okruhu Φ, pak zobrazení $\sigma \to \pi_\sigma$ je podle předchozí části důkazu homomorfismem grupy $A(\Phi)$ na grupu $P(\Omega_L)$. Předpokládejme, že π_σ je identický automorfismus svazu Ω_L. Pak $(\Phi\varphi)^{\pi_\sigma} = (\Phi\varphi)^\sigma = \Phi\varphi$ pro každý $\varphi \in \Phi$. Protože modul M splňuje podmínku lemmy 4, je σ identický automorfismus okruhu Φ. Zobrazení $\sigma \to \pi_\sigma$ je isomorfismus grup $A(\Phi)$, $P(\Omega_L)$.

Poznámka. V následujících větách předpokládáme, že modul M má stejné vlastnosti jako ve větě 1.

Věta 2. *Každý automorfismus svazu Ω_P je indukován automorfismem okruhu Φ. Grupa $P(\Omega_P)$ je isomorfní s grupou $A(\Phi)$.*

Důkaz. Zvolme pololineární zobrazení μ modulu M a $\varrho \in \Phi$. Pak $\mu^{-1}\varrho\mu \in \Phi$ a následující tvrzení jsou ekvivalentní: $x \in (\operatorname{Ker}(\varrho))\,\mu$, $x = y\mu$ a současně $y\varrho = o$, $x\mu^{-1}\varrho\mu = o$, $x \in \operatorname{Ker}(\mu^{-1}\varrho\mu)$. To znamená, že $(\operatorname{Ker}(\varrho))\,\mu = \operatorname{Ker}(\mu^{-1}\varrho\mu)$. Podle definice zobrazení g dostáváme

(1) $$(\varrho\Phi)^g\,\mu = (\mu^{-1}\varrho\mu\Phi)^g\,.$$

Automorfismus σ_μ okruhu Φ, uvažovaný ve větě 1 indukuje automorfismus π' svazu Ω_P předpisem

(2) $$(\varphi\Phi)^{\sigma_\mu} = \varphi^{\sigma_\mu}\Phi = \mu^{-1}\varphi\mu\Phi = (\varphi\Phi)^{\pi'}\,.$$

Jestliže je π automorfismus svazu Ω_P, pak je zřejmě $g^{-1}\pi g$ automorfismus svazu $\overline{M}$. Podle lemmy 2 je $g^{-1}\pi g$ projektivní zobrazení modulu M a podle [5] je indukováno pololineárním zobrazením μ modulu M, čili

(3) $$U^{g^{-1}\pi g} = U\mu \quad \text{pro každý podmodul} \quad U \leqq M\,.$$

Podle (3), (1), (2) dostáváme pro libovolný $\varphi\Phi \in \Omega_P : (\varphi\Phi)^\pi = (\varphi\Phi)^{gg^{-1}\pi gg^{-1}} = ((\varphi\Phi)^g\,\mu)^{g^{-1}} = (\mu^{-1}\varphi\mu\Phi)^{gg^{-1}} = (\varphi\Phi)^{\sigma_\mu}$. Automorfismus π svazu Ω_P je indukován automorfismem σ_μ okruhu Φ.

Jestliže označíme π_σ automorfismus svazu Ω_P indukovaný automorfismem σ okruhu Φ, pak je podle lemmy 4 zobrazení $\sigma \to \pi_\sigma$ isomorfismem grup $A(\Phi)$, $P(\Omega_P)$.

Věta 3. *Každý automorfismus svazu Φ_L je indukován automorfismem okruhu Φ. Grupy $P(\Phi_L)$, $A(\Phi)$ jsou isomorfní.*

Důkaz. Protože je každý levý hlavní ideál okruhu Φ generován idempotentním prvkem, platí podle [3], hlava III, § 7: K levému ideálu I_1 okruhu Φ existuje levý ideál I_2 takový, že $I_1 \oplus I_2 = \Phi$, právě když je I_1 hlavní ideál.

Zvolme libovolný automorfismus ω svazu Φ_L a libovolný $\Phi\psi \in \Omega_L$. Existuje $\Phi\gamma$ takový, že $\Phi\psi \oplus \Phi\gamma = \Phi$. Zřejmě také $(\Phi\psi)^\omega \oplus (\Phi\gamma)^\omega = \Phi$. To však znamená, že $(\Phi\psi)^\omega$ je hlavní ideál, čili $(\Phi\psi)^\omega \in \Omega_L$. Proto $\Omega_L^\omega \subset \Omega_L$. Z toho, že ω je automorfismus svazu Φ_L, plyne $\Omega_L^\omega = \Omega_L$ a ω indukuje automorfismus ω' svazu Ω_L. Automorfismus ω' je podle věty 1 indukován automorfismem σ okruhu Φ předpisem $(\Phi\psi)^\sigma = (\Phi\psi)^{\omega'} = (\Phi\psi)^\omega$ pro každý $\Phi\psi \in \Omega_L$. Každý levý ideál I okruhu Φ můžeme zapsat jako součet hlavních levých ideálů: $I = \sum_{\nu \in J} \Phi\psi_\nu$. Protože je Φ_L úplný svaz, platí $I^\omega = \sum_{\nu \in J} (\Phi\psi_\nu)^\omega = \sum_{\nu \in J} (\Phi\psi_\nu)^\sigma = I^\sigma$. Automorfismus ω svazu Φ_L je indukován automorfismem σ okruhu Φ.

Zobrazení $\sigma \to \pi_\sigma$, kde π_σ je automorfismus svazu Φ_L indukovaný automorfismem σ okruhu Φ, je homomorfismem grupy $A(\Phi)$ na grupu $P(\Phi_L)$. Jestliže je π_σ identický automorfismus svazu Ω_L, pak určitě $(\Phi\psi)^{\pi_\sigma} = (\Phi\psi)^\sigma = \Phi\psi$ pro všechny levé hlavní ideály okruhu Φ. To podle lemmy 4 znamená, že σ je identický automorfismus okruhu Φ. Zobrazení $\sigma \to \pi_\sigma$ je isomorfismus grup $P(\Phi_L)$, $A(\Phi)$.

Věta 4. *Každý automorfismus svazu Φ_P je indukován automorfismem okruhu Φ. Grupy $P(\Phi_P)$, $A(\Phi)$ jsou isomorfní.*

Důkaz. Provedeme podobně jako důkaz věty 3.

Literatura

[1] *Р. Бер:* Линейная алгебра и проективная геометрия. Москва 1955.

[2] *Н. Бурбаки:* Алгебра II, Модули, колца, формы. Москва 1966.

[3] *Н. Джекобсон:* Строение колец. Москва 1961.

[4] *H. Hermes:* Einführung in die Verbandstheorie. 2. Auflage. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York 1967.

[5] *Л. А. Скорняков:* Проективное отображение модулей. Известия АН 1960, *24*, № 4, 511—520.

[6] *K. G. Wolfson:* Baer rings of endomorfisms. Math. Ann., 1961, *143*, No 1, 19—28.

Adresa autora: Olomouc, Leninova 26.

Zusammenfassung

ÜBER AUTOMORPHISMEN, DIE AM ENDOMORPHISMENRING DES HOMOGENEN VOLLSTÄNDIG REDUZIBLEN MODULS DEFINIERT SIND

FRANTIŠEK MACHALA, Olomouc

Unter einem homogenen vollständig reduziblen Modul verstehen wir einen vollständig reduziblen Modul mit einer einzigen homogenen Komponente. Definieren wir nach der Arbeit [5] einen zulässigen Modul und betrachten einen Ring R mit Einselement folgender Eigenschaft: Ist $ab = 1$ für $a, b \in R$, so besteht $c \in R$ derart, dass $ca = 1$. Bezeichnen wir mit Φ_L bzw. Φ_P einen Verband, der von den Links- bzw. Rechtsidealen des Endomorphismenringes Φ eines zulässigen homogenen vollständig reduziblen Moduls über dem Ring R erzeugt ist.

In der Arbeit ist bewiesen, dass jeder Automorphismus der Verbände Φ_L, Φ_P durch einen Automorphismus des Ringes Φ induziert ist. Die Automorphismengruppen der Verbände Φ_L, Φ_P und des Ringes Φ sind isomorph.